3 6105 024 620 242

510.5
A673

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

STANFORD LIBRARY

Neunzehnter Theil.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagshandlung

Th. Kunike.

1852.

162446

I.

Ueber die Linie äquidifferenter Potenzen bei zwei Kreisen.

Von

Herrn Doctor Kösters

zu Warendorf.

Der geometrische Ort des Punktes, der eine solche Lage zu zwei festen Kreisen hat, dass die Quadrate der von ihm aus an die Kreise gezogenen Tangenten eine constante Differenz haben, heisse „die Linie äquidifferenter Potenzen für diese zwei Kreise."

Die beiden Kreise seien M und N mit den Radien R und r, der Punkt D liege in der Linie äquidifferenter Potenzen, und die von ihm aus nach M und N gezogenen Tangenten seien T und t; dann ist:

$$T^2-t^2=c^2,$$

wo c^2 die constante Differenz ist. Um nun die Ortslinie des Punktes D zu finden, ziehe man die Centrallinie MN und theile diese in A so, dass

$$MA-NA=\frac{m^2}{MN},$$

wo

$$m^2=c^2+R^2-r^2$$

ist, dann ist die in A auf MN errichtete Senkrechte die verlangte Ortslinie, welche wir L nennen wollen.

Führt man die Tangenten auf die von D aus gezogenen Centrallinien $DM(a)$ und $DN(b)$ zurück, so ist für $T^2-t^2=c^2$:

$$a^2-b^2=c^2+R^2-r^2=m^2.$$

Aus der Betrachtung dieser Ortslinie L will ich hier nur einige spezielle Fälle hervorheben.

1) Es sei zunächst die Aequidifferenz $c^2=0$ oder:

$$T^2-t^2=0,\ \text{und}\ a^2-b^2=R^2-r^2.$$

Dann ist L die Linie der gleichen Potenzen, axe radical, die als eine bei der Betrachtung der Kreise äusserst fruchtbare Linie hinlänglich bekannt, wenn auch noch weniger in Handbücher aufgenommen ist. Man findet sie vielfach sowohl analytisch als rein geometrisch betrachtet. cf. Steiner's geometrische Constructionen p. 59.; Adams harmonische Verhältnisse p. 249.; Plücker's geometrische Entwickelungen I. 48.; Chasles Geschichte der Geometrie p. 202.

2) Setzt man:

$$c^2=n(R^2-r^2),$$

oder:

$$T^2-t^2=n(R^2-r^2),$$

oder:

$$a^2-b^2=(n+1)(R^2-r^2);$$

so ist L die Linie der gleichen Potenzen für jedes Kreispaar, das aus den beiden Peripherien der ursprünglichen Kreise M und N um zwei entsprechende, entweder innere oder äussere Berührungspunkte von T und t mit den Radien $R\sqrt{n}$ und $r\sqrt{n}$ beschrieben ist; und die Durchschnittspunkte sämmtlicher dieser Kreise mit den jedesmal zugehörigen Tangenten T und t liegen in zwei Kreisen, die aus M und N mit den Radien $R\sqrt{n+1}$ und $r\sqrt{n+1}$ beschrieben sind und für welche L die Linie der gleichen Potenzen ist.

3) Setzt man:

$$c^2=-n(R^2-r^2),$$

oder:

$$T^2-t^2=-n(R^2-r^2),$$

oder:

$$a^2 - b^2 = -(n-1)(R^2 - r^2);$$

so ergiebt sich die Bedeutung der Linie L für diesen allgemeinen Fall durch eine der vorigen (sub. 2.) ähnliche Betrachtung; ich werde hier nur zwei spezielle Fälle besonders hervorheben.

a) Es sei

$$c^2 = -(R^2 - r^2), \text{ oder } n = 1;$$

folglich:

$$T^2 - t^2 = -(R^2 - r^2);$$

dann ist also:

$$a^2 - b^2 = 0, \text{ oder } a = b.$$

Hier ist L die Ortslinie des Punktes, der von den Mit telpunkten M und N gleiche Entfernung hat.

b) Es sei

$$c^2 = -2(R^2 - r^2), \text{ oder } n = 2;$$

folglich:

$$T^2 - t^2 = -2(R^2 - r^2);$$

dann ist:

$$a^2 - b^2 = -(R^2 - r^2),$$

oder:

$$a^2 + R^2 = b^2 + r^2.$$

Die Linie äquidifferenter Potenzen ist für diesen Fall, dass die Differenz

$$c^2 = -2(R^2 - r^2)$$

ist, von besonderer Bedeutung in ihrer Anwendung auf die Auflösung von Aufgaben, und sie mag in der nun folgenden Betrachtung vorzugsweise die Linie äquidifferenter Potenzen im Gegensatze zur Linie der gleichen Potenzen heissen, welcher Gegensatz deutlich hervortritt in den zwei Gleichungen:

$$a^2 - b^2 = R^2 - r^2$$

und

$$a^2 - b^2 = -(R^2 - r^2).$$

Die Linie äquidifferenter Potenzen kann ebenso, wie die Linie

gleicher Potenzen, ausser durch die oben angegebene Theilung der Centrallinie MN, auf mehrfache Weise einfach construirt werden. Eine sehr einfache Construction ist folgende:

Errichte auf MN die zwei senkrechten Radien MH und Nk, ziehe HK, und im Halbirungspunkte Q der Linie HK die Senkrechte QG, welche MN in O schneidet, dann ist die Senkrechte auf MN im Punkte O die gesuchte Linie L äquidifferenter Potenzen für die zwei Kreise M und N. — Beschreibt man nun aus O mit OH oder OK einen Kreis, so schneidet dieser die Centrallinie MN in S und s, welche Punkte eine solche Lage haben, dass alle aus den einzelnen Punkten, z. B. D, der Linie L mit den entsprechenden Entfernungen von S oder s, z. B. mit DS oder Ds, beschriebenen Kreise die Peripherien der zwei gegebenen Kreise M und N halbiren.

Ist ferner O der Hauptpunkt der Linie L äquidifferenter Potenzen, so ist, wenn X der Halbirungspunkt von MN ist, und $XO_1 = XO$ gemacht wird, O_1 der Hauptpunkt der Linie der gleichen Potenzen für die zwei Kreise M und N oder der Centralpunkt der in der Linie MN durch die Einschnitte der zwei Kreise A, B und a, b bestimmmten Involution, deren Hauptpunkte S_1 und s_1 sind, durch welche alle aus der Linie der gleichen Potenzen mit den zugehörigen Tangenten beschriebenen Kreise gehen.

Zudieser Mittheilung veranlasste mich eine Aufgabe im Archiv Thl. XIII.: „Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen, der einen gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers des letzteren Kreises schneidet“ — um zu zeigen, wie mit Hülfe der Linie äquidifferenter Potenzen mehrere Aufgaben, zu denen auch obige gehört, leicht aufgelöst werden können, um so mehr, als eben derartige Aufgaben dem nächsten Zwecke des Archivs entsprechen und auf dem Gebiete des Gymnasialunterrichts vorzugsweise wünschenswerth erscheinen.

Besagte Aufgaben verlangen die Construction eines Kreises, der, wenn Punkte, Geraden und Kreise zu zwei oder drei Stück zusammen gegeben sind, durch die gegebenen Punkte geht, die Geraden berührt und die Kreise in den Endpunkten desselben Durchmessers schneidet.

Es sollen hier nur zwei (Taf. II. Fig. 2.) besonders hervorgehoben werden.

1. *Aufgabe.* Gegeben sind zwei Punkte E und F und ein Kreis M, es soll ein zweiter Kreis beschrieben werden, der durch die zwei Punkte geht und den gegebenen Kreis in den Endpunkten desselben Durchmessers des letztern Kreises schneidet.

Auflösung. Man beschreibe um EF als Durchmesser einen Kreis N, construire zu M und N die Linie L äquidifferenter Potenzen, errichte NP senkrecht auf EF, so ist der aus P mit PE beschriebene Kreis der verlangte.

Beweis. Der aus P mit PE beschriebene Kreis geht auch durch F, weil P in der Ortslinie PN des Punktes liegt, der von E und F gleiche Entfernung hat, und die Peripherie des Kreises M ist in G und H halbirt, denn der aus der Linie äquidifferenter Potenzen beschriebene Kreis halbirt, wenn die Peripherie des

einen gegebenen Kreises, auch die des anderen Kreises, was sich einfach also beweisen lässt:

Ziehe MH und MG, so ist:

$$PM^2 + MH^2 = PN^2 + NE^2,$$

(weil P in L liegt) nach der Formel:

$$a^2 + R^2 = b^2 + r^2.$$

Es ist aber:

$$PN^2 + NE^2 = PE^2 = PH^2,$$

folglich:

$$PH^2 = PM^2 + MH^2;$$

folglich ist HM senkrecht auf PM, und da ebenso MG senkrecht auf PM ist, so ist GH Durchmesser des Kreises M und folglich die Peripherie in G und H halbirt.

2. *Aufgabe.* Gegeben sind drei Kreise M, N und Y; es soll ein vierter Kreis beschrieben werden, der die Peripherien aller drei Kreise halbirt.

Auflösung. Ziehe zu M und N die Linie L äquidifferenter Potenzen, und ebenso zu M und Y die Linie L_1 äquidifferenter Potenzen, so ist der Durchschnittspunkt P von L und L_1 der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, und zieht man nun PN, und EF senkrecht auf PN, so ist der aus P mit PE beschriebene Kreis der verlangte.

Es giebt eine ganze Schaar von Aufgaben, die sich mit Hülfe der Linie äquidifferenter Potenzen ebenso leicht als die vorigen auflösen lassen, und der Satz: „dass alle aus der Linie äquidifferenter Potenzen mit $\sqrt{a^2 + R^2}$ oder $\sqrt{b^2 + r^2}$ beschriebenen Kreise die Peripherien der zwei gegebenen Kreise halbiren“, spielt hier eine ähnliche Rolle als bei der Linie der gleichen Potenzen der Satz: „dass alle aus ihr mit $\sqrt{a^2 - R^2}$ oder $\sqrt{b^2 - r^2}$ oder, was dasselbe ist, mit den zugehörigen Tangenten beschriebenen Kreise die zwei gegebenen senkrecht schneiden. Es sollen im Folgenden einige solche Aufgaben aufgestellt werden.

Aufgaben.

1) Einen Kreis ziehen, der die Peripherie zweier (der Lage nach) gegebener Kreise halbirt, und durch einen gegebenen Punkt geht.

2) Einen Kreis ziehen, der die Peripherie zweier gegebener Kreise halbirt, und eine gegebene Gerade berührt.

3) Einen Kreis ziehen, der die Peripherie eines gegebenen Kreises halbirt und zwei gegebene Geraden berührt.

4) Einen Kreis ziehen, der die Peripherien zweier Kreise halbirt und einen dritten rechtwinkelig schneidet.

5) Einen Kreis ziehen, der zwei gegebene Kreise rechtwinkelig schneidet und die Peripherie eines dritten halbirt.

6) Einen Kreis ziehen, der durch einen gegebenen Punkt geht, einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet und die Peripherie eines andern halbirt.

7) Einen Kreis ziehen, der eine gegebene Gerade berührt, einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet und die Peripherie eines andern halbirt.

8) Einen Kreis ziehen, der durch einen gegebenen Punkt geht, einen gegebenen Kreis berührt und die Peripherie eines andern halbirt.

9) Einen Kreis ziehen, der eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt und die Peripherie eines andern halbirt.

Bemerkung des Herausgebers zu vorstehendem Aufsatze.

Der Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes hat zu demselben nur eine Figur (Taf. II. Fig. 2.) eingesandt, welche zu den beiden Aufgaben auf S. 4. und S. 5. gehört. Wenn auch die Leser wahrscheinlich, so wie ich, Zeichnungen zu dem ersten Theile dieses Aufsatzes vermissen werden, so habe ich denselben dessenungeachtet auch ohne dieselben abdrucken lassen, weil es mir scheint, dass diese Zeichnungen ein Jeder sich leicht wird selbst entwerfen können, so dass dadurch die Deutlichkeit wesentlichen Schaden nicht leiden dürfte.

II.

Von den einem Kreise umschriebenen und einem zweiten Kreise einbeschriebenen Vielecken.

Von

Herrn Planck,

Repetenten an der polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Man findet in Poncelet's Traité des propriétés projectives einen ausführlichen Beweis des Satzes:

„Wenn zwei Kegelschnitte eine solche Lage haben, dass irgend ein $n$eck dem einen umschrieben und zugleich dem andern einbeschrieben werden kann, so lassen sich unzählige andere $n$ecke unter denselben Bedingungen beschreiben.“

Das Folgende enthält eine Vereinfachung der von Poncelet angewandten Beweismethode, und sodann noch einen besondern davon unabhängigen Beweis für das einem Kreise umschriebene und einem zweiten Kreis einbeschriebene Drei- und Viereck.

Da wir dabei vom Pascal'schen Satze in dem Sinne, wie derselbe in Nr. XXI. Theil XVIII. dieses Archivs aufgefasst wurde, vielfachen Gebrauch machen werden, so müssen wir auf das in Nro. I. dieses Artikels Ausgeführte im Voraus verweisen.

I.

Betrachten wir ein System von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Geraden OP (Taf. I. Fig. 1.) liegen, und die den mit

$OP = OP'$ beschriebenen Kreis orthogonal durchschneiden. Wird ein solcher Kreis von der Geraden OP in den Punkten R, S getroffen, so ist

$$OP^2 = OP'^2 = OR \times OS,$$

mithin sind P', R, P, S vier harmonische Punkte, d. h. die Punkte P', P sind für alle Kreise des Systems zugeordnete Pole. Was im Folgenden für P bewiesen wird, gilt auch für P'.

Ist $ABCD$ ein irgend einem der Kreise einbeschriebenes Viereck, dessen Diagonalen sich in P, dessen gegenüberliegende Seiten also verlängert sich auf der Polare von P schneiden, so erkennt man leicht, dass jede durch P gezogene Gerade zwei gegenüberliegende Seiten AB, DC in zwei Punkten A', C' trifft, welche zu P und zum Schnittpunkt E der Geraden mit der Polare von P harmonisch liegen. Hieraus aber folgt unmittelbar, dass die Punkte A', C' wieder auf einem Kreise des Systems liegen, und ferner, dass die beiden andern Punkte B', D', in welchen AB, DC diesem Kreise begegnen, gleichfalls mit P auf einer Geraden liegen.

Da nun APB, DPC sowohl als $A'PB'$, $D'PC'$ ähnliche Dreiecke sind, so folgen nachstehende wohl meist bekannte Sätze:

1) Irgend zwei Kreise des Systems werden von einer beliebigen Geraden in vier Punkten von der Lage geschnitten, dass je ein Paar von Geraden, welche zwei, nicht auf einerlei Kreis liegende, Punkte mit dem Punkt P verbinden, denselben Winkel bildet, wie das andere Paar, ($DPD' = CPC'$ u. s. w.).

2) Da

$$\frac{AP}{AA'} \times \frac{AP}{AB'} = \frac{DP}{DD'} \times \frac{DP}{DC'},$$

die Lage der Punkte A und D aber ganz unabhängig von einander ist, so folgt, dass das Verhältniss von AP zu der von A an den zweiten Kreis gezogenen Tangente constant ist, oder allgemein, dass das Verhältniss der von einem Punkt A irgend eines der Kreise an zwei andere Kreise des Systems gezogenen Tangenten sich mit der Fortbewegung von A nicht ändert.

Hierin liegt zugleich:

3) Den Berührungspunkt einer Sehne AB mit einem Kreise des Systems erhält man, wenn man von P nach AB die den Winkel APB halbirende Gerade zieht.

Jetzt handelt es sich darum, zu beweisen, dass, wenn zwei Seiten AB, AC eines einem Kreise des Systems einbeschriebenen Dreiecks Tangenten an zwei anderen Kreisen des Systems bleiben, dann auch die dritte Seite BC immer Tangente an einem und demselben Kreis desselben Systems bleibt.

Diess zeigt sich nun hier weit einfacher, als bei Poncelet, der ein System von Kreisen mit gemeinschaftlicher reeller Sekante betrachtet. Poncelet gibt zunächst für den Punkt, in welchem die Seite BC ihre Umhüllungscurve berührt, folgende Construction: Wenn c der Berührungspunkt von AB, b der Berührungspunkt von AC mit den beiden gegebenen Kreisen ist, so findet man den Berührungspunkt a auf BC, indem man den Punkt A mit dem Schnittpunkt von Bb und Cc verbindet. Dann wird weiter bewiesen, dass der Punkt a zugleich derjenige ist, in welchem BC einen Kreis vom System berührt. Das Letztere ergibt sich nun, wenn wir jene Construction vorläufig voraussetzen, einfach daraus, dass zwischen den Punkten a, b, c 1) die bekannte Relation Statt findet:

$$Ac \times Ba \times Cb = Ab \times Bc \times Cc,$$

und dass 2) nach den oben angeführten Sätzen:

$$\frac{Ab}{Cb} = \frac{AP}{CP}, \quad \frac{Bc}{Ac} = \frac{BP}{AP},$$

wornach man also erhält:

$$\frac{Ba}{Ca} = \frac{BP}{CP}.$$

Ist nun, schliessen wir nach Poncelet weiter, die Umhüllungscurve von BC kein Kreis vom System, so muss sie zusammenfallen mit der Umhüllung aller Kreise des Systems, während doch eine solche gar nicht existirt: es bleibt also nur das Erste übrig.

Die einstweilen aufgenommene Voraussetzung hinsichtlich der Construction des Berührungspunktes a liesse sich umgehen, wenn nachzuweisen wäre, dass das Verhältniss

$$\frac{BP}{Ba} = \frac{CP}{Ca} = \frac{BP + CP}{BC}$$

unter den festgesetzten Bedingungen constant bleibt, indem dann von selbst folgen würde, dass a immer auf demselben Kreise liegt. Man hätte dann einen allgemeinen rein elementaren Beweis unseres Theorems. Allein der directe Nachweis dieses Satzes scheint mehr Sache der rechnenden Geometrie zu sein, und deshalb ist es wohl vorzuziehen, die gemachte Vorausetzung möglichst einfach zu beweisen.

Wir schliessen deshalb nach Poncelet zunächst so: Der gesuchte Schnittpunkt irgend einer Lage BC mit der ihr unendlich nahen Lage ist jedenfalls kein anderer, als der Schnittpunkt von BC mit derjenigen nächstfolgenden Lage, die man erhalten würde, wenn bei der Fortbewegung von A die Seiten AB, AC, statt Tangenten an den beiden Kreisen zu bleiben, sich um ihre Berührungspunkte c, b drehen würden. Man sieht sich daher auf die Aufgabe zurückgeführt:

Den Punkt zu bestimmen, in welchem die freie Seite *BC* eines einem Kreise einbeschriebenen Dreiecks *ABC*, dessen Seiten *AB*, *AC* sich um zwei feste Punkte *c*, *b* drehen, ihre Umhüllungscurve berührt.

Poncelet beweist die schon gegebene Construction dieser Aufgabe mittelst Projection zweier concentrischer Kreise. Wenn man sich aber an die Auflösung der Aufgabe erinnert, die Lage von *BC* zu finden, die durch einen gegebenen Punkt geht, so wird man auf eine sehr einfache Lösung unseres Problems kommen, da der gesuchte Punkt eben die Bedingung erfüllen muss, dass sich durch ihn nicht noch eine zweite Sehne vom System der Sehne *BC* ziehen lässt. Wir werden hier mit folgender Betrachtung ausreichen.

Wenn (Taf. I. Fig. 2.) *BC* und *B'C'* zwei Lagen der freien Sehne sind, so schneiden sich nach dem Pascal'schen Satze *BC'* und *B'C* in einem Punkt der Geraden *bc*. Dieser Punkt rückt immer näher dem Punkt *D*, in welchem *BC* die *bc* trifft, wenn *B'C'* sich der Lage *BC* nähert, und fällt mit ihm zusammen, wenn *B'C'* mit *BC* zusammenfällt. Dann aber sind, wie man sieht, der Schnittpunkt von *BC* und *B'C'* und der mit *D* zusammengefallene Punkt zwei zu *B*, *C*, oder *B'*, *C'*, harmonische Punkte geworden, und daraus folgt aus bekannten Gründen die angezeigte Construction.

Der weitere Gang des Poncelet'schen Beweises ist nun der. Wenn irgend ein *n*eck einem Kreise umschrieben und einem zweiten einbeschrieben ist, so wird jede Diagonale des *n*ecks einen dem System der beiden Kreise angehörigen Kreis in einem bestimmten Punkte berühren, und wird, wie sich aus dem erwiesenen Hilfssatz ergibt, auch Tangente an demselben Kreise bleiben, wenn man der Annahme Raum gibt, dass bei einer Verrückung des Polygons eine Seite desselben aufhören würde, Tangente an den ersten Kreis zu sein. Bleiben aber die Diagonalen immer Tangenten an denselben Kreisen, so muss wieder nach dem Hilfssatze auch die Seite des Polygons, deren Bewegungsgesetz in Frage gestellt wurde, Tangente an dem Kreise bleiben, an welchem sie es in ihrer ersten Lage war.

II.

Man sieht, dass der Nerv des Beweises im Pascal'schen Satze liegt. Auch Poncelet beweist eigentlich bei seiner Construction des Berührungspunktes diesen Satz nur zum zweiten Mal. Im Folgenden, wo wir die Betrachtung der Umhüllungscurven zunächst ganz umgehen werden, werden wir uns gleichfalls des Pascal'schen Satzes auf einer andern Seite wieder bedienen.

Es sei (Taf. I. Fig. 3.) das Dreieck ABC einem Kreise mit dem Mittelpunkt O umschrieben. Die Peripherie des Kreises, dem das Dreieck einbeschrieben ist, wird von der Geraden AO, BO, CO in den Punkten D, E, F getroffen, EF begegnet der AO in G. Da Bogen $AF=BF$, Bogen $AE=CE$, so ist, wie man leicht erkennt, Dreieck AEF congruent Dreieck OEF, überdiess AO in G senkrecht halbirt. Zieht man nun den Durchmesser AQ, der der EF in P begegnet, und trifft PO verlängert die BC in R, so ist, weil QD parallel EF und $QF=DE$,

$$FAP=EAG=FOP=EOG=COR,$$

sonach Dreieck COR ähnlich Dreieck EOG, oder OR senkrecht zu BC und gleich dem Halbmesser des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises.

Nun bemerke man, dass PO, OR Projectionen der Sehne BF von den Punkten E und C des Kreises aus sind. Da aber PO auch eine Projection von QD ist (von A aus), so muss nach dem Pascal'schen Satze OR gleichfalls eine Projection von QD von einem Punkt S des Kreises aus sein. Somit ist $ODR=AQO$, und da überdiess $DOR=POG=QAO$, das Dreieck DOR ähnlich dem Dreieck QAO, wornach man hat:

$$OR=\frac{OD\times AO}{AQ},$$

ein anderwärts her bekannter Ausdruck, der zeigt, dass der Halbmesser OR von der bestimmten Lage des Punktes A unabhängig ist.

Es sei jetzt (Taf. I. Fig. 4.) das Viereck $ABCD$ einem Kreise mit dem Mittelpunkt O umschrieben, und einem Kreise mit dem Mittelpunkt M einbeschrieben. AO halbirt den Bogen BD in E, CO in G, BO halbirt den Bogen AC in F, DO in H. Dann sind EG, FH Kreisdurchmesser, EG senkrecht zur Sehne BD in Q, FH senkrecht zur Sehne AC in P. Da nun OM eine Projection sowohl der Sehne DF (von H aus), als der Sehne AG (von E aus) ist, so sind diese Sehnen von einerlei System in Bezug auf den Durchmesser OM, und es wird daher die Projection der Sehne DF von B aus zusammenfallen mit der Projection der Sehne AG von C aus, d. h. AC und BC werden sich in einem Punkte N des Durchmessers OM schneiden. Hieraus folgt einstweilen so viel, dass der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks unabhängig ist von der besonderen Lage des Punktes A: denn der Punkt N ist durch M und O bereits gegeben.

Ganz ebenso wird man schliessen, dass DF und AG Sehnen von einerlei System sind in Bezug auf die Gerade PO, dass folglich DB und EG sich auf einem Punkte dieser Geraden schneiden, oder dass die Punkte P, O, Q in gerader Linie liegen (ein anderwärts her bekannter Satz).

Für die Länge r des dem Viereck $ABCD$ einbeschriebenen Kreises hat man nun, da $OAB = EGB$, und $EBG = 1 R.$, mittelst ähnlicher Dreiecke:

$$\frac{r}{OA} = \frac{EB}{EG},$$

oder, da $BE^2 = EG \times EQ$:

$$r^2 = OA^2 . \frac{EQ}{EG}.$$

Wollte man jetzt den in I. gefundenen Satz benutzen, dass $\frac{EQ \times EM}{EO^2}$ eine constante Grösse ist, also z. B. $= \frac{EM^2}{EM^2 + OM^2}$ (wenn nemlich der Punkt Q mit M zusammenfällt), so würde man erhalten:

$$r^2 = \frac{OA^2 \times EO^2}{2(EM^2 + OM^2)}.$$

Man kann aber dasselbe Resultat unabhängig davon aus den Eigenschaften des Dreiecks EOG erhalten. Da nemlich

$$EOQ = GOM, \quad EOM = GOQ;$$

so hat man:

$$1) \qquad \frac{EO \times OQ}{OG \times OM} = \frac{EQ}{GM},$$

$$2) \qquad \frac{EO \times OM}{OG \times OQ} = \frac{EM}{GQ};$$

woraus

$$3) \qquad \frac{EO^2}{EQ} = \frac{OG^2}{GQ} = \frac{OE^2 + OG^2}{EQ + GQ} = \frac{OE^2 + OG^2}{EG},$$

somit

$$r^2 = \frac{OA^2 \times OE^2}{OE^2 + OG^2},$$

ein mit dem obigen aus bekannten Gründen identischer Ausdruck.

III.

Noch lässt sich in ziemlich einfacher Weise der Satz beweisen, durch den man mit dem Dreieck und Viereck zugleich fertig wird:

Wenn zwei Seiten AB, AC eines einem Kreise einbeschriebenen Dreiecks Tangenten an einem zweiten Kreise bleiben, so bleibt auch die dritte Seite BC Tangente an einem dritten Kreise, der mit den beiden ersten einerlei (reelle oder ideale) Sekante hat.

Betrachten wir zwei parallele Lagen BC und $B'C'$ (Taf. II. Fig. 1.). AO halbirt den Bogen BC in P, $A'O$ den Bogen $B'C'$ in P'. Der Durchmesser PP' steht senkrecht zu BC in D, senkrecht zu $B'C'$ in D'. Ist $PP'=2R$, und der Halbmesser des andern Kreises r, so hat man, da $PAC=PP'C$, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$1)\quad PC^2=\frac{4R^2r^2}{OA^2}.$$

Ebenso findet man:

$$2)\quad P'C'^2=\frac{4R^2r^2}{OA'^2}.$$

Es ist aber

$$PD=\frac{PC^2}{2R},\quad P'D'=\frac{P'C'^2}{2R};$$

folglich

$$3)\quad PD+P'D'=2R\left(\frac{r^2}{OA^2}+\frac{r^2}{OA'^2}\right),$$

oder, wenn E die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise bezeichnet:

$$PD+P'D'=2R-DD'=2Rr^2\frac{OP^2+OP'^2}{(R^2-E^2)^2}$$
$$=4Rr^2\frac{R^2+E^2}{(R^2-E^2)^2}.$$

Da somit zwei parallele Lagen von BC immer denselben Abstand haben, so kann man den Satz hiemit als bewiesen betrachten, oder auch, wenn man will, den Beweis in einer oder der andern Weise vervollständigen.

Was man aber daraus in Bezug auf das einem Kreis umschriebene und einem zweiten Kreis einbeschriebene Drei- und Viereck zu schliessen hat, leuchtet ein.

III.

Beiträge zur Kenntniss des geradlinigen Dreiecks.

Von

Herrn C. Hellwig,

Lehrer der Mathematik in Fürstenwalde.

I.

Allgemeine Betrachtung.

Wir gehen von dem Satze aus, dass die drei auf den Seiten eines Dreiecks ABC (Taf. III.) in ihren Mitten a, b, c errichteten Lothe sich in einem Punkte U schneiden, in dem Mittelpunkte des Kreises, welcher sich um das Dreieck beschreiben lässt.

Durch die Verbindung von a, b, c unter einander entsteht das Dreieck abc, dessen Seiten mit denen von ABC parallel und die Hälften von ihnen sind. Die verlängerten Lothe aU, bU, cU müssen daher die Höhen des Dreiecks abc sein, welche sich also ebenfalls stets in einem einzigen Punkte kreuzen. Bei den Höhen AD, BF, CG von ABC mag dies in H Statt finden.

Jetzt machen wir

$$aA_1 = Ua, \quad bB_1 = Ub, \quad cC_1 = Uc$$

und verbinden die erhaltenen Punkte A_1, B_1, C_1 mit H und mit A, B, C, welche letzteren ihrerseits mit U verbunden werden. Dadurch entstehen offenbar sechs Rhomben mit gleichen Seiten; denn die Diagonalen halbiren sich gegenseitig und stehen senk-

recht auf einander, und je zwei angrenzende dieser Rhomben haben eine Seite gemein. In der Figur sind die Seiten aller sechs Rhomben durch punktirte Zeichnung markirt worden und jede der punktirten Geraden ist mithin dem Radius des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises gleich.

Durch die Verbindung der Punkte A_1, B_1, C_1 unter einander erhält man jetzt ein Dreieck, dessen Seiten mit denen von ABC als Gegenseiten in Parallelogrammen bezüglich gleich und parallel sind ($\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta ABC$). Die Lage der beiden Dreiecke ist reciprok, da einerseits die verlängerten Geraden A_1U, B_1U, C_1U die Höhen von $A_1B_1C_1$ bilden, andrerseits aber sich leicht zeigen lässt, dass nicht nur A_1B_1 in c_1, A_1C_1 in b_1, B_1C_1 in a_1 halbirt sind, sondern auch

$$Aa_1 = Ha_1, \quad Bb_1 = Hb_1, \quad Cc_1 = Hc_1$$

sein muss, so dass also in H der Mittelpunkt des um $A_1B_1C_1$ beschriebenen Kreises liegt. Die einander entsprechenden Stücke der Höhen beider Dreiecke sind natürlich ebenfalls einander gleich, z. B.

$$Aa_1 = Ha_1 = A_1a = Ua.$$

Ein über AB beschriebener Halbkreis geht durch D und F, und man hat deshalb:

$$AH.HD = BH.HF;$$

ebenso ist

$$AH.HD = CH.HG,$$

d. h. die Produkte aus den Abschnitten der Höhen eines Dreiecks sind gleich.

Wegen der kurz vorher gemachten Bemerkung über die Gleichheit von Aa_1 und Ha_1 u. s. w. gehen die aufgestellten Beziehungen über in:

$$Ha_1.HD = Hb_1.HF = Hc_1.HG,$$

welche anzeigt, dass die Punkte a_1, b_1, c_1, D, F, G einem einzigen Kreise angehören.

Verbindet man A mit a, so schneidet Aa die Gerade bc in J so, dass $Jb = Jc$, und errichtet man nun auf bc in J ein Loth bis zum Durchschnitt mit BC in K, so muss $DK = aK$ sein.

Wendet man dies auf das Dreieck AHB an, so muss ein Loth, auf a_1b_1 in der Mitte errichtet, auch auf cG in der Mitte

senkrecht stehen. Weil nun aber der Mittelpunkt des vorerwähnten Kreises offenbar der Durchschnitt der auf a_1b_1 in der Mitte und auf c_1G in der Mitte errichteten Lothe ist, so müssen sich in diesem Mittelpunkte auch die auf cG und c_1G in den Mitten errichteten Lothe treffen, d. h. dieser Mittelpunkt muss der Durchschnitt M der Diagonalen GG_1 und cc_1 des Rechtecks cGc_1G_1 sein. Auf gleiche Weise gehen durch denselben die Diagonalen der Rechtecke aDa_1D_1 und bFb_1F_1. Der gedachte Kreis geht mithin noch durch die Punkte a, b, c. Weil nun M die Gerade DD_1 halbirt und $DH =$ und $\|\ UD_1$ ist, so muss M weiter die Mitte der Verbindungsgeraden UH sein.

Wird UH von Aa in S getroffen, so sind die Dreiecke AHS und aUS winkelgleich und es verhält sich:

$$AS:aS=HS:US=AH:Ua,$$

woraus wegen $AH=2Ua$ folgt, dass $AS=2aS$ und $HS=2US$ ist, d. h.

Die Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, schneiden sich auf der Verbindungsgeraden des Höhendurchschnittes und des Mittelpunktes vom umschriebenen Kreise so, dass die Abschnitte dieser Geraden, wie ihre eigenen sich verhalten zu einander wie 2:1.

Die Grösse des Radius für den Kreis um M ergiebt sich leicht aus der Bemerkung, dass $Aa_1=a_1H$ und $HM=MU$ ist; denn es muss deshalb

$$Ma_1=\frac{1}{2}UA=\frac{1}{2}R$$

sein (R bezeichne den Radius des Kreises um ABC).

Schneidet endlich Aa den Kreis aus M in N und den Kreis aus U in Q, so haben die Dreiecke SNM und SQU einen gleichen Winkel und zwei ihrer Seiten solche Beschaffenheit, dass $2MN=UQ$ und $2MS=US$ ist; weshalb auch $2SN=SQ$ sein muss.

Wir glauben in dem Vorstehenden einen sehr einfachen Nachweis über die Lage gewisser bemerkenswerther Geraden und Punkte eines Dreiecks geliefert zu haben, und wenden uns, darauf fussend, zu anderen Geraden und Punkten der Figur.

Verbindet man nämlich D, F und G unter einander, so ist M der Mittelpunkt des Kreises um Dreieck DFG mit dem Radius $\frac{1}{2}R$, wie sogleich erhellt; aber es ist ferner H der Mittelpunkt des dem Dreieck DFG eingeschriebenen Kreises; denn man hat:

$$\angle DGc_1 = \angle Da_1c_1 \text{ (Peripheriewinkel) } = \angle DAC$$

und

$$\angle FGc_1 = \angle Fb_1c_1 \text{ (Peripheriewinkel) } = \angle FBC,$$

so dass, weil

$$\angle DAC = \angle FBC,$$

auch

$$\angle DGc_1 = \angle FGc_1$$

sein muss.

Daher bilden die Höhen vom Dreieck ABC die Halbirungsgeraden der Winkel vom Dreieck DFG, deren Durchschnitt mithin den Mittelpunkt des Kreises darstellt, welcher sich in das Dreieck DFG beschreiben lässt. Daraus fliesst die weitere Folgerung, dass A, B, C die Mittelpunkte der dem Dreieck DFG angeschriebenen Kreise sind, da ihre Verbindungsgeraden auf den Halbirungsgeraden der Winkel von DFG senkrecht stehen, und somit die Aussenwinkel von DFG halbiren.

Fällt man in DFG von H die Lothe HX, HY, HZ, so ist

$$GX = GY, \quad FX = FZ, \quad DY = DZ;$$

verlängert man DG und DF und fällt von A die Lothe AP, AT, AV, so ist

$$GP = GT, \quad DT = DV, \quad FP = FV,$$

welches Alles durch Congruenzen sich leicht nachweisen lässt. Es ist also

$$DT = DV \quad \text{oder} \quad DG + GT = DF + FV,$$

hiervon $DY = DZ$ weggenommen, bleibt

$$GY + GT = FZ + FV,$$

oder

$$GX + GP = FX + FP,$$

woraus durch Subtraction von $PX = PX$ folgt:

$$2GX = 2FP \quad \text{oder} \quad GX = FP.$$

Daher hat man auch:

$$GT = GP = FX,$$

$$DT = DG + FX = DV = DF + GX.$$

Ein Kreis, mit HX aus H beschrieben, geht durch X, Y, Z; ein Kreis, mit AP aus A beschrieben, geht durch P, T, V. Verbindet man also X, Y, Z, sowie P, T, V unter einander, so sind die bezeichneten Kreise die den entsprechenden Dreiecken XYZ und PTV umschriebenen.

Wir gehen nach dieser Erläuterung der Figur zur Bestimmung der Entfernungen der bemerkenswerthen Punkte von Ecken und Seiten der betreffenden Dreiecke und zur Aufstellung von Beziehungen zwischen den Flächen dieser Dreiecke selbst über.

II.

Der Durchschnitt der Verbindungsgeraden der Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten oder der Schwerpunkt.

Dieser Punkt ist in unserer Figur durch S bezeichnet. Wir setzen:

$$BC=a,\quad AC=b,\quad AB=c;$$

$$SA=e_1,\quad SB=e_2,\quad SC=e_3$$

und nennen

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \varepsilon_3$$

die Entfernungen des Punktes S von den Seiten des Dreiecks ABC, so dass z. B. $SO=\varepsilon_1$.

Man hat:

$$BD=Ba-Da=\frac{1}{2}a-Da,$$

$$CD=Ca+Da=\frac{1}{2}a+Da;$$

also auch

$$BD^2+CD^2=\frac{1}{2}a^2+2Da^2.$$

Ferner:

$$c^2=AD^2+BD^2,$$

$$b^2=AD^2+CD^2;$$

mithin

$$b^2+c^2=2AD^2+2Da^2+\frac{1}{2}a^2$$
$$=2Aa^2+\frac{1}{2}a^2,$$

d. h.

$$2Aa^2=b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2.$$

Weil nun

$$AS=e_1=\frac{2}{3}Aa,$$

also

$$2Aa^2=\frac{9}{2}e_1{}^2$$

ist, so folgt

$$(1)\qquad\left\{\begin{array}{l} 9e_1{}^2=2(b^2+c^2-a^2)+a^2.\quad\text{Ebenso} \\ 9e_2{}^2=2(a^2+c^2-b^2)+b^2, \\ 9e_3{}^2=2(a^2+b^2-c^2)+c^2; \end{array}\right.$$

woraus

$$(2)\qquad 3(e_1{}^2+e_2{}^2+e_3{}^2)=a^2+b^2+c^2$$

sich ergiebt. SO ist $=\frac{1}{3}AD$; bezeichnet man aber den Inhalt von ABC mit D, so ist $a.AD=2D$, und man findet also:

$$(3)\qquad\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1=\dfrac{2D}{3a}.\quad\text{Ebenso} \\ \varepsilon_2=\dfrac{2D}{3b}, \\ \varepsilon_3=\dfrac{2D}{3c}; \end{array}\right.$$

woraus

$$(4)\qquad a.\varepsilon_1+b.\varepsilon_2+c.\varepsilon_3=2D$$

folgt.

In der letzten Formel ist ein Satz von allgemeiner Bedeutung angezeigt, nämlich dass, wenn man von einem Punkt auf die Sei-

ten a, b, c eines Dreiecks Lothe L_1, L_2, L_3 fällt, der Inhalt D des Dreiecks bestimmt wird durch:

$$(5) \quad a.L_1 + b.L_2 + c.L_3 = 2D,$$

vorausgesetzt, dass dieselben positiv genommen werden, sobald sie auf der inneren, hingegen negativ, sobald sie auf der äusseren Seite der Dreiecksseite, auf welche sie gefällt sind, liegen.

III.

Der Höhendurchschnitt.

Die Höhen bezeichnen wir mit h_1, h_2, h_3, so dass h_1 auf die Seite a, h_2 auf b, h_3 auf c senkrecht steht, die dadurch bestimmten Abschnitte der Seite a mit a_1 und a_2, wovon a_1 an der Seite b und a_2 an c liegt, der Seite b mit b_1 und b_2 und der Seite c mit c_1 und c_2. Die vorhandenen rechtwinkligen Dreiecke ergeben dann leicht die folgenden Beziehungen:

$$(6) \quad \begin{cases} h_1{}^2 = b^2 - a_1{}^2 = c_2 - a_2{}^2, \\ h_2{}^2 = a^2 - b_1{}^2 = c^2 - b_2{}^2, \\ h_3{}^2 = a^2 - c_1{}^2 = b^2 - c_2{}^2; \end{cases}$$

woraus sich, vermöge

$$(7) \quad \begin{cases} a_1 + a_2 = a, \\ b_1 + b_2 = b, \\ c_1 + c_2 = c, \end{cases}$$

sofort ableiten lässt:

$$(8) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, & a_2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}, \\ b_1 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}, & b_2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, \\ c_1 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}, & c_2 = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}; \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen man wiederum findet:

$$(9)\quad \begin{cases} a.a_1 = b.b_1\,, \\ a.a_2 = c.c_1\,, \\ b.b_2 = c.c_2\,. \end{cases}$$

Die Inhaltsbestimmung erfolgt durch:

$$(10)\quad 2D = a.h_1 = b.h_2 = c.h_3\,.$$

Aus (9) und (10) folgt dann weiter:

$$(11)\quad \begin{cases} h_2\,.\,a_1 = h_1\,.\,b_1\,, \\ h_3\,.\,a_2 = h_1\,.\,c_1\,, \\ h_3\,.\,b_2 = h_2\,.\,c_2\,. \end{cases}$$

IV.

Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

Der Radius desselben sei R, die Lothe von dem Mittelpunkt auf die Seiten a, b, c seien ferner l_1, l_2, l_3, so dass l_1 das Loth auf a ist.

Dann hat man:

$$(12)\quad R^2 = \frac{1}{4}a^2 + l_1^2 = \frac{1}{4}b^2 + l_2^2 = \frac{1}{4}c^2 + l_3^2$$

und

$$(13)\quad 2D = a.l_1 + b.l_2 + c.l_3\,, \quad \text{vergl. (5).}$$

Wenn man sich nun erinnert, dass früher gezeigt wurde:

$$Aa_1 = a_1H = l_1\,, \quad Bb_1 = b_1H = l_2\,, \quad Cc_1 = c_1H = l_3\,;$$

so verwandelt sich die oben aufgestellte Gleichheit der drei Producte, in welchen diese Grössen vorkommen, in folgende Gleichungen:

$$(14)\quad \begin{cases} l_1(h_1 - 2l_1) = l_2(h_2 - 2l_2)\,, \\ l_1(h_1 - 2l_1) = l_3(h_3 - 2l_3)\,, \\ l_2(h_2 - 2l_2) = l_3(h_3 - 2l_3)\,. \end{cases}$$

Weil aber durch B, D, H, G ein Kreis sich legen lässt, so wird

$$(15)\quad \begin{cases} 2l_1 \,.\, h_1 = c_2 \,.\, c. & \text{Ebenso} \\ 2l_2 \,.\, h_2 = a_2 \,.\, a \\ 2l_3 \,.\, h_3 = b_1 \,.\, b\,. \end{cases}$$

Eliminirt man aus der ersten dieser Formeln h_1 vermöge (10), so ergiebt sich:

$$(16)\quad \begin{cases} l_1 = \frac{a}{8D}(b^2 + c^2 - a^2)\,. & \text{Ebenso} \\ l_2 = \frac{b}{8D}(a^2 + c^2 - b^2)\,, \\ l_3 = \frac{c}{8D}(a^2 + b^2 - c^2)\,. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke lassen sich, wenn $a + b + c = \sigma$ gesetzt wird, auf folgende Form bringen:

$$(17)\quad \begin{cases} l_1 = \frac{a}{8D} \cdot \{\sigma(\sigma - 2a) - 2bc\}, \\ l_2 = \frac{b}{8D} \cdot \{\sigma(\sigma - 2b) - 2ac\}, \\ l_3 = \frac{c}{8D} \cdot \{\sigma(\sigma - 2c) - 2ab\}. \end{cases}$$

Es fällt nicht schwer, aus dem Vorigen die Werthe von l_1, l_2, l_3 noch in anderer Gestalt darzustellen. Aus (12) folgt nämlich:

$$(18)\quad \begin{cases} l_1{}^2 - l_2{}^2 = \frac{1}{4}(b^2 - a^2)\,, \\ l_1{}^2 - l_3{}^2 = \frac{1}{4}(c^2 - a^2)\,, \\ l_2{}^2 - l_3{}^2 = \frac{1}{4}(c^2 - b^2)\,. \end{cases}$$

Multiplicirt man ferner die erste Gleichung in (15) mit a, die zweite mit b und berücksichtigt (8) und (10), so ist:

$$2l_1 \,.\, D = \frac{1}{4}\, a(b^2 + c^2 - a^2)$$

und

$$2l_2 \,.\, D = \frac{1}{4}\, b(a^2 + c^2 - b^2),$$

mithin

$$2D(l_1-l_2)=\frac{1}{4}\{(a+b)^2-c^2\}.(b-a),$$

wie sich nach einigen leichten Transformationen ergiebt. Hiernach bildet man ohne Mühe auch die Werthe für $2D(l_1-l_3)$ und $2D(l_2-l_3)$, und erhält so:

$$(19)\quad \begin{cases} l_1-l_2=\dfrac{b-a}{8D}.\sigma(\sigma-2c), \\ l_1-l_3=\dfrac{c-a}{8D}\cdot\sigma(\sigma-2b), \\ l_2-l_3=\dfrac{c-b}{8D}\cdot\sigma(\sigma-2a). \end{cases}$$

Dividirt man jetzt die Gleichungen (18) entsprechend durch die in (19), so kommt:

$$(20)\quad \begin{cases} l_1+l_2=\dfrac{2D}{\sigma}\cdot\dfrac{a+b}{\sigma-2c}=\dfrac{2D}{\sigma}\cdot\dfrac{\sigma-c}{\sigma-2c}, \\ l_1+l_3=\dfrac{2D}{\sigma}\cdot\dfrac{a+c}{\sigma-2b}=\dfrac{2D}{\sigma}\cdot\dfrac{\sigma-b}{\sigma-2b}, \\ l_2+l_3=\dfrac{2D}{\sigma}\cdot\dfrac{b+c}{\sigma-2a}=\dfrac{2D}{\sigma}\cdot\dfrac{\sigma-a}{\sigma-2a}. \end{cases}$$

Die Addition dieser Ausdrücke führt zu:

$$(21)\quad l_1+l_2+l_3=\frac{D}{\sigma}\cdot\left\{\frac{\sigma-a}{\sigma-2a}+\frac{\sigma-b}{\sigma-2b}+\frac{\sigma-c}{\sigma-2c}\right\}$$

und die Subtraction der Werthe in (20) von dem letzten endlich zu:

$$(22)\quad \begin{cases} l_1=\dfrac{D}{\sigma}\cdot\left\{\dfrac{\sigma-b}{\sigma-2b}+\dfrac{\sigma-c}{\sigma-2c}-\dfrac{\sigma-a}{\sigma-2a}\right\}, \\ l_2=\dfrac{D}{\sigma}\cdot\left\{\dfrac{\sigma-a}{\sigma-2a}+\dfrac{\sigma-c}{\sigma-2c}-\dfrac{\sigma-b}{\sigma-2b}\right\}, \\ l_3=\dfrac{D}{\sigma}\cdot\left\{\dfrac{\sigma-a}{\sigma-2a}+\dfrac{\sigma-b}{\sigma-2b}-\dfrac{\sigma-c}{\sigma-2c}\right\}. \end{cases}$$

Aus den so eben abgeleiteten Formeln kann man viele neue Beziehungen folgern; so führen die Gleichungen (17) in Verbindung mit (13) zu dem folgenden Werthe von D:

$$(23)\quad 16D^2 = a^2(b^2+c^2-a^2) + b^2(a^2+c^2-b^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)\,.$$

Nun ist aber

$$b^2(a^2+c^2-b^2) = -\,b^2(a^2+b^2-c^2) + 2a^2b^2$$

und

$$a^2(b^2+c^2-a^2) = a^2(a^2+b^2-c)^2 + 2a^2(c^2-a^2)\,,$$

und man erhält also:

$$(24)\quad \begin{cases} 16D^2 = 2a^2(b^2+c^2-a^2) + (a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2). \text{ Ebenso} \\ 16D^2 = 2b^2(a^2+c^2-b^2) + (a^2+b^2-c^2)\,(b^2+c^2-a^2)\,, \\ 16D^2 = 2c^2(a^2+b^2-c^2) + (a^2+c^2-b^2)\,(b^2+c^2-a^2)\,; \end{cases}$$

oder

$$(25)\ 16D^2 = 2a^2(b^2+c^2-a^2) + 2b^2(a^2+c^2-b^2) - (a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)$$

(analog noch zwei andere Ausdrücke),

was vermöge

$$b^2 + c^2 - a^2 = (a^2+c^2-b^2) + 2(b^2-a^2)$$

und

$$2a^2(b^2+c^2-a^2) = 4a^2c^2 + 2a^2(b^2-a^2-c^2)$$

sich verwandelt in:

$$(26)\quad 16D^2 = 4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2,$$

(ähnlich noch zwei andere Formen).

Und hieraus folgt leicht der bekannte Werth:

$$16D^2 = (a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)\,.$$

V.

Die durch die Höhen bestimmten Dreiecke, die Mittelpunkte der ein- und angeschriebenen Kreise.

Die Dreiecke, welche nur von den Höhen und Seiten des Dreiecks *ABC* eingeschlossen werden, bestimmt man ohne Weiteres aus den schon gegebenen Formeln, namentlich aus (8), (10), (16) und (24). So findet man z. B.

$$(27)\quad \Delta AGH = \frac{a^2+c^2-b^2}{8D}\cdot\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2,$$

$$(28)\quad \Delta BGH = \frac{b^2+c^2-a^2}{8D}\cdot\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2,$$

$$(29)\quad \Delta ABD = \frac{1}{2}D.\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2}.$$

Wir holen jetzt noch eine Bestimmung nach in Betreff des Radius des umschriebenen Kreises; aus (12) und (16) folgt:

$$R^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{64D^2}(b^2+c^2-a^2)^2 = \frac{1}{4}a^2.\frac{16D^2+(b^2+c^2-a^2)^2}{16D^2}.$$

Der Zähler des Factors von $\frac{1}{4}a^2$ ist hier, nach einer mit (26) analogen Formel, nichts Anderes als $4b^2c^2$, und man erhält also:

$$(30)\quad R = \frac{abc}{4D}.$$

Dieser Gleichung stellen wir sofort diejenigen zur Seite, welche für den Radius des eingeschriebenen und die der angeschriebenen Kreise gelten. Dieselben ergeben sich mit Leichtigkeit aus (5), wenn man auf die hinzugefügte Bemerkung Rücksicht nimmt. Bezeichnet man den ersten Radius mit r, die übrigen mit r_1, r_2, r_3, so dass r_1 auf der äusseren Seite der Dreiecksseite a liegt, so hat man:

$$(31)\quad \begin{cases} 2D = r(a+b+c), \\ 2D = r_1(b+c-a), \\ 2D = r_2(a+c-b), \\ 2D = r_3(a+b-c). \end{cases}$$

Wir benennen nun weiter FG mit α, DG mit β, DF mit γ, den Inhalt des Dreiecks DFG mit D und den der Dreiecke BHC, AHC, AHB mit D_1, D_2, D_3; ferner $GX=GY$ mit α_1, $FX=FZ$ mit α_2, $DY=DZ$ mit β_2, die Radien der dem Dreieck DFG ein- und angeschriebenen Kreise mit ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, so dass ϱ_1 zum Mittelpunkt A gehört, die Seiten des Dreiecks XYZ mit s_1, s_2, s_3, die des Dreiecks PTV mit u_1, u_2, u_3, die des dem Dreieck PTV an der Ecke B entsprechenden Dreiecks mit v_1, v_2, v_3, und die dem Dreieck an der Ecke C angehörigen mit w_1, w_2, w_3, endlich den Inhalt der vier letzterwähnten Dreiecke mit Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Bestimmt man zuerst die Dreiecke D_1, D_2, D_3, so ergiebt sich aus (10), (16) und (24):

$$(32)\quad \begin{cases} D_1 = \dfrac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{16D} & \text{oder} \quad 4D.D_1 = a^2.a_1.a_2, \\ D_2 = \dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{16D} & \quad ,, \qquad 4D.D_2 = b^2.b_1.b_2, \\ D_3 = \dfrac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{16D} & \quad ,, \qquad 4D.D_3 = c^2.c_1.c_2. \end{cases}$$

Jetzt suche man α, β, γ zu finden. Es verhält sich:

$$\alpha : a = h_3 - 2l_3 : 2l_2 \quad (\Delta FGH \backsim \Delta CBH).$$

Dabei ist

$$h_3 - 2l_3 = \frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{8cD}$$

und

$$2l_2 = \frac{2b}{8D}(a^2+c^2-b^2),$$

so dass man bekommt:

$$(33)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{2bc}(b^2+c^2-a^2) = \dfrac{ab_2}{c}. \quad \text{Ebenso} \\ \beta = \dfrac{b}{2ac}(a^2+c^2-b^2) = \dfrac{a_2 b}{c}, \\ \gamma = \dfrac{c}{2ab}(a^2+b^2-c^2) = \dfrac{a_1 c}{b}. \end{cases}$$

Die Addition dieser Werthe liefert unter Berücksichtigung von (23) die einfache Beziehung:

$$(34)\quad \alpha+\beta+\gamma = \frac{8D^2}{abc} = \frac{2D}{R}, \text{ wegen } (30).$$

Addirt man die beiden letzten der Gleichungen (23) und subtrahirt die erste davon, so erhält man als Factor von $\dfrac{1}{2abc}$ den Ausdruck:

$$\begin{aligned} & b^2(a^2+c^2-b^2) + c^2(a^2+b^2-c^2) - a^2(b^2+c^2-a^2) \\ & = 16D^2 - 2a^2(b^2+c^2-a^2) \text{ nach } (23) \\ & = (a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2) \text{ nach } (24) \\ & = 16D.D_1 \quad \text{nach } (32). \end{aligned}$$

Daher wird:

$$(35)\quad \begin{cases} \beta+\gamma-\alpha=\dfrac{8D.D_1}{abc}=\dfrac{2D_1}{R} \text{ wegen (30).} \\ \alpha+\gamma-\beta=\dfrac{8D.D_2}{abc}=\dfrac{2D_2}{R}, \\ \alpha+\beta-\gamma=\dfrac{8D.D_3}{abc}=\dfrac{2D_3}{R}. \end{cases}$$

Nun kann man den Formeln (31) entsprechend Beziehungen zwischen D, α, β, γ, ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 aufstellen, welche unter Berücksichtigung von (34) und (35) übergehen in:

$$(36)\quad \begin{cases} \mathrm{D}=\dfrac{4D.D}{abc}.\varrho \text{ oder } \mathrm{D}.R=D.\varrho \text{ wegen (30).} \\ \mathrm{D}=\dfrac{4D.D_1}{abc}.\varrho_1 \text{ ,, } \mathrm{D}.R=D_1.\varrho_1, \\ \mathrm{D}=\dfrac{4D.D_2}{abc}.\varrho_2 \text{ ,, } \mathrm{D}.R=D_2.\varrho_2, \\ \mathrm{D}=\dfrac{4D.D_3}{abc}.\varrho_3 \text{ ,, } \mathrm{D}.R=D_3.\varrho_3. \end{cases}$$

Die mit (30) entsprechende Gleichung heisst $R=\frac{\alpha\beta\gamma}{2\mathrm{D}}$ oder $\mathrm{D}.R=\frac{\alpha\beta\gamma}{2}$, weil $\frac{1}{2}R$ der Radius des um DFG beschriebenen Kreises ist; die Gleichsetzung dieses Werthes mit denen in (36) führt zu folgenden Bestimmungen:

$$(37)\quad \begin{cases} \varrho=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2D}, \\ \varrho_1=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2D_1}, \\ \varrho_2=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2D_2}, \\ \varrho_3=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2D_3}. \end{cases}$$

Aus (33) geht ferner hervor:

$$(38)\quad \alpha\beta\gamma=\frac{1}{8\,abc}(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2).$$

Wir unterwerfen diesen Ausdruck folgender Transformation:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{8abc}\{16D^2(b^2+c^2-a^2) - 2a^2(b^2+c^2-a^2)^2\} \text{ nach (24)}$$
$$= \frac{1}{8abc}\cdot\{16D^2(a^2+b^2+c^2) - 2a^2(16D^2+(b^2+c^2-a^2)^2)\}$$
$$= 2D^2 . \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} - abc \text{ nach (26)},$$

d. h.

$$(39)\quad \alpha\beta\gamma + abc = 2D^2 . \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = D . \frac{a^2+b^2+c^2}{2R} .$$

Den hierdurch bestimmten Werth von $\alpha\beta\gamma$ benutzen wir zur Feststellung der Werthe der Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 vermöge (37); man findet:

$$(40)\quad \begin{cases} \varrho = \frac{D}{abc}(a^2+b^2+c^2) - \frac{abc}{2D} = \frac{a^2+b^2+c^2-8R^2}{4R} \\ \qquad\qquad \text{oder} \quad 4R.\varrho = a^2+b^2+c^2-8R^2, \\ \varrho_1 = \frac{D}{abc}(b^2+c^2-a^2) \quad \text{oder} \quad 4R.\varrho_1 = b^2+c^2-a^2, \\ \varrho_2 = \frac{D}{abc}(a^2+c^2-b^2) \quad \text{,,} \quad 4R.\varrho_2 = a^2+c^2-b^2, \\ \varrho_3 = \frac{D}{abc}(a^2+b^2-c^2) \quad \text{,,} \quad 4R.\varrho_3 = a^2+b^2-c^2 . \end{cases}$$

Die vorstehenden Formeln eignen sich sehr gut zur Entwickelung von Beziehungen zwischen unseren Radien. Wir führen von diesen Relationen folgende an:

$$(40)\quad \begin{cases} \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3 = \varrho+2R, \\ \varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \quad = D^2, \\ 2\varrho\varrho_1\varrho_2 \quad = D(\alpha+\beta-\gamma), \\ 2\varrho\varrho_1\varrho_3 \quad = D(\alpha+\gamma-\beta), \\ 2\varrho\varrho_2\varrho_3 \quad = D(\beta+\gamma-\alpha). \end{cases}$$

Bildet man das Product von α in (33) und der Werthe von ϱ_2, ϱ_3 in (40), so ergiebt sich:

$$\alpha\varrho_2\varrho_3 = \frac{a}{32bc.R^2}(a^2+b^2-c^2)\,(a^2+c^2-b^2)\,(b^2+c^2-a^2)$$
$$= \frac{a^2.\alpha\beta\gamma}{4R^2} \quad \text{wegen (38)},$$

d. h.

$$\frac{\alpha \varrho_2 \varrho_3}{\mathrm{D}} = \frac{a^2}{2R},$$

indem $\frac{\alpha\beta\gamma}{2R} = \mathrm{D}$ ist.

Bildet man aber ferner die Summe der Ausdrücke in (40), so gelangt man zu:

$$(42) \quad \begin{cases} \varrho_2 + \varrho_3 = \frac{\alpha \varrho_2 \varrho_3}{\mathrm{D}} \cdot \quad \text{Ebenso} \\ \varrho_1 + \varrho_3 = \frac{\beta \varrho_1 \varrho_3}{\mathrm{D}}, \\ \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{\gamma \varrho_1 \varrho_2}{\mathrm{D}}. \end{cases}$$

Die Entwickelung von

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha) + (\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$$

zeigt ohne Schwierigkeit, dass es nichts Anderes ist, als $4\beta\gamma$; mit Hülfe hiervon erhält man aus (34) und (35):

$$\beta\gamma = \frac{DD_1 + D_2 D_3}{R^2}.$$

Aus (36) aber findet man vermöge (41):

$$(43) \quad \mathrm{D}^2 . R^4 = DD_1 D_2 D_3 .$$

Auch folgt aus (36):

$$\varrho\varrho_1 = \frac{\mathrm{D}^2 . R^2}{D.D_1} \quad \text{und} \quad \varrho_2\varrho_3 = \frac{\mathrm{D}^2 . R^2}{D_2 D_3},$$

woraus man durch Addition mit Benutzung von (43) ableitet:

$$\varrho\varrho_1 + \varrho_2\varrho_3 = \frac{DD_1 + D_2 D_3}{R^2},$$

d. h. wegen des obenstehenden Werthes:

$$(44) \quad \begin{cases} \varrho\varrho_1 + \varrho_2\varrho_3 = \beta\gamma, \\ \varrho\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 = \alpha\gamma, \\ \varrho\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2 = \alpha\beta. \end{cases}$$

Die Dreiecke an einerlei Ecke, in welche DFG durch die Lothe HX, HY, HZ zerlegt wird, sind congruent; deshalb hat man:

$$\mathrm{D}=2.\Delta GHX+2.\Delta DFH=(\alpha_1+\gamma).\varrho,$$

d. h.

$$(45)\quad\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma),\text{ weil } 2\mathrm{D}=(\alpha+\beta+\gamma).\varrho. \quad \text{Ebenso:}\\[1ex] \alpha_2=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta),\\[1ex] \beta_2=\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha).\end{cases}$$

Die Entfernungen des Mittelpunkts H von D, F, G bezeichnen wir mit $2\mathfrak{r}_1$, $2\mathfrak{r}_2$, $2\mathfrak{r}_3$ und erhalten für sie:

$$(46)\quad 4\mathfrak{r}_1^2=\varrho^2+\beta_2^2,\quad 4\mathfrak{r}_2^2=\varrho^2+\alpha_2^2,\quad 4\mathfrak{r}_3^2=\varrho^2+\alpha_1^2.$$

Da jedoch $\varrho=\frac{2\mathrm{D}}{\alpha+\beta+\gamma}$ ist, so führt dies mittelst (45) zu:

$$4\mathfrak{r}_1^2=\frac{16\mathrm{D}^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2(\beta+\gamma-\alpha)^2}{4(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$

Die beiden Summanden des Zählers in diesem Bruche enthalten, für $16\mathrm{D}^2$ den aus (26) folgenden bekannten Werth

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)$$

genommen, $(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)$ als gemeinschaftlichen Factor, und der andere Factor reducirt sich bald zu $4\beta\gamma$, so dass man bekommt:

$$(47)\quad\begin{cases}4\mathfrak{r}_1^2=\frac{\beta.\gamma.(\beta+\gamma-\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}. \quad \text{Ebenso}\\[1ex] 4\mathfrak{r}_2^2=\frac{\alpha.\gamma.(\alpha+\gamma-\beta)}{\alpha+\beta+\gamma},\\[1ex] 4\mathfrak{r}_3^2=\frac{\alpha.\beta.(\alpha+\beta-\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}.\end{cases}$$

$\beta.\gamma$ wird nach (33) $=a.a_2$, d. h. $=\frac{4DD_1}{a^2}$ wegen (32), und für $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$ ergiebt sich aus (34) und (35) der Werth $\frac{D_1}{D}$, wodurch die letzten Relationen übergehen in:

$$(48)\quad \begin{cases} \mathfrak{r}_1 = \dfrac{D_1}{a}, \\[2ex] \mathfrak{r}_2 = \dfrac{D_2}{b}, \\[2ex] \mathfrak{r}_3 = \dfrac{D_3}{c}, \end{cases}$$

die auch sofort aus der Figur sich ergeben.

Verbindet man den Durchschnittspunkt m von HD und b_1c_1 mit Z, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck HZm ähnlich dem gleichschenkligen Dreieck YZD; m ist nämlich der Mittelpunkt eines Kreises durch D, Y, H, Z, in welchem mH und $mZ = \mathfrak{r}_1$ Radien, und $\angle mHZ$ und $\angle DYZ$ Peripheriewinkel auf demselben Bogen sind. Deshalb verhält sich:

$$\varrho : \mathfrak{r}_1 = s_1 : \beta_2, \text{ so dass } s_1 = \varrho . \frac{\beta_2}{\mathfrak{r}_1}$$

oder

$$(49)\quad s_1 = \frac{4D}{bc} . \varrho \text{ nach (48), (45) und (35).}$$

Diess lässt sich schreiben:

$$s_1 = a . \frac{4D^2}{abc} . \frac{\varrho}{D},$$

und man erhält wegen (36):

$$(50)\quad \begin{cases} s_1 = a . \dfrac{\mathrm{D}}{D} . \text{ Ebenso} \\[2ex] s_2 = b . \dfrac{\mathrm{D}}{D}, \\[2ex] s_3 = c . \dfrac{\mathrm{D}}{D}. \end{cases}$$

Gehen wir jetzt zur Bestimmung von u_1, u_2, u_3 über, so ist klar, dass den vorher benutzten Grössen $2\mathfrak{r}_1$, $2\mathfrak{r}_2$, $2\mathfrak{r}_3$ hier h_1, b_2, c_2 entsprechen, und den Abschnitten β_2, α_2, α_1 hier $DV = \gamma + \alpha_1$, α_1, α_2 analog sind. Danach muss man haben:

$$u_1 = 2 . \frac{\gamma + \alpha_1}{h_1} . \varrho_1, \quad u_2 = 2 . \frac{\alpha_1}{b_2} . \varrho_1, \quad u_3 = 2 . \frac{\alpha_2}{c_2} . \varrho_1;$$

d. h.

$$u_1 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{h_1} \cdot \varrho_1, \quad u_2 = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{b_2} \cdot \varrho_1, \quad u_3 = \frac{\alpha+\gamma-\beta}{c_2} \varrho_1 .$$

Hiernach lassen sich ohne Mühe auch die Formeln entwerfen, welche den Seiten der Dreiecke, die durch die aus B und C möglichen an das Dreieck DFG beschriebenen Kreise bestimmt werden, angehören. Es ist:

$$v_1 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{h_2} \cdot \varrho_2, \quad v_2 = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{a_2} \cdot \varrho_2, \quad v_3 = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{c_1} \cdot \varrho_2;$$

$$w_1 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{h_3} \cdot \varrho_3, \quad w_2 = \frac{\alpha+\gamma-\beta}{a_1} \cdot \varrho_3, \quad w_3 = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{b_1} \cdot \varrho_3 .$$

Der Werth von u_1 lässt sich schreiben:

$$u_1 = \frac{1}{h_1} \cdot (\alpha+\beta+\gamma) \cdot \varrho \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho} .$$

Transformirt man dies mit Hülfe von (10), (31) und (36), so kommt:

$$(51) \quad \begin{cases} u_1 = a \cdot \dfrac{\mathrm{D}}{D_1} . \\ u_2 = b \cdot \dfrac{\mathrm{D}}{D_1} \cdot \dfrac{a^2+c^2-b^2}{4D}, \\ u_3 = c \cdot \dfrac{\mathrm{D}}{D_1} \cdot \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4D} . \end{cases}$$

Auf analoge Weise ergiebt sich:

Ebenso:

$$(52) \quad \begin{cases} v_1 = b \cdot \dfrac{\mathrm{D}}{D_2}, \\ v_2 = a \cdot \dfrac{\mathrm{D}}{D_2} \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4D}, \\ v_3 = c \cdot \dfrac{\mathrm{D}}{D_2} \cdot \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4D}; \end{cases}$$

und

$$(53) \quad \begin{cases} w_1 = c \cdot \dfrac{\mathrm{D}}{D_3} . \\ w_2 = a \cdot \dfrac{\mathrm{D}}{D_3} \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4D}, \\ w_3 = b \cdot \dfrac{\mathrm{D}}{D_3} \cdot \dfrac{a^2+c^2-b^2}{4D} . \end{cases}$$

Die Ausdrücke (50), (51), (52), (53) geben ein leichtes Mittel an die Hand, Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 zu berechnen. Denn es ist

$$\Delta = \frac{s_1 s_2 s_3}{4\varrho} = \frac{abc}{4\varrho} \cdot \frac{\mathrm{D}^3}{D^3}$$

oder

$$\Delta = \frac{\mathrm{D}^2}{D} \cdot \frac{abc}{4D} \cdot \frac{\mathrm{D}}{D} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Weil aber

$$\frac{abc}{4D} = R, \quad \frac{\mathrm{D}}{D} = \frac{\varrho}{R}$$

ist, so hat man:

$$(54) \quad \Delta = \frac{\mathrm{D}^2}{D} \quad \text{oder} \quad \Delta . D = \mathrm{D}^2.$$

Ferner

$$\Delta_1 = \frac{u_1 u_2 u_3}{4\varrho_1} = \frac{abc}{4\varrho_1} \cdot \frac{\mathrm{D}^3}{D_1{}^3} \cdot \frac{(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{16D^2}$$

oder

$$\Delta_1 = \frac{\mathrm{D}^2}{D_1} \cdot \frac{abc}{4D} \cdot \frac{\mathrm{D}}{D_1} \cdot \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{16D} \cdot \frac{1}{D_1 \varrho_1}.$$

Durch (30), (36) und (32) verwandelt sich dies in:

$$(55) \quad \begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{\mathrm{D}^2}{D_1} & \text{oder } \Delta_1 . D_1 = \mathrm{D}^2. \quad \text{Ebenso} \\ \Delta_2 = \dfrac{\mathrm{D}^2}{D_2} & \quad \text{,,} \quad \Delta_2 . D_2 = \mathrm{D}^2, \\ \Delta_3 = \dfrac{\mathrm{D}^2}{D_3} & \quad \text{,,} \quad \Delta_3 . D_3 = \mathrm{D}^2. \end{cases}$$

In den letzten Dreiecksbeziehungen ist folgender Satz enthalten:

Fällt man in einem Dreieck die drei Höhen, so ist das Dreieck, dessen Seiten die drei Verbindungsgeraden der Höhenfusspunkte sind, die mittlere Proportionale zwischen dem ursprünglichen Dreieck und demjenigen, welches entsteht, wenn man die Fusspunkte der vom Höhendurchschnitt auf die Verbin-

dungsgeraden der Höhenfusspunkte gefällten Lothe mit einander verbindet.

VI.

Der Halbirungspunkt der Verbindungsgeraden zwischen dem Höhendurchschnitt und dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

Dieser Punkt ist in unserer Figur der Punkt M und seine Entfernung von der Seite a durch MK dargestellt. Wir bezeichnen diese durch ω_1, so wie seine Entfernungen von den Seiten b und c durch ω_2 und ω_3; seine Entfernungen von den Ecken sind AM, BM, CM, welche wir o_1, o_2, o_3 nennen.

Dann ist

$$\omega_1 = \frac{1}{2} a_1 D = \frac{1}{2}(h_1 - l_1),$$

aber

$$h_1 - l_1 = \frac{16 D^2 - a^2(b^2+c^2-a^2)}{8aD} \quad \text{nach (10) und (16).}$$

Hierdurch findet man, wenn man (23) berücksichtigt:

$$(56) \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{b^2(a^2+c^2-b^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)}{16aD}. \quad \text{Ebenso} \\ \omega_2 = \dfrac{a^2(b^2+c^2-a^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)}{16bD}, \\ \omega_3 = \dfrac{a^2(b^2+c^2-a^2) + b^2(a^2+c^2-b^2)}{16cD}. \end{cases}$$

Weil ferner

$$DK = \frac{1}{2} aD = \frac{1}{2}(aB - BD) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} a - a_2\right),$$

also

$$BK = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} a + a_2\right)$$

ist, so wird:

$$4 o_2^2 = \frac{1}{4} a^2 + a_2^2 + h_1^2 + l_1^2 + a.a_2 - 2h_1.l_1.$$

Hierin ist

$$\frac{1}{4}a^2+l_1{}^2=R^2,\quad a_2{}^2+h_1{}^2=c^2;$$

$$a.a_2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2},\quad 2h_1.l_1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Vermöge dieser Werthe ergiebt sich:

$$(57)\quad \begin{cases} 4o_2{}^2=R^2+a^2+c^2-b^2. \text{ Ebenso} \\ 4o_1{}^2=R^2+b^2+c^2-a^2, \\ 4o_3{}^2=R^2+a^2+b^2-c^2. \end{cases}$$

VII.

Entfernungen des Schwerpunktes, des Höhendurchschnittes und des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises von einander.

Die Entfernung der beiden ersten Punkte, welche sich in unserer Figur als SH darstellt, bezeichnen wir mit E_1, die des Schwerpunktes vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, in der Figur SU, mit E_2, die des letzteren vom Höhendurchschnitt, in der Figur UH, mit E_3. Dann ist:

$$(58)\quad E_1=\frac{2}{3}E_3 \quad\text{und}\quad E_2=\frac{1}{3}E_3.$$

Da im Dreieck BHU die Seite HU halbirt ist in M, so hat man nach einem in No. II. abgeleiteten Satze:

$$BH^2+BU^2=2BM^2+\frac{1}{2}HU^2$$

oder

$$E_3{}^2=8l_2{}^2+2R^2-4o_2{}^2,$$

worin

$$l_2{}^2=R^2-\frac{1}{4}b^2.$$

Folglich wird:

$$(59)\quad E_3{}^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2).$$

Aus (40) ergiebt sich:

$$4R.\varrho = a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2,$$

wodurch (59) übergeht in:

$$(60)\quad E_3{}^2 = R^2 - 4R.\varrho = R(R - 4\varrho),$$

d. h. die Entfernung des Höhendurchschnittes vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist die mittlere Proportionale zwischen dem Radius dieses Kreises und dem Unterschiede des eben erwähnten Radius und des vierfachen Lothes, welches vom Höhendurchschnitt auf eine Verbindungsgerade zweier Höhenfusspunkte gefällt werden kann.

VIII.

Entfernungen der Mittelpunkte der umschriebenen, des ein- und der angeschriebenen Kreise von einander.

Für das Dreieck DFG hat H die Bedeutung des Mittelpunktes des eingeschriebenen und M die des Mittelpunktes vom umschriebenen Kreise, dessen Radius $\frac{1}{2}R$ ist, so dass $HM = \frac{1}{2}E_3$ die Entfernung beider Mittelpunkte von einander darstellt. Nach (60) hat man:

$$4HM^2 = R(R - 4\varrho).$$

In Bezug auf das Dreieck DFG sind ferner AM, BM, CM die Entfernungen der Mittelpunkte der angeschriebenen vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises. Ersetzt man nun in den Ausdrücken (57)

$$b^2 + c^2 - a^2,\quad a^2 + c^2 - b^2,\quad a^2 + b^2 - c^2$$

durch ihre aus (40) folgenden Werthe, indem man zugleich $\frac{abc}{D} = 4R$ nimmt, so ergiebt sich:

$$4o_1{}^2 = R^2 + 4R.\varrho_1 = R(R + 4\varrho_1),$$

$$4o_2{}^2 = R^2 + 4R.\varrho_2 = R(R + 4\varrho_2),$$

$$4o_3{}^2 = R^2 + 4R.\varrho_3 = R(R + 4\varrho_3).$$

Bezeichnet man daher die eben erwähnten vier Entfernungen in Bezug auf das Dreieck ABC, bei welchem der Durchmesser des umschriebenen Kreises $2R$ und die Radien des ein- und der angeschriebenen Kreise r, r_1, r_2, r_3 sind, der Reihe nach mit E, E_1, E_2, E_3, so ist:

$$(61)\quad \begin{cases} E^2 = R(R-2r), \\ E_1{}^2 = R(R+2r_1), \\ E_2{}^2 = R(R+2r_2), \\ E_3{}^2 = R(R+2r_3); \end{cases}$$

d. h. die Entfernung des Mittelpunktes des eingeschriebenen vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist die mittlere Proportionale zwischen dem Radius des umschriebenen und dem Unterschied dieses Radius und des Durchmessers des eingeschriebenen Kreises.

Für die angeschriebenen Kreise gilt derselbe Satz, nur muss man deren Durchmesser negativ nehmen.

Um die Entfernungen der Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise von einander, welche in unserer Figur durch c, b, a dargestellt sind und die wir mit A_1, A_2, A_3 in Bezug auf das Dreieck ABC bezeichnen wollen, zu finden, kommt es nur darauf an, a, b, c durch Stücke des Dreiecks DFG auszudrücken.

Nun folgt aus (40) durch Addition:

$$(62)\quad \begin{cases} c^2 = 2R(\varrho_1+\varrho_2), \\ b^2 = 2R(\varrho_1+\varrho_3), \\ a^2 = 2R(\varrho_2+\varrho_3). \end{cases}$$

Setzen wir aber diese Ausdrücke in solche für das Dreieck ABC um, so erhalten wir:

$$(63)\quad \begin{cases} A_1{}^2 = 4R(r_1+r_2), \\ A_2{}^2 = 4R(r_1+r_3), \\ A_3{}^2 = 4R(r_2+r_3); \end{cases}$$

d. h. die Entfernung zweier Mittelpunkte angeschriebener Kreise von einander ist die mittlere Proportionale zwischen dem doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises und der Summe der Radien der beiden angeschriebenen Kreise.

Die Entfernungen der Mittelpunkte der drei angeschriebenen Kreise vom Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, welche in Bezug auf das Dreieck ABC mit A_1, A_2, A_3 bezeichnet sein mögen, sind beim Dreieck DFG durch $2l_1$, $2l_2$, $2l_3$ repräsentirt. Nun hat man nach (12):

$$4l_1^2 = 4R^2 - a^2 = 4R^2 - 2R(\varrho_2 + \varrho_3) \quad \text{wegen (62)},$$

aber

$$\varrho_2 + \varrho_3 = \varrho + 2R - \varrho_1 \quad \text{wegen (41)},$$

also

$$4l_1^2 = 2R(\varrho_1 - \varrho).$$

Hiernach bekommt man für das Dreieck ABC die Formeln:

$$(64) \quad \begin{cases} A_1^2 = 4R(r_1 - r), \\ A_2^2 = 4R(r_2 - r), \\ A_3^2 = 4R(r_3 - r); \end{cases}$$

d. h. die Entfernung des Mittelpunktes eines angeschriebenen vom Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist die mittlere Proportionale zwischen dem doppelten Durchmesser des umschriebenen und dem Unterschiede der Radien des an- und des eingeschriebenen Kreises.

IX.

Entfernungen des Höhendurchschnitts von den Mittelpunkten des ein- und der angeschriebenen Kreise.

Wir bezeichnen diese Entfernungen in Bezug auf das Dreieck ABC mit F, F_1, F_2, F_3.

Fällen wir im Dreieck DFG von D auf FG das Loth Dd und nehmen Dh gleich dem doppelten Loth $M\alpha_1$ von M auf DG, so ist h der Höhendurchschnitt in DFG, also Hh seine Entfernung vom Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Man hat:

$$Hh^2 = (HX - dh)^2 + (GX - Gd)^2.$$

Hierin ist

$$HX = \varrho, \quad dh = Dd - Dh = \frac{2D}{\alpha} - \frac{2\alpha}{8D}(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)$$

[vergl. (10) und (16)] oder

$$dh = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)}{8\alpha D}$$

[vergl. (24)]; ferner

$$GX = \alpha_1 \quad \text{und} \quad GD = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha},$$

[vergl. (8)].

Entwickelt man nun obigen Ausdruck für Hh^2, so kann man $4\mathfrak{r}_3^2$ für $HX^2 + GX^2$ und $Gh^2 = \frac{\gamma^2}{16D^2}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2$ [vergl. (16)] für $dh^2 + Gd^2$ setzen, und bekommt dann:

$$Hh^2 = 4\mathfrak{r}_3^2 + \frac{\gamma^2}{16D^2}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2$$
$$-\frac{2\varrho(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)}{8\alpha D} - \frac{2\alpha_1(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}{2\alpha}.$$

Aus

$$16D^2 = 4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2$$

folgt:

$$\frac{\gamma^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{16D^2} = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{4D^2} - \gamma^2 = R^2 - \gamma^2,$$

und nach (47) ist:

$$4\mathfrak{r}_3^2 = \alpha\beta - \frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} = \alpha\beta - 2R.\varrho.$$

Die beiden letzten Glieder unseres Ausdrucks führen wegen $\varrho = \frac{2D}{\alpha+\beta+\gamma}$ in ihrer Vereinigung zu:

$$-\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}.\{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2+(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)\} \quad \text{wegen (45)}$$
$$= -\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}.\{2\alpha(\alpha+\beta+\gamma)-2\alpha\gamma\} = -(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2) + \frac{\gamma(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$= \gamma^2-\alpha^2-\beta^2+\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)-2\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$= -\alpha^2-\beta^2+\alpha\gamma+\beta\gamma-2R.\varrho.$$

Durch die Vereinigung der so entwickelten Glieder gelangt man jetzt zu:

$$Hh^2 = R^2-\gamma^2-\alpha^2-\beta^2+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta-4R.\varrho.$$

Die Uebertragung auf das Dreieck ABC liefert daher:

$$(65) \quad F^2 = 4R^2 - 8Rr + ab + ac + bc - (a^2+b^2+c^2).$$

Um diesen Ausdruck noch weiter umzuformen, wollen wir Werthe für $ab+ac+bc$ und $a^2+b^2+c^2$ herzuleiten suchen. Hierzu dienen uns zunächst die Formeln (44), aus welchen wir erhalten:

$$ab+ac+bc=r(r_1+r_2+r_3)+r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3\,,$$

aber

$$r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\frac{1}{2}(r_1+r_2+r_3)^2-\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$$

$$=\frac{1}{2}(r+4R)^2-\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2) \text{ nach (41)}$$

$$=8R^2+4Rr+\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2),$$

und

$$r(r_1+r_2+r_3)=r(r+4R)=r^2+4Rr.$$

Hierdurch resultirt:

$$(66)\quad ab+ac+bc=8R^2+8Rr+\frac{3}{2}r^2-\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2).$$

Bestimmt man weiter aus (31) die Werthe von r_1, r_2, r_3 und addirt, so findet man nach einigen einfachen Reductionen mit Hülfe des bekannten Werthes von $16D^2$ durch die Seiten a, b, c:

$$(67)\quad r(r_1+r_2+r_3)=2(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2).$$

Dies führt in Verbindung mit (66), indem zugleich $r+4R$ für $r_1+r_2+r_3$ gesetzt wird, zu folgender Relation:

$$(68)\quad a^2+b^2+c^2=16R^2-(r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2),$$

d. h. die Summe der Quadrate der Seiten eines Dreiecks und der Radien der ein- und der angeschriebenen Kreise ist dem Quadrat des doppelten Durchmessers vom umschriebenen Kreise gleich.

Hierdurch nimmt (65) folgende Form an:

$$(69)\quad 2F^2=r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2-4(2R^2-r^2).$$

Diesem analog sind die folgenden Bestimmungen gebildet:

$$(70)\quad \begin{cases} 2F_1^2 = r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 4(2R^2 - r_1^2), \\ 2F_2^2 = r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 4(2R^2 - r_2^2), \\ 3F_3^2 = r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 4(2R^2 - r_3^2); \end{cases}$$

d. h. das doppelte Quadrat der Entfernung des Höhendurchschnitts von dem Mittelpunkte des ein- oder eines angeschriebenen Kreises ist dem Unterschiede zwischen der Summe der Quadrate der Radien des ein- und der drei angeschriebenen Kreise und zwischen der vierfachen Differenz des doppelten Quadrates des Radius vom umschriebenen und des Quadrates des Radius vom jedesmaligen ein- oder angeschriebenen Kreise.

Der Werth für $2F_1^2$ hätte auch auf ähnliche Weise, wie der von $2F^2$, durch directe Berechnung gefunden werden können, indem die Entfernung F_1 beim Dreieck DFG durch hA gegeben ist. Zieht man nämlich durch d bis zum Durchschnitt mit PA die Parallele dA' mit hA, so ist:

$$dA'^2 = A'P^2 + Pd^2,$$

aber

$$dA' = hA, \quad A'P = A'A + AP = hd + \varrho_1$$

und

$$Pd = PG - Gd = FX - Gd = \alpha - GX - Gd,$$

folglich

$$hA^2 = (\varrho_1 + dh)^2 + (\alpha - GX - Gd)^2.$$

Die weitere Berechnung dieses Ausdrucks, welche wir hier übergehen, würde genau den obenstehenden Werth für $2F_1^2$ geliefert haben.

X.

Entfernungen des Halbirungspunktes der Verbindungsgeraden zwischen dem Höhendurchschnitt und dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises von den Mittelpunkten des ein- und der angeschriebenen Kreise.

Bezeichnen wir die angedeuteten Entfernungen durch H, H_1, H_2, H_3, so sieht man leicht ein, dass jedes H in einem Dreieck,

dessen Seiten E_3, das dem jedesmaligen H entsprechende E und das zugehörige F sind, die Verbindungsgerade sein muss zwischen der Ecke, in welcher sich E und F schneiden, und dem Halbirungspunkt der Gegenseite E_3. Deshalb findet folgende Relation Statt:

$$(71)\quad 2H^2 = E^2 + F^2 - \frac{1}{2}E_3^2 \text{ [vergl. No. II.]}$$

für jede drei zusammengehörige H, E und F.

Substituirt man hierin die in (61), (65) und (59) enthaltenen Werthe, so wird:

$$(72)\quad 2H^2 = \frac{1}{2}R^2 - 10Rr + ab + ac + bc - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Die Einsetzung des in (68) stehenden Werthes in die Gleichung (59) giebt:

$$(73)\quad E_3^2 = (R^2 + r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - 8R^2,$$

d. h. das Quadrat der Entfernung des Höhendurchschnitts vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist dem Unterschiede zwischen der Summe der Quadrate der Radien des um-, ein- und der angeschriebenen Kreise und dem doppelten Quadrate des Durchmessers vom umschriebenen Kreise gleich.

Die Einführung der Werthe aus (61), (69), (70) und (73) in die Gleichung (71) aber führt nach einigen sehr einfachen Reductionen zu:

$$(74)\quad \begin{cases} 2H = R - 2r, \\ 2H_1 = R + 2r_1, \\ 2H_2 = R + 2r_2, \\ 2H_3 = R + 2r_3; \end{cases}$$

d. h. die doppelte Entfernung des Halbirungspunktes der Verbindungsgeraden zwischen dem Höhendurchschnitt und dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises ist dem Unterschiede zwischen dem Radius des ersteren und dem Durchmesser des letzteren Kreises gleich.

Dasselbe gilt für die angeschriebenen Kreise mit dem einzigen Unterschiede, dass man deren Durchmesser negativ nehmen muss.

XI.

Die durch die Mittelpunkte des um-, ein- und der angeschriebenen Kreise und den Höhendurchschnitt bestimmten Dreiecke.

Um durch die Bezeichnung sofort ausdrücken zu können, welche Punkte die Ecken des jedesmaligen Dreiecks bilden, wollen wir für das Dreieck ABC festsetzen, dass M, M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte des ein- und der drei angeschriebenen Kreise repräsentiren, während U und H die bisherige Bedeutung als Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und als Höhendurchschnitt behalten mögen.

Wir betrachten zuerst folgende Dreiecke:

$$M_1M_2M_3,\quad MM_2M_3,\quad MM_1M_3,\quad MM_1M_2,$$

welchen beim Dreieck DFG der Reihe nach D, D_1, D_2, D_3 entsprechen. Nun ergiebt sich aus (37):

$$2D = \frac{\alpha\beta\gamma}{\varrho_1} = \frac{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{2D};$$

ebenso erhält man:

$$2D_1 = \frac{\alpha\beta\gamma}{\varrho} = \frac{\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma-\alpha)}{2D} \quad \text{u. s. f.}$$

Daher hat man:

$$(75)\quad \begin{cases} M_1M_2M_3 . 8D = 2abc(a+b+c), \\ MM_2M_3 . 8D = 2abc(b+c-a), \\ MM_1M_3 . 8D = 2abc(a+c-b), \\ MM_1M_2 . 8D = 2abc(a+b-c). \end{cases}$$

Demnächst wollen wir bestimmen:

$$MM_1U,\quad MM_2U,\quad MM_3U,$$

welchen beim Dreieck DFG offenbar HAM, HBM und HCM analog sind. Wir berechnen also diese und übertragen die erhaltenen Werthe auf das Dreieck ABC.

Nennt man L den Durchschnitt von AH mit FG und W den von AM mit FG, so ist:

$$HAM = LAP - WAP + WM\alpha_1 + \alpha_1 MHX - LHX$$
$$= LAP - LHX - (WAP - WM\alpha_1) + \alpha_1 MHX.$$

In den ähnlichen Dreiecken LAP und LHX verhält sich:

$$LP : LX = AP : HX,$$

also auch

$$LP + LX : LP - LX = AP + HX : AP - HX,$$

so dass

$$(AP + HX)(LP - LX) = (AP - HX)(LP + LX)$$

ist.

Die Differenz der Dreiecke LAP und LHX lässt sich dadurch, dass man LX auf LP abträgt und durch den Abtragungspunkt mit AP eine Parallele zieht, in ein Trapez verwandeln, dessen Inhalt durch $\frac{1}{2}(AP + HX)(LP - LX)$ dargestellt wird; wegen der eben abgeleiteten Beziehung ergiebt sich daher:

$$LAP - LHX = \frac{1}{2}(AP - HX)(LP + LX) = \frac{1}{2}(AP - HX).PX.$$

In gleicher Weise ist:

$$WAP - WM\alpha_1 = \frac{1}{2}(AP - M\alpha_1).P\alpha_1,$$

und für das Trapez hat man:

$$\alpha_1 MHX = \frac{1}{2}(M\alpha_1 + HX).X\alpha_1.$$

Vermöge dieser Werthe wird:

$$2HAM = (AP - HX).PX - (AP - M\alpha_1).P\alpha_1 + (M\alpha_1 + HX).X\alpha_1.$$

Setzt man hierin für PX seinen Werth $P\alpha_1 + X\alpha_1$, entwickelt und zieht wieder zusammen, so verwandelt sich dies in:

$$2HAM = (M\alpha_1 - HX).P\alpha_1 + (AP + M\alpha_1).X\alpha_1.$$

Dabei ist

$$P\alpha_1 = F\alpha_1 - FP = F\alpha_1 - GX = \frac{\alpha}{2} - \alpha_1,$$

d. h.

$$P\alpha_1 = \frac{1}{2}(\gamma - \beta) \text{ wegen } (45)$$

und

$$X\alpha_1 = G\alpha_1 - GX = \frac{\alpha}{2} - \alpha_1 = \frac{1}{2}(\gamma - \beta).$$

Folglich:

$$4HAM = (\gamma - \beta).\{AP - HX + 2M\alpha_1\}.$$

Ueberträgt man dies auf das Dreieck ABC unter Berücksichtigung der Bedeutungen von AP, HX und $M\alpha_1$, so ist:

$$4\mathrm{MM}_1U = (c-b).\{r_1 - r + 2l_1\}.$$

Aber

$$r_1 - r = \frac{2D}{b+c-a} - \frac{2D}{a+b+c} = \frac{4aD}{(a+b+c)(b+c-a)}$$
$$= \frac{a.16D^2}{4D.(a+b+c)(b+c-a)}$$
$$= \frac{a}{4D}(a+b-c)(a+c-b) = -\frac{a}{4D}(b^2+c^2-a^2) + \frac{2abc}{4D},$$

d. h.

$$r_1 - r = \frac{abc}{2D} - 2l_1 \text{ wegen } (16).$$

Also erhält man:

$$(76)\quad \begin{cases} \mathrm{MM}_1U.8D = abc(c-b). \quad \text{Ebenso:} \\ \mathrm{MM}_2U.8D = abc(c-a), \\ \mathrm{MM}_3U.8D = abc(a-b). \end{cases}$$

Wir gehen nun über zu den Dreiecken:

$$\mathrm{MM}_1H, \quad \mathrm{MM}_2H, \quad \mathrm{MM}_3H,$$

in Bezug auf DFG durch HAh, HBh, HCh repräsentirt. Die Bestimmung von HAh ist der vorigen sehr ähnlich; denn man hat:

$$HAh = EAP - Ehd - (LAP - LHX) + XHhd,$$

wodurch man zu folgendem Werthe gelangt:

$$2HAh = (HX - hd).PX + (AP + HX).dX.$$

Hierbei ist:

$$PX = FX - FP = FX - GX = \alpha_2 - \alpha_1,$$

d. h.

$$PX = \gamma - \beta \quad \text{nach (45)},$$

und

$$dX = GX - Gd = \alpha_1 - Gd = \alpha_1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} \quad \text{[vergl. (8)]},$$

d. h.

$$dX = \frac{(\gamma - \beta) . (\beta + \gamma - \alpha)}{2\alpha}.$$

Substituirt man diese Werthe und geht zum Dreieck ABC über, so wird:

$$4\mathrm{MM}_1 H = (c-b) . \{ 2r - 2(h_1 - 2l_1) + \frac{b+c-a}{a}(r_1 + r) \}$$

$$= (c-b) . \{ r + \frac{b+c}{a} . r + \frac{b+c}{a} . r_1 - r_1 - 2h_1 + 4l_1 \}.$$

Aber

$$r + \frac{b+c}{a} . r = r . \frac{a+b+c}{a} = \frac{2D}{a} = h_1$$

und

$$\frac{b+c}{a} r_1 - r_1 = r_1 . \frac{b+c-a}{a} = \frac{2D}{a} = h_1,$$

$$4l_1 = \frac{a}{2D}(b^2 + c^2 - a^2).$$

Folglich erhält man:

$$(77) \quad \begin{cases} \mathrm{MM}_1 H . 8D = a(c-b)(b^2 + c^2 - a^2). & \text{Ebenso:} \\ \mathrm{MM}_2 H . 8D = b(c-a)(a^2 + c^2 - b^2), \\ \mathrm{MM}_3 H . 8D = c(a-b)(a^2 + b^2 - c^2). \end{cases}$$

Die vierte Gruppe von Dreiecken:

$$\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 U, \quad \mathrm{M}_1\mathrm{M}_3 U, \quad \mathrm{M}_2\mathrm{M}_3 U$$

bestimmt sich leicht aus (75) und (76) durch Addition und Subtraction; denn für das mit $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 U$ correspondirende Dreieck ABM hat man:

$$ABM = HAB - (HAM + HBM).$$

Dadurch bekommt man:

$$(78) \quad M_1M_2U.8D = abc.\{4(a+b-c) - (a+b)\}$$

oder:

$$(79) \quad \begin{cases} (2M_1M_2M - M_1M_2U).8D = abc.(a+b). \quad \text{Ebenso:} \\ (2M_1M_3M - M_1M_3U).8D = abc.(a+c), \\ (2M_2M_3M - M_2M_3U).8D = abc.(b+c). \end{cases}$$

Aehnlich verhält es sich mit folgenden Dreiecken:

$$M_1M_2H, \quad M_1M_3H, \quad M_2M_3H.$$

Denn es ist ja:

$$ABh = ABH + AHh + BHh$$

und ABh hat in Bezug auf DFG dieselbe Bedeutung, wie M_1M_2H bei ABC. Deshalb ergiebt sich nach (75) und (77):

$$(80) \quad M_1M_2H.8D = 4abc.(a+b-c) - c(a+b)(a^2+b^2-c^2)$$

oder:

$$(81) \quad \begin{cases} (2M_1M_2M - M_1M_2H).8D = c.(a+b)(a^2+b^2-c^2), \\ (2M_1M_3M - M_1M_3H).8D = b.(a+c)(a^2+c^2-b^2), \\ (2M_2M_3M - M_2M_3H).8D = a.(b+c)(b^2+c^2-a^2). \end{cases}$$

Jetzt bleiben der Betrachtung noch vier Dreiecke übrig, von deren Bildung ausser dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und dem Höhendurchschnitt je einer von den Mittelpunkten des ein- und der angeschriebenen Kreise Theil nimmt. Dies sind folgende:

$$MHU, \quad M_1HU, \quad M_2HU, \quad M_3HU,$$

welchen beim Dreieck DFG entsprechen:

$$HhM, \quad AhM, \quad BhM, \quad ChM.$$

Das erste von diesen müssen wir direct berechnen und zwar in ähnlicher Weise, wie oben zur Herleitung von (76) und (77) angewandt wurde. Es ist:

$$Hhm = HM\alpha_1X + HhdX - Mhd\alpha_1,$$

also

$$2HhM = (M\alpha_1 + HX).\alpha_1 X + (hd + HX).dX - (M\alpha_1 + hd).d\alpha_1$$
$$= (HX - hd).\alpha_1 X + HX - M\alpha_1).dX,$$

weil $d\alpha_1 = \alpha_1 X + dX$ ist. Aber

$$\alpha_1 X = \frac{1}{2}(\gamma - \beta), \qquad dX = \frac{(\gamma-\beta).(\beta+\gamma-\alpha)}{2\alpha};$$

mithin:

$$4MHU = (c-b).\{r - (h_1 - 2l_1) + \frac{b+c-a}{a}.(r-l_1)\}.$$

Hierbei hat man:

$$\frac{b+c-a}{a}.r = r.\frac{a+b+c}{a} - 2r = \frac{2D}{a} - 2.\frac{2D}{a+b+c} \text{ und } \frac{2D}{a} = h_1,$$

so dass:

$$4MHU = (c-b).\{2l_1 - \frac{2D}{a+b+c} - \frac{b+c-a}{a}.l_1\}.$$

Ferner:

$$\frac{2D}{a+b+c} = \frac{16D^2}{8D(a+b+c)} = \frac{b+c-a}{8D}(a^2-b^2+2bc-c^2)$$

und

$$\frac{b+c-a}{a}.l_1 = \frac{b+c-a}{8D}(b^2+c^2-a^2).$$

Durch die Vereinigung der beiden so eben berechneten Glieder gelangt man zu folgendem Werthe:

$$\frac{b+c-a}{4D}.bc = \frac{a+b+c}{4D}.bc - \frac{abc}{2D}.$$

Endlich ist:

$$2l_1 = \frac{a}{4D}(b^2+c^2-a^2) = \frac{a}{4D}(a+b+c)(b+c-a) - \frac{abc}{2D}.$$

Will man hieraus den Werth der Parenthese in obigem Ausdruck für MHU finden, so sieht man bald, dass sich als gemeinschaftlicher Factor herausziehen lässt:

$$\frac{a+b+c}{4D}$$

und der andere Factor wird:

$$a(b+c-a)-bc=(a-b)(c-a).$$

Demzufolge erhält man die merkwürdige Relation:

$$MHU.8D=\frac{1}{2}(a+b+c)(a-b)(c-a)(c-b).$$

Jetzt fällt es nicht schwer, auch die noch übrigen Dreiecke zu bestimmen; denn man hat:

$$AhM=HAM+HAh-HhM$$

und ähnliche Beziehungen gelten auch für BhM und ChM, so dass man dadurch folgende Zusammenstellung bekommt:

$$(82)\quad\begin{cases} M\,HU.8D=\frac{1}{2}(a+b+c)(a-b)(c-a)(c-b), \\ M_1HU.8D=\frac{1}{2}(b+c-a)(a+b)(a+c)(c-b), \\ M_2HU.8D=\frac{1}{2}(a+c-b)(a+b)(c-a)(b+c), \\ M_3HU.8D=\frac{1}{2}(a+b-c)(a-b)(a+c)(b+c). \end{cases}$$

Um die so berechneten Relationen für die Dreiecke auch durch die Radien auszudrücken, wollen wir noch Werthe für a^2, b^2, c^2 ableiten. Es ist:

$$r_1-r=\frac{2D}{b+c-a}-\frac{2D}{a+b+c}=\frac{16D^2}{4D}\cdot\frac{a}{(a+b+c)(b+c-a)}$$

$$=\frac{a}{4D}(a+c-b)(a+b-c)=\frac{a}{4D}\cdot\frac{2D}{r_2}\cdot\frac{2D}{r_3},$$

d. h.

$$(83)\quad r_1-r=\frac{a.D}{r_2r_3}.$$

Nun hat man aber nach (42):

$$r_2+r_3=\frac{ar_2r_3}{D},$$

und es wird folglich:

$$(84)\quad \begin{cases} a^2=(r_1-r)(r_2+r_3)=r_1r_2+r_1r_3-rr_2-rr_3. \quad \text{Ebenso:} \\ b^2=(r_2-r)(r_1+r_3)=r_1r_2+r_2r_3-rr_1-rr_3, \\ c^2=(r_3-r)(r_1+r_2)=r_1r_3+r_2r_3-rr_1-rr_2. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich weiter:

$$(85)\quad \begin{cases} a^2+b^2-c^2=2(r_1r_2-rr_3), \\ a^2+c^2-b^2=2(r_1r_3-rr_2), \\ b^2+c^2-a^2=2(r_2r_3-rr_1). \end{cases}$$

Die Werthe von $a+b$, $a-b$ u. s. w. erhält man leicht aus (44) durch Addition und Subtraction, z. B.

$$a+b=\frac{(r_1+r_2)(r+r_3)}{c},\quad a-b=\frac{(r_1-r_2)(r_3-r)}{c}.$$

Indem wir die überaus leichte Transformation speciell auszuführen für überflüssig halten, stellen wir die Dreiecksbeziehungen in der Weise sofort zusammen, dass wir von jeder Gruppe von Relationen nur eine anführen, da es ja nicht schwer fällt, die analogen darnach zu bilden. Dann hat man:

$$86)\quad \begin{cases} D^2=rr_1r_2r_3, \\ \mathrm{M_1M_2M_3}\,.\,D=2Rr_1r_2r_3, \\ \mathrm{MM_1}\,U\,.\,8D=(r_1-r)(r_3-r_2)(r_2r_3+rr_1), \\ \mathrm{MM_1}\,H\,.\,4D=(r_1-r)(r_3-r_2)(r_2r_3-rr_1), \\ (2\mathrm{M_1M_2M}-\mathrm{M_1M_2}\,U).8D=(r+r_3)(r_1+r_2)(rr_3+r_1r_2), \\ (2\mathrm{M_1M_2M}-\mathrm{M_1M_2}\,H).8D=(r+r_3)(r_1+r_2)(r_1r_2-rr_3), \\ \mathrm{M}HU.32D=\frac{1}{R.r}(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_2-r_3)(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r), \\ \mathrm{M_1}HU.32D=\frac{1}{R.r_1}(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_3-r_2)(r_1-r)(r_2+r)(r_3+r). \end{cases}$$

Nachschrift des Herausgebers.

Der Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes schreibt mir bei Uebersendung desselben, dass er bei dieser Arbeit zwar in einigen Punkten mit Herrn Möllmann in dem Aufsatze Theil XVII. Nr. XVI. zusammengetroffen sei, dass er aber glaube seiner Arbeit hinreichende Eigenthümlichkeit beimessen zu dürfen, so dass dieselbe sehr wohl neben jenem Aufsatze bestehen könne. Auch ich glaube, dass auch diese Abhandlung des Herrn Lehrer Hellwig wohl geeignet ist, das Interesse der Leser in Anspruch zu nehmen, und habe ihr daher einen Platz im Archive eingeräumt.

IV.

Kurzer Beweis des Gesetzes, nach welchem die Schwingungsebene eines Pendels sich bei dem Foucault'schen Versuche in Folge der Erdrotation um die Vertikale des Aufhängepunkts dreht.

Von

Herrn T. J. Eschweiler,

Director der Realschule zu Cöln a. R.

Zur Ableitung dieses Gesetzes bedarf es nur der Betrachtung desjenigen sphärischen Dreiecks, welches von drei Bogen gebil-

det wird, die den Himmelspol P, das Zenith Z und den von der Schwingungsebene des Pendels getroffenen Punkt A des Horizonts mit einander verbinden. Dieses Dreieck ist während der Pendelbewegung ein veränderliches. Denn indem der Pol P stets und, während eines Zeitelements ∂t, auch der Punkt A in Folge des Strebens der Pendelmasse, in ihrer Richtung zu beharren, ihre Lage behalten, beschreibt das Zenith Z vermöge der Rotation der Erde um ihre Achse einen kleinen Kreis um P, wodurch die Winkel bei P und Z sich beide stetig ändern. Es kommt nur darauf an, die Abhängigkeit dieser Winkel, deren erster sich der Zeit proportional ändert, der letzte aber das Azimuth der Schwingungsebene zu 180° ergänzt, zu ermitteln. Zu dem Ende nehme ich an, im Anfang der Bewegung sei die Schwingungsebene im Meridian, ihr Azimuth also $=0$, nach Verlauf der Zeit t sei dieses Azimuth $=d$ und die Erde habe sich in dieser Zeit um den Winkel φ gedreht; in dem darauf folgenden Zeitelement ∂t betrage diese Drehung $\partial\varphi$, eben so viel also auch die Aenderung des Winkels P, die gleichzeitige Aenderung des Azimuths sei ∂d. Da nun (Taf. II. Fig. 3.) zwischen den beiden Winkeln Z und P und den beiden Seiten AP und PZ (deren letzte das Complement der Polhöhe oder geographischen Breite l ist) die bekannte Relation

$$\cos ZP.\cos P = \sin ZP.\operatorname{cotg} PA - \sin P.\operatorname{cotg} Z$$

besteht und $Z=180^\circ-d$, $ZP=90^\circ-l$ ist, so hat man:

$$\sin l \cos P = \cos l \operatorname{cotg} PA + \sin P \operatorname{cotg} d.$$

Aendert sich nun durch die Rotation des Erdkörpers während der Zeit ∂t P in $P-\partial\varphi$, d gleichzeitig in $d-\partial d$, während l und die Seite PA unverändert bleiben, und differenzirt man demgemäss die vorige Gleichung, so erhält man die folgende:

$$\sin l \sin P \partial\varphi = \frac{\sin P \partial d}{\sin d^2} - \cos P \operatorname{cotg} d \partial\varphi$$

oder

$$\partial d = \sin l \sin d^2 \partial\varphi + \operatorname{cotg} P \sin d \cos d \partial\varphi.$$

Es ist aber, da AZ ein Quadrant ist:

$$\operatorname{cotg} P = \frac{\sin l}{\operatorname{tg} d},$$

daher

$$\partial d = \sin l \sin d^2 \partial\varphi + \sin l \cos d^2 \partial\varphi,$$

d. i.

$$\partial d = \sin l \partial\varphi.$$

Integrirt giebt dies:

$$d = \varphi . \sin l,$$

ohne Constante, da vorausgesetzt wurde, dass im Anfange der Zeit t sowohl d als $\varphi = 0$ seien.

Dies Resultat spricht das von Foucault entdeckte Gesetz aus, dass nämlich die Geschwindigkeit, womit die Schwingungsebene des Pendels sich um die Vertikale dreht, sich zu derjenigen, womit die Erde um ihre Achse läuft, eben so verhält, wie der Sinus der geographischen Breite des Ortes, wo das Pendel schwingt, zu 1.

V.

Versuche über die elektrische Induction.

Von

Herrn Director K. W. Knochenhauer

zu Meiningen.

Erste Abhandlung.

Als Einleitung zu den Versuchen über die elektrischen Inductionen, welche bei Anwendung der Nebenbatterie hervortreten, wurde von mir im Sommer 1850 eine Reihe von Beobachtungen angestellt, um daraus ein allgemein gültiges Gesetz über die Ab-

nahme der elektrischen Induction mit der Entfernung herzuleiten. Die Reihe zerfiel in zwei Abtheilungen. In der ersten waren zwei ebene zinnerne Scheiben *AB* und *CD* (Taf. IV. Fig. 1.) von $1\frac{1}{10}$ Linie Dicke und 18 Zoll $8\frac{3}{4}$ Linien (par. M.) Durchmesser, an den Rändern mit 4 Linien breiten, nach hinten hervortretenden abgerundeten Holzringen versehen, auf zwei massive gläserne Säulen *E* und *F* von 18 Zoll Höhe und 1 Zoll Durchmesser mittelst starker an die Scheiben gelötheter Hülsen gekittet. Von diesen Säulen stand die eine *F* auf dem eisernen Gestell *K*, die andere auf dem Schlitten *J*, der durch die Schraube *L* bewegt wurde; die bis auf 5 Zoll gehende Entfernung der zu einander parallelen Scheiben wurde auf einem nach par. Linien eingetheilten Massstabe abgelesen. Ein 63 Zoll langer, 1 Linie starker Messingdraht, der in seiner Mitte mit der als Gelenk dienenden durchschnittenen und an einem Seidenfaden hängenden Kugel *M* versehen war, führte von der Klemmschraube *G* zum Conductor *N* der Elektrisirmaschine; ein anderer 28 Zoll langer Kupferdraht (0,513 Linie Durchmesser) ging ebenfalls von *G* zur ersten Kugel *O* des Funkenmessers *Q*, von dem die zweite Kugel *P* durch einen Draht mit dem Erdboden *V* in leitender Verbindung stand. Mit der zweiten Scheibe *CD* war durch die Klemmschraube *H* der 4′ lange Kupferdraht *HR* verbunden, der zur ersten Kugel *R* eines zweiten Funkenmessers reichte; die andere Kugel *S* hatte eine Ableitung zum Erdboden *V*. Nachdem die Kugeln *R* und *S* in eine beliebige Distanz von einander fest eingestellt waren, wurden die Scheiben *AB* und *CD* dicht an einander geschraubt, durch einige dazwischen gelegte Stanniolblätter gut metallisch verbunden und der Funkenmesser *Q* so eingestellt, dass beim Drehen der Maschine die Funken mit gleicher Leichtigkeit sowohl über *R* und *S* als über *O* und *P* sprangen. Dies gab die Intensität *J* der Elektricität, welche zum Durchbrechen der Luftschicht zwischen *R* und *S* erforderlich war*). Hierauf wurden die Scheiben nach und nach weiter aus einander geschraubt und bei etwas schnell angehendem, augenblicklichem Drehen der Maschine diejenige Distanz zwischen *O* und *P* oder diejenige Intensität *i* gesucht, bei welcher eben nur ein kleiner Funke zwischen *R* und *S* erschien. — Die richtige Stellung zwischen *O* und *P* liess sich bis auf $\frac{1}{50}$ Linie genau angeben; denn waren *O* und *P* zu nahe an einander, so zeigte sich zwischen *R* und *S* kein Funke, während die Elektricität kräftig über *O* und *P* ging; standen umgekehrt die letztern Kugeln zu weit von einander, so erschienen mehrere Funken zwischen *R* und *S*, die Scheiben luden sich wie eine Flasche und entluden sich hinterher durch einen stärkeren Funken über *O* und *P*. — Die vorstehende Weise des Experimentirens wurde aus dem Grunde gewählt, weil sie allein

*) Die Intensität werde ich nach meinen frühern bereits in Pogg. Ann. mitgetheilten Versuchen stets so angeben, dass ich auf jede halbe Linie Distanz zwischen *O* und *P* 10 ansetze, für die erste halbe Linie jedoch 13,25. Man leitet also umgekehrt aus der angegebenen Intensität die wirklich gemessene Distanz von *O* und *P* in par. Linien her, wenn man von der Zahl 3,25 subtrahirt und den Rest mit 20 dividirt.

die Stärke der Induction mit einer genügenden Sicherheit zu messen gestattet; denn theilt man, wie es gewöhnlich geschieht, der ersten Scheibe *AB* ein bestimmtes Mass von Elektricität mit, so weiss man, dass diese Elektricität mit der ganzen Umgebung in Wechselwirkung tritt; die zweite Scheibe *CD* löst sie hieraus mehr oder weniger, je näher oder je weiter sie von *AB* entfernt ist; der auf *CD* wirkende Theil der Elektricität ist somit variabel, während ihn die spätere Berechnung der Beobachtungen als constant voraussetzen muss. Steht dagegen *AB* mit dem Conductor in Verbindung, so giebt derselbe zugleich die Elektricität her, welche durch die Wechselwirkung mit der Umgebung gehalten wird, und theilt der Scheibe *AB* zu ihrer Einwirkung auf *CD* genau diejenige Intensität mit, welche der Funkenmesser *Q* anzeigt.

Ebenso wenig durfte ich aber auch auf *CD* Elektricität sich binden lassen, einestheils weil die Bestimmung der Quantität derselben auf der grösseren Scheibe nur sehr annähernd hätte geschehen können, während jetzt mein Apparat durch den ersten schwachen über *RS* springenden Funken die immer gleich starke Induction auf *CD* und aus der Distanz zwischen *O* und *P* die dazu erforderliche Intensität der Elektricität auf *AB* mit grosser Schärfe angab, anderntheils weil bei der Rückwirkung von *CD* auf *AB* die Stärke der Induction kaum mit völliger Evidenz aus den Beobachtungen herzuleiten gewesen sein würde. Waren meine Voraussetzungen richtig, so mussten sich bei constanter Entfernung zwischen *R* und *S* die Angaben des Funkenmessers *Q* nicht ändern, wenn die verschiedenen Verbindungsdrähte *NG*, *GO*, *PV*, *HR* und *SV* geändert wurden. Es wurden also bei demselben Stande von *RS* fünf Beobachtungsreihen angestellt; in der ersten enthielt der Apparat die oben angegebenen Drähte, in der zweiten wurde eine Wasserröhre hinter *P* vor dem zum Erdboden leitenden Drahte eingeschaltet, in der dritten war der Draht *HR* durch 8′ feinen Neusilberdraht ersetzt, in der vierten waren diese 8′ Neusilberdraht zwischen *N* und *M* eingeschaltet, in der letzten endlich ersetzten dieselben 8′ den Draht *GO*. Die Resultate, welche die fünf Reihen lieferten, wichen so wenig von einander ab, dass die Angabe der aus allen gezogenen Mittelwerthe genügt.

Distanz zwischen *AB* und *CD*	*i* auf *AB* beob.	*i* auf *AB* ber.	*m* ber.
0	18,95	18,95	1,000
2‴	20,23	20,21	0,938
3	20,74	20,71	0,915
4	21,35	21,22	0,893
6	22,43	22,23	0,852
9	23,99	23,75	0,798
12	25,59	25,27	0,750
18	28,91	28,30	0,670
24	31,89	31,33	0,605
36	37,81	37,39	0,507
48	43,73	43,45	0,436
60	49,53	49,53	0,383

Diese Betrachtungen zeigen sogleich, dass die Intensität i auf AB, welche eine gleich starke inducirende Wirkung auf CD ausübt, mit der Entfernung beider Scheiben von einander regelmässig steigt und dass nur die Zunahme von 0 Distanz (der Berührung der Scheiben) bis 2‴ etwas stärker ausfällt, etwa so wie sie $2^1/_2$‴ Distanz erfordern würde. Es steht somit der Inductionscoefficient m unter der Formel: $m=\frac{a}{b+x}$, worin $a=b-0{,}5$ ist und x die Distanz der Scheiben in par. Linien angiebt. Berühren sich beide Scheiben, so ist $a=b$ zu setzen, wodurch der Fall der metallischen Berührung von dem fingirten Falle, dass beide Scheiben bei der Berührung noch durch eine nicht leitende Schicht ohne Dicke getrennt wären, in etwas unterschieden bleibt. Man berechnet hiernach i aus der Formel: $i=\frac{b+x}{a}.J$, worin J nach dem Obigen die bei der Berührung vorhandene oder die zur Schlagweite über RS erforderliche Intensität bezeichnet. Die erste und letzte Beobachtung gaben $b=38{,}0$ also $a=37{,}5$.

Eine zweite Beobachtungsreihe, in der die Kugeln R und S einander etwas näher standen, lieferte als Mittel aus zwei Versuchen, in denen der Draht HR einmal aus 4′ Kupfer, dann aus 8′ Neusilber bestand, folgende Angaben:

Distanz zwischen AB und CD	i auf AB	
	beob.	ber.
0	14,25	14,25
2'''	15,25	15,20
3	15,58	15,58
4	16,12	15,96
6	17,00	16,71
9	17,98	17,85
12	19,16	18,99
18	21,40	21,25
24	23,67	23,52
36	28,15	28,06
48	32,75	32,60
60	37,12	37,12

Zur Berechnung wurde aus den beiden äussersten Beobachtungen $b=38{,}2$ also $a=37{,}7$ gesetzt. Noch wurden bei verschiedenem Stande von R und S nur die erste und letzte Beobachtung bei 0 und 48''' Distanz der Scheiben gemacht, um die Werthe von b zu controliren.

Distanz	i beob.	b ber.
0	12,48	38,7
48'''	28,12	
0	16,06	38,3
48'''	36,37	
0	17,91	37,8
48'''	40,87	
0	21,69	37,7
48'''	49,62	
0	25,50	37,6
48'''	58,37	
0	28,94	37,0
48'''	66,87	

Obschon b nahe constant bleibt, dass man die kleinen Differenzen übersehen könnte, so scheint es doch beachtenswerth, dass die Werthe mit wachsendem Abstande zwischen R und S, also mit zunehmender Intensität der inducirenden Elektricität, regelmässig kleiner ausfielen; viel deutlicher wird ein ähnliches Verhältniss bei den Versuchen mit der Nebenbatterie vorkommen. — Da zu sichern Messungen ein etwas schnell beginnendes Drehen der Maschine erforderlich war, so wurde versucht, wie weit das plötzliche Anströmen der Elektricität aus einer sich entladenden Flasche zweckmässig wäre; es wurde demnach eine Flasche geladen und durch den vor MG eingeschalteten Funkenmesser die Entladung auf AB vermittelt; der Funkenmesser erhielt nach und nach diejenige Einstellung, welche einen einzigen schwachen Funken über RS zur Folge hatte. Die Resultate blieben dieselben, wie bei der frühern Anordnung des Apparats, nur war bei Einstellung des Funkenmessers nicht eine gleiche Schärfe zu erzielen; der Andrang der Elektricität auf AB war schon zu gewaltsam. — Zur Vergleichung mit diesen Versuchen ziehe ich die von mir vor längerer Zeit in Pogg. Ann. B. 58. p. 214. bekannt gemachten herbei, wo die auf einer kleinen Kugel gebundene Elektricität mit der Torsionswage gemessen worden war. Gestatteten diese Versuche zwar nicht den Werth von a zu bestimmen und waren sie insoweit fehlerhaft, als auf die Rückwirkung der inducirten Kugel auf die inducirende keine Rücksicht genommen werden konnte, so war doch eben diese Rückwirkung, wie direkte Versuche schon damals zeigten, so gering, dass sie höchstens bei der kleinsten Distanz von $3'''$ etwas störte. Die Versuche lehren zum wenigsten, dass bei kleinen Scheiben (hier Kugeln) der Werth von b geringer wird. Ich stellte meine Versuche damals unter die empirische Formel: $m = Ab^{\sqrt{x}}$ (über die Bedeutung der Bezeichnungen s. citirt. Abh.), welche dieselben bis $x = 16\text{d} = 48'''$ recht gut darstellte. Nimmt man also die damaligen Beobachtungen als durch diese Formel gegeben an, in der A unbekannt blieb, so berechnen sie sich jetzt nach der neuen Formel:

$$m = \frac{17{,}1\,A}{21{,}9 + x}$$

auf folgende Weise:

Distanz	*m* beob.	*m* ber.
3‴	0,707 *A*	0,687 *A*
6	0,613 „	0,613 „
9	0,549 „	0,553 „
12	0,500 „	0,504 „
18	0,428 „	0,429 „
24	0,376 „	0,373 „
27	0,354 „	0,350 „
36	0,301 „	0,295 „
48	0,250 „	0,245 „

Auch hier zeigt sich die Gültigkeit der aus den neuen Beobachtungen klar entspringenden Formel, da die Abweichung bei 3‴ Distanz sich aus dem schon angegebenen Grunde hinreichend erklärt.

In der zweiten Abtheilung der Versuche kam unter Hinzuziehung der Nebenbatterie folgender Apparat in Anwendung. Ueber die beiden horizontalen 1 Zoll starken Glasstäbe *AB* und *CD* (Taf. IV. Fig. 2.), die in einer gegenseitigen Entfernung von 2′ durch einen hölzernen Rahmen getragen wurden, waren mittelst Schrauben und seidener Schnüre die beiden 8′ langen Kupferdrähte *NACP* und *OBDQ* (0,513 Linien Durchm.) gegen die Holzleisten *EF* und *GH* ausgespannt und trugen an ihren Enden kleine Quecksilbernäpfchen; die Stäbe *AB* und *CD* und ausserdem die Glasröhren *JK* und *LM* waren eingetheilt, um die Distanz der Drähte von einander zu messen; beide Drähte konnten in dem Rahmen nur auf 6 Zoll von einander entfernt werden. Der erste Draht *NP* schloss die Hauptbatterie *U*, die nicht isolirt aufgestellt vom Conductor der Maschine aus geladen wurde, und aus den beiden Flaschen 1 und 2 bestand; die Schliessungsdrähte waren von *U* ab 1½′ *K* (Kupferdraht von 0,513L. Durchm.), der Funkenmesser *S* und 2′ *K* bis *N*; auf der anderen Seite von *P* bis *a* 3″ *K*., von *a* bis *b* 16,8 Zoll Platindraht (0,081 Linien Durchm.) und von *b* bis *V* 4′ 11″ *K*. Der gesammte Schliessungsdraht der Hauptbatterie betrug demnach, wenn man für den Draht in den Flaschen, für den Funkenmesser und für den Platindraht ihre annähernd richtigen äquivalenten Werthe 0,5—0,7—2 Fuss substituirt, im Ganzen 19′,9 *K*. Der zweite gespannte Draht *OQ* schloss die aus den Flaschen 3 und 4 gebildete Nebenbatterie *X*, die auf gläsernen Stühlen gut isolirt aufgestellt war; es bestand *OX* aus 2′ *K*., *QZ* aus *Qc* = 8½″ *K*., *cd* = 16″,8 Platindraht (0,081 Linien Durchm.) und *dZ* = 1′ *K*.; die Gesammtlänge des

Schliessungsdrahtes betrug also in äquivalenter Länge 14'.2*K*. Nach den von mir früher angestellten Versuchen (Jahresber. der Wiener Akademie. 1849), in denen die Nebenbatterie mit dem Drahte *NP* der Hauptbatterie unmittelbar verbunden gewesen war, konnte ich ähnlich, wie man aus der Stromtheilung auf dem Schliessungsdraht einer Batterie auf die beim sogenannten Nebenstrom vorkommenden Erscheinungen schliessen kann, auch hier, wenn die Erwärmungen *H* und *N* in den Schliessungsdrähten der Haupt- und der Nebenbatterie mittelst eines statt *ab* und *cd* eingeschalteten Luftthermometers, das einen gleich langen ausgestreckten Platindraht enthielt, gemessen wurden, die zu erwartenden Thatsachen vorher annäherungsweise angeben und wusste die Berechnungsweise, wie man aus den Erwärmungen zu den Stromstärken gelangt. Zunächst durfte ich erwarten, dass wenigstens für geringe Entfernungen der gespannten Drähte von einander die Erwärmung in dem Drahte der Nebenbatterie bei zwei gleichen Batterieen ihr Maximum erreichen würde, wenn die beiden Schliessungsdrähte von gleicher Länge wären, dass dagegen bei ungleichen Batterieen das Maximum erfolgen würde, wenn sich die Längen der Schliessungsdrähte umgekehrt wie die Zahl der gleichen Flaschen in beiden Batterieen verhielten. Dann konnte ich vorher wissen, dass unter sonst gleichen Verhältnissen eine *n* fache Flaschenzahl in der Nebenbatterie gegen die einfache in der Hauptbatterie die Erwärmung *N* um das *n* fache steigern würde, und dass umgekehrt *N* um das *n* fache sinken würde, wenn die Zahl der Flaschen in der Hauptbatterie *n* mal grösser ist als die Zahl der Flaschen in der Nebenbatterie. Ferner wusste ich, dass man bei gleicher Flaschenzahl in beiden Batterieen auf das Verhältniss der Stromstärken in beiden Schliessungsdrähten gelangt, wenn man aus dem Verhältniss der Erwärmungen $\frac{N}{H}$ die Quadratwurzel zieht, dagegen bei ungleicher im Verhältniss von $1:n$ stehender Flaschenzahl in der Haupt- und der Nebenbatterie das Verhältniss des *n* mal gedrängtern Nebenstroms zum Hauptstrom aus $\sqrt{\frac{N}{nH}}$ erhält. Endlich konnte ich noch vorher erwarten, dass wie viele Wärme die Hauptbatterie bei entfernter Nebenbatterie auf ihrem Schliessungsdraht entwickelt, sie genau ebenso viele bei thätiger Nebenbatterie in beiden Schliessungsdrähten zusammen erzeugen würde, natürlich unter der Voraussetzung einer gleich starken Ladung der Hauptbatterie in beiden Fällen. Es kam nun zunächst darauf an, durch besondere Versuche zu ermitteln, ob unabhängig von der Entfernung der beiden gespannten Drähte von einander das Maximum der Erwärmung im Schliessungsdraht der Nebenbatterie bei derselben Länge eintritt und dann, wenn dies der Fall wäre, in welchem Masse der inducirte Strom der Nebenbatterie mit der Distanz der gespannten Drähte abnimmt. Zur Ermittlung des ersten Punktes wurden drei Reihen ausgeführt; zuerst waren die Drähte *OX* und *QZ* unmittelbar mit *N* und *P* verbunden, nachdem der Draht *OQ* fortgenommen war, dann wurden die beiden gespannten Drähte, indem *OX* und *QZ* wieder mit *OQ* in Verbindung standen, auf

$12''$ und $48'''$ von einander entfernt. In den Schliessungsdraht der Nebenbatterie wurden nach und nach zur ursprünglichen Länge $L = 14',2$ *K*. noch 2, 4..... bis 12'*K* hinzugefügt*). Die Erwärmungen *H* und *N* wurden beobachtet, daraus $\frac{N}{H}$ und das Verhältniss der Stromstärken $\sqrt{\frac{N}{H}}$ gezogen, überdies die gesammte frei gewordene Wärme *C* berechnet. Die Ladung der Hauptbatterie *J* war entweder 45,25 — 53,25 oder 61,25, nämlich nach der oben angegebenen Weise aus der Distanz der Kugeln am Funkenmesser bestimmt.

I. Reihe. Der gespannte Draht *NP* beiden Batterieen gemeinsam.

Schliessungs-dr. d. Nebenb. $= L +$	J	H	N	$\frac{N}{H}$	$\sqrt{\frac{N}{H}}$	C
0	45,25	11,6	8,2	0,713	0,844	25,3
	53,25	15,0	10,6	0,711		34,8
2'	45,25	11,2	8,7	0,778	0,876	25,4
	53,25	14,6	11,1	0,758		34,8
4'	45,25	11,1	9,1	0,819	0,907	25,6
	53,25	14,1	11,6	0,826		34,7
6'	45,25	10,7	9,2	0,860	0,925	25,5
	53,25	13,9	11,8	0,850		34,9
8'	45,25	10,7	9,2	0,860	0,926	25,7
	53,25	13,9	11,9	0,856		35,1
10'	45,25	10,9	9,0	0,822	0,907	25,9
	53,25	14,1	11,6	0,822		35,4
12'	45,25	11,4	8,4	0,738	0,861	26,2
	53,25	14,4	10,7	0,744		35,2

*) Ich bemerke, dass es vollkommen gleichgültig ist, an welcher Stelle die neuen Drähte eingeschaltet werden.

2te Reihe. Die gespannten Drähte in 12‴ Distanz.

Schliessung-dr. d. Nebenb. $= L +$	J	H	N	$\frac{N}{H}$	$\sqrt{\frac{N}{H}}$	C
0	53,25	18,6	5,2	0,279	0,528	36,3
	61,25	—*)	6,3	—		—
2′	53,25	17,6	6,5	0,369	0,607	36,1
	61,25	—*)	7,6	—		—
4′	53,25	16,2	8,0	0,492	0,696	35,6
	61,25	19,7	9,4	0,475		46,3
6′	53,25	15,6	8,9	0,572	0,750	35,8
	61,25	19,1	10,5	0,551		46,4
8′	53,25	15,4	9,1	0,593	0,768	35,7
	61,25	18,7	11,0	0,586		46,6
10′	53,25	15,7	8,7	0,558	0,742	36,0
	61,25	19,1	10,4	0,544		46,7
12′	53,25	17,0	6,9	0,404	0,638	36,2
	61,25	21,0	8,6	0,410		48,4

3te Reihe. Die gespannten Drähte in 48‴ Distanz.

Schliessung-dr. d. Nebenb. $= L +$	J	H	N	$\frac{N}{H}$	$\sqrt{\frac{N}{H}}$	C
2′	45,25	16,0	2,0	0,125	0,358	26,3
	53,25	20,0	2,6	0,1 1		36,0
4′	45,25	15,2	3,4	0,226	0,472	26,7
	53.25	19,0	4,2	0,221		36,1
6′	45,25	14,5	4,2	0,293	0,540	26,6
	53,25	18,2	5,2	0,289		36,1
8′	45,25	14,1	4,7	0,331	0,579	26,4
	53,25	17,7	6,0	0,338		36,2
10′	45.25	14,4	4,0	0,278	0,530	26,3
	53,25	18,0	5,1	0,285		35,7
12′	45,25	15,2	2,6	0,172	0,418	26,1
	53,25	19,2	3,4	0,179		35,9

---

*) Die starken Ströme mochte ich nicht durch das Thermometer hindurchlassen.

Nach diesen Beobachtungen ist das Maximum der Induction von der gegenseitigen Entfernung der gespannten Drähte unabhängig, doch wären die Versuche, wie das Spätere zeigen wird, richtiger angestellt worden, wenn die Ladung der Hauptbatterie unverändert geblieben wäre; wegen der eingefügten Platindrähte wurden die kleinen Differenzen nicht bemerkbar. Das Maximum der Induction findet statt, wenn zu dem Schliessungsdraht der Hauptbatterie $= 19',9$ *K.* der Schliessungsdraht der Nebenbatterie nicht ganz $22',2$ *K.* ist. Das Kraftverhältniss der angewandten Hauptbatterie zur Nebenbatterie ist nach meinen Ermittlungen wie 2,073:1,927 *), demnach sollte der Schliessungsdraht der Nebenbatterie

$$= \frac{19,7 \times 2,073}{1,927} = 21',2\,K.$$

sein; die geringe Differenz stammt einestheils von den wohl nicht ganz genauen Werthen der äquivalenten Längen, anderntheils von der Luftschicht zwischen den Kugeln des in der Leitung der Hauptbatterie befindlichen Funkenmessers, die ebenfalls in äquivalenter Länge hinzugefügt werden muss. — Zur Berechnung der frei gewordenen Wärme war der Widerstand des Hauptdrahtes mit Rücksicht auf meine Angaben in Pogg. Ann. B. 79. p. 255. $= 1,51$ bei $J = 45,25$; 1,66 bei $J = 53,25$ und 1,83 bei $J = 61,25$; der Widerstand des constanten Nebendrahts betrug 0,94 oder 1,04, je nachdem der gespannte Draht fortfiel oder hinzukam; der zu-

---

*) Die Kraft einer Flasche bestimmt man entweder aus Thermometerbeobachtungen, wie von mir Pogg. Ann. B. 79. p. 359. geschehen ist, dies gab Fl. 1 = 0,984, Fl. 2 = 1,072, Fl. 3 = 0,890, Fl. 4 = 1,054; oder man zählt die Ladung der Flaschen bis zu einer festen Schlagweite mittelst einer kleinen Lane'schen Flasche, was das bequemste Verfahren ist; ich erhielt so Fl. 1 = 0,988, Fl. 2 = 1,094, Fl. 3 = 0,878, Fl. 4 = 1,040; oder man bringt die Flaschen am besten zu je zwei zu einer Flaschensäule zusammen, wobei aber stets zwei Beobachtungen mit veränderter Folge der Flaschen angestellt werden müssen, weil die kleinen von mir angegebenen Glieder der Formel (Pogg. Ann. B. 79. p. 354.) sichtbar hervortreten und die Spannung der vordersten Flasche gegen die folgende steigern. Ich mag hier nicht noch einmal auf die Verhältnisse bei einer Flaschensäule eingehen, vielleicht findet sich an einem andern Orte Gelegenheit, die nicht unbedeutenden Fehler besonders hervorzuheben, welche durch die Verbindung einer grössern Lane'schen Flasche mit dem letzten isolirten Gliede der Säule herbeigeführt und unbeachtet gelassen worden sind; ich bemerke nur, dass man die gleiche Ladung der Säule allein dadurch erreichen darf, dass man die innere Belegung des ersten mit der äussern nicht isolirten Belegung des letzten Gliedes durch einen Draht mit eingeschobenem Funkenmesser, dessen Kugeln in constanter Entfernung bleiben, verbindet. Selbst in diesem Falle noch zeigt sich, wie fluctuirend die Ladung, ist in dem Umstande, dass längere Funken etwas zu frühzeitig überspringen; in Folge dieses Umstandes stellen sich auch die zwischen den Flaschen statt findenden Differenzen etwas zu gross heraus. Meine Beobachtungen geben mir Fl. 1 = 0,958, Fl. 2 = 1,124, Fl. 3 = 0,862, Fl. 4 = 1,056. Die Mittelzahlen aus den drei verschiedenen Bestimmungsarten sind Fl. 1 = 0,976, Fl. 2 = 1,097, Fl. 3 = 0,877, Fl. 4 = 1,050.

gefügte Kupferdraht machte 0,02 auf je 2′. Die Constante α des Thermometers gaben besondere Beobachtungen für die beiden ersten Reihen 0,0062, für die letzte an einem andern Tage angestellte Reihe 0,00635. Bei einer einfachen Entladung der Hauptbatterie war also das frei gewordene Wärmequantum $C=25,60$ bei $J=45,25$; 35,45 bei $J=53,25$ und 46,90 bei $J=61,25$. Dasselbe Wärmequantum erscheint nach den vorstehenden Beobachtungen ebenfalls, wenn beide Batterieen zu gleicher Zeit thätig sind. Die kleinen Differenzen der ersten Reihe erklären sich daraus, dass die Wärme in dem gespannten Drahte $=H$ gesetzt werden musste, was nicht vollkommen genau ist; das eine abweichende Resultat bei 12‴ Distanz der Drähte weist auf einen Beobachtungsfehler hin*).

Nach Erledigung des ersten Punktes kam die Abnahme der Induction mit der Entfernung in Betracht. Der Schliessungsdraht der Hauptbatterie blieb unverändert wie vorhin, der Schliessungsdraht der Nebenbatterie wurde dagegen um 7¾′, also bis zu 21′,9 K verlängert, worauf in einer zweiten Reihe 2′K. in ihm durch 16″,8 Platindraht ersetzt wurden. In beiden Reihen stieg die Distanz der gespannten Drähte nach und nach bis auf 48‴ auch findet man den Fall, wo die Nebenbatterie mit dem Draht OP verbunden war, unter 0 Distanz notirt. Das Verhältniss der inducirten Stromstärke zum Hauptstrom $\sqrt{\frac{N}{H}}$ wurde in der ersten Reihe nach der Formel

$$\sqrt{\frac{N}{H}}=\frac{81}{93,5+x},$$

in der zweiten nach

$$\sqrt{\frac{N}{H}}=\frac{43,7}{55,7+x}$$

berechnet, worin x die Distanz der gespannten Drähte in Linien bezeichnet.

---

*) Seitdem ich den nicht unbedeutenden Widerstand, welchen die durchbrochene Luftschicht darbietet, in Anschlag bringe, fällt die Annahme eines besondern Widerstands in der Batterie fort, den ich bei der Berechnung meiner in den Jahresber. d. Wien. Acad. mitgetheilten Beobachtungen ohne weitern Beleg herbeiziehen musste.

1ste Reihe.

Distanz	J	H	N	$\frac{N}{H}$	$\sqrt{\frac{N}{H}}$ beob.	Mittel ber.
0	45,25	11,2	9,5	0,844		
	53,25	14,2	12,0	0,842	0,922	—
	45,25	10,7	9,2	0,860		
	53,25	13,9	11,9	0,856		
3‴	45,25	11,7	8,3	0,707		
	53,25	14,9	10,6	0,708	0,840	0,839
	45,25	11,4	8,0	0,703		
	53,25	14,2	10,1	0,710		
6‴	45,25	11,7	7,7	0,660		
	53,25	14,6	9,7	0,663	0,812	0,814
	45,25	11,6	7,7	0.662		
	53,25	14,5	9,4	0,651		
12‴	45,25	12,0	7,1	0,593		
	53,25	15,4	9,0	0,586	0,766	0,767
	45,25	12,1	7,1	0.585		
	53,25	15,1	8,9	0,586		
24‴	45,25	13,2	6,4	0,481		
	53,25	16,4	7,7	0,474	0,690	0,689
	45,25	13,1	6,2	0,477		
	53,25	16,2	7,6	0,469		
36‴	45,25	13,5	5,3	0,398		
	53,25	16.7	6,6	0,395	0,628	0,626
	45,25	13,6	5,4	0,394		
	53,25	17,2	6,7	0,390		
48‴	45,25	14,1	4,7	0,336		
	53,25	17,5	5,6	0,321	0,571	0,572
	45,25	14,3	4,6	0,323		
	53,25	17,6	5,7	0,326		

2te Reihe.

Distanz	J	H	N	$\frac{N}{H}$	$\sqrt{\frac{N}{H}}$ beob.	Mittel ber.
0	45,25	9,4	7,1	0,760		
	53,25	12,0	9,1	0,760	0,873	—
	45,25	9,5	7,2	0,763		
	53,25	11,9	9,1	0,763		
3‴	45,25	10,7	6,0	0,558		
	53,25	13,5	7,4	0,551	0,747	0,743
	45,25	10,4	5,9	0,561		
	53,25	13,5	7,6	0,564		
6‴	45,25	11,2	5,6	0,502		
	53,25	14,1	7,0	0,498	0,706	0,707
	45,25	10,9	5,4	0,500		
	53,25	13,9	6,9	0,496		
12‴	45,25	11,6	4,8	0,416		
	53,25	14,7	6,0	0,407	0,640	0,645
	45,25	11,7	4,8	0,412		
	53,25	14,7	5,9	0,405		
24‴	45,25	13,0	3,9	0,292		
	53,25	16,2	5,0	0,309	0,546	0,548
	45,25	12,9	3,9	0,301		
	53,25	16,0	4,6	0,289		
36‴	45,25	13,6	3,1	0,230		
	53,25	16,9	3,7	0,222	0,475	0,476
	45,25	14,0	3,2	0,228		
	53,25	17,2	3,9	0,224		
48‴	45,25	14,3	2,6	0,183		
	53,25	18,0	3,2	0,176	0,426	0,421
	45,25	14,5	2,7	0,186		
	53,25	18,0	3,2	0,181		

Beide Beobachtungsreihen führen, wie man sieht, auf dieselbe Formel, welche oben aus der Induction bei Scheiben hergeleitet wurde, nur ist a merklich kleiner als b, ein Umstand, über den erst nach vollständiger Untersuchung des ganzen Gebietes eine feste Ansicht ausgesprochen werden kann. — Eine neue Reihe lieferte der Fall, wo die Nebenbatterie doppelt soviele Flaschen enthält, als die Hauptbatterie. Leider standen mir nur 4 Flaschen zu Gebote, so dass die Hauptbatterie nur eine Nr. 1, die Nebenbatterie zwei Flaschen Nr. 3 und 4 erhielt; der vorhandene Strom war zu schwach und ich konnte, obschon ich die Reihe ebenfalls wiederholte, nicht die gewünschte Sicherheit

in den Angaben erzielen; ich werde daher nur die gefundenen Verhältnisszahlen $\frac{N}{H}$ mittheilen. Das Maximum der Induction fand statt, als der Schliessungsdraht der Hauptbatterie 34,3 Fuss lang war, der Nebendraht dagegen zwischen 17 und 19 Fuss; die letztere Länge wurde beibehalten.

Distanz	$\frac{N}{H}$		$\frac{N}{H}$ Mittel	$\sqrt{\frac{N}{2H}}$ beob.	$\sqrt{\frac{N}{2H}}$ ber.
0	1,530	1,538	1,534	0,876	—
3‴	1,235	1,223	1,229	0,784	0,774
6	1,057	1,133	1,095	0,740	0,739
12	0,880	0,912	0,896	0,669	0,678
24	0,634	0,683	0,659	0,574	0,582
36	0,500	0,534	0,517	0,508	0,510
48	0,420	0,430	0,425	0,461	0,454

Die Abnahme der Induction wurde nach der Formel

$$\sqrt{\frac{N}{2H}} = \frac{49,5}{61,0 + x}$$

berechnet, die, so weit es erwartet werden konnte, die Beobachtungen annähernd darstellt. Der Werth der Reihe besteht nur darin zu zeigen, dass bei der getroffenen Anordnung der Batterien der inducirte Strom stärker als der Hauptstrom ist, wie dies vorausgesetzt werden konnte.

Das Merkwürdigste, was für mich als neue Thatsache aus diesen Versuchen hervorging, war dies, dass die Induction selbst hier, wo die Platindrähte sie sehr herabdrücken, so sehr langsam mit der gegenseitigen Entfernung der gespannten Drähte abnahm, und somit eröffnete sich die Aussicht, bei Anwendung des Funkenmessers in der Nebenbatterie, wo man dann die ganzen Schliessungsdrähte aus Kupferdraht bilden konnte, eine noch bei weitem langsamere Abnahme der Induction zu erzielen. Um dies bestätigt zu finden, wurden die Batterien zu je zwei Flaschen wieder hergestellt und die Platindrähte *ba* und *cd* (Taf. IV. Fig. 2.) durch je 2′ *K* ersetzt, wobei der Schliessungsdraht der Nebenbatterie die Länge behielt, welche vorher das Maximum der Induction geliefert hatte*). Der Funkenmesser *S* der Hauptleitung bekam eine feste Stellung, die $J = 31,25$ machte; ein anderer Funkenmesser *Y* verband nach Taf. IV. Fig. 3. so zwei Stellen des Schliessungsdrahts der Nebenbatterie, dass $YX = 2'$,

*) Ob durch diese Substitution das Maximum streng getroffen worden ist, dürfte nicht ganz sicher sein.

$YZ=1'$ war, er verband also zwei Punkte, die um $3\frac{1}{2}'K$ von der innern und äussern Belegung abstanden. Entlud sich jetzt die Hauptbatterie über *S*, so konnte den Kugeln von *Y* leicht diejenige Entfernung von einander gegeben werden, bei der noch ein Funken übersprang; die Messung war ungemein scharf, sicher bis auf $\frac{1}{40}$ Linie genau. Die beobachteten Spannungsdifferenzen (FM. in der Tabelle) mussten hierauf auf die totale Spannungsdifferenz *i* der Nebenbatterie, nämlich auf die Spannung zwischen ihrer innern und äussern Belegung zurückgeführt werden. Dies konnte geschehen, weil sich die Nebenbatterie während der Entladung der Hauptbatterie grade wie eine sich entladende Batterie verhält, die Spannung also von innen nach aussen auf dem Schliessungsdraht zur Länge desselben proportional abnimmt*); es musste demnach einestheils die Grösse bestimmt werden, um welche die von *Y* angegebenen Spannungsdifferenzen zu klein sind (vergl. Pogg. Ann. Bd. 78. p. 56. und die dort citirte frühere Abhandl.), anderntheils eine Ergänzung der so corrigirten Spannungsdifferenz für $3\frac{1}{2}'K$. bis zu den Belegungen vorgenommen werden. Hierzu wurde bei 3‴ Distanz der gespannten Drähte der Funkenmesser *Y* noch um 5, dann um 10 Fuss weiter zurückgestellt; in der ursprünglichen Stellung gab er 22,13, 5′ zurück 19,56 und 10′ zurück 12,62, also auf $1'K$ eine Abnahme der Spannung von 1,28 und 1,36 oder im Mittel von 1,32. Da nun zwischen den beiden Punkten, welche *Y* zuerst verband, noch $18,4\,K$ als Schliessungsdraht lagen, so sollte die beobachtete Spannungsdifferenz 24,39 statt 22,13 gewesen sein; es fehlten somit 2,26, welche Zahl nur um etwas grösser ist als die auf dem Schliessungsdraht einer gewöhnlichen Batterie gefundene. Nach diesem Resultate musste zu den beobachteten Zahlen zunächst 2,26 addirt und dazu dann die Spannungsdifferenz für $3\frac{1}{2}'K$. bis auf beide Belegungen hinzugefügt werden, um die totale Ladung *i* der Nebenbatterie zu erhalten. Dies ist in der nachstehenden Tabelle geschehen, worin unter FM. die ursprünglich beobachteten Zahlen, unter *i* beob. dagegen die daraus abgeleiteten totalen Ladungen der Nebenbatterie eingetragen sind.

Distanz	FM.	*i* beob.	*i* ber.
3‴	22,16	29,1	29,0
6	21,66	28,5	28,5
12	20,75	27,4	27,5
24	19,22	25,6	25,7
36	17,94	24,1	24,1
8	16,72	22,6	22,6
60	15,69	21,4	21,4
72	14,75	20,3	20,3

*) Es frägt sich, wie weit die gespannten Drähte auf sich selbst die regelmässige Abnahme stören; doch wird eine sichere Auskunft schwer zu erlangen sein.

Zur Berechnung des inducirten Stroms in seinem Verhältniss zum Hauptstrom wäre es jetzt noch nöthig gewesen, die Ladung E der Nebenbatterie zu kennen, die sie erreichen müsste, wenn Haupt- und Nebenstrom einander gleich sein sollten. Man würde mit dieser Zahl die beobachteten Werthe von i dividiren und die Quotienten m unter die Formel $m = \frac{a}{b+x}$ setzen, also $i = \frac{aE}{b+x}$. Den einzigen Anschluss dürften hierzu die von mir in Pogg. Ann. B. 71. p. 343. mitgetheilten Beobachtungen gewähren*), danach wäre

$$E = \frac{31{,}25 \times 2 \times \text{Fl.}1+2}{\text{Fl. } 1+2+3+4} = 32{,}12,$$

somit $a = 145{,}5$, $b = 158{,}2$ und die Differenz zwischen a und b würde den obigen Thermometerbeobachtungen entsprechen; ich trage indess Bedenken, den Werth von E schon jetzt so bestimmt festzusetzen, und ich will deshalb lieber das Produkt aE ungetrennt lassen. Die Formel zur Berechnung ist dann $i = \frac{4673{,}5}{158{,}2+x}$. Das Beachtenswertheste, was diese Reihe lehrte, war die wirklich sehr langsame Abnahme der Induction mit der Entfernung der gespannten Drähte von einander und dazu die Sicherheit, welche die Messungen mit dem Funkenmesser gewährten. Es entstand somit die Aufgabe, die Beobachtungen über den inducirten Strom der Nebenbatterie zunächst nach dieser Seite hin zu erweitern; die gewonnenen Resultate werde ich in der folgenden Abhandlung darlegen.

*) Ich bemerke hier, dass in der cit. Abhandlung die Spannung, welche die Nebenbatterie erhält, irrthümlicherweise auch auf die Hauptbatterie während ihrer Entladung übertragen worden ist, wofür keine Beobachtungen sprachen. Ein anderes Versehen werde ich in der folgenden Abhandlung verbessern.

VI.

Ueber Mantelfläche und Volumen cylindrisch-hufartiger Körper.

Von
Herrn Doctor Wilh. Schell,
Privatdocenten an der Universität zu Marburg.

Der Durchschnittsraum eines Flächenwinkels mit einem krummen Körper hat im Allgemeinen eine Gestalt, welche der eines Hufes nicht unähnlich ist. Die Mantelfläche und das Volumen eines solchen Hufes können mit Hülfe der Integralrechnung, bei gewissen Formen des durchsetzten Raumes auch durch Betrachtungen gefunden werden, welche sich auf die Lehre vom Schwerpunkte ebener Curven und Flächenräume gründen. Für einige Fälle, in welchen der durchsetzte Raum ein gerader Kreiscylinder ist, können jedoch diese Hülfsmittel durch rein geometrische ersetzt werden, wie sich dies im Folgenden zeigen wird.

I.

Ein gerader Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt (Taf. II. Fig. 4.) werde von zwei Ebenen $BDB'D'$ und $BAB'A'$ getroffen. Die erstere stehe senkrecht auf seiner Axe, sei also ein Kreisschnitt, die zweite sei ein schiefer elliptischer Schnitt. Die Durchschnittslinie BB' beider Ebenen treffe die Cylinderaxe in einem Punkte C; sie steht demzufolge auf der Cylinderaxe senkrecht und ist gleichzeitig Durchmesser des Kreisschnitts und kleine Axe des elliptischen Schnitts. Eine Ebene, welche durch die Cylinderaxe geht und senkrecht auf BB' steht, liefert die grosse Axe AA' des letztern.

Die beiden Ebenen $BDB'D'$ und $BAB'A'$ schneiden nun aus dem Cylinder zwei congruente, hufartige Körper $ABB'D$ und $A'B'BD$ heraus, deren jeder von den Ebenen eines Halbkreises mit einer halben Ellipse, sowie von der krummen Fläche eines Cylinderzweiecks umschlossen wird und eine geradlinige, aber zwei krummlinige Kanten besitzt, nämlich die Linie BB' und die Umfänge der ebenen Grenzflächen. Wir wollen einen solchen Körper einen „geraden Cylinderhuf mit einer die Cylinderaxe rechtwinklich schneidenden Kante" nennen.

Die Ebene CAD, welche die Cylinderaxe und die grosse Axe der elliptischen Grenzfläche enthält; theilt die Oberfläche und das Volumen des Hufes in zwei gleiche Theile; ihre Durchschnittsfigur mit der Gesammtoberfläche des Hufes ist ein rechtwinkliches Dreieck CAD, welches wir den Hauptschnitt des Hufes nennen wollen. Eine dreiseitige Pyramide endlich, deren Ecken in den Punkten A, D, B, B' liegen, möge die dem Hufe eingeschriebene Pyramide heissen.

Für die Mantelfläche und das Volumen des Hufes gelten alsdann die beiden Sätze:

1. Die Mantelfläche eines geraden Cylinderhufes mit einer die Cylinderaxe rechtwinklich schneidenden Kante ist das Vierfache des Hauptschnitts.

2. Das Volumen desselben ist das Doppelte der eingeschriebenen Pyramide.

Beweis 1. Bezeichnet man den Radius DC (Taf. II. Fig. 5.) der kreisförmigen Grenzfläche mit R, die Halbirungslinie AD der Mantelfläche mit H, so ist der vierfache Inhalt des Hauptschnitts $2RH$. Zieht man nun durch die Endpunkte eines Bogenelementes mm' des Halbkreises BDB' die beiden Erzeugungslinien der Mantelfläche, nämlich mn, $m'n'$, so ist das kleine Trapez $mm'n'n$ ein Element der Mantelfläche. Sein Inhalt ist, da die Erzeugungslinien auf dem Bogenelemente senkrecht stehen, $=\overline{mn}.\overline{mm'}$. Durch mn legen wir nun zwei Ebenen, eine senkrecht zum Hauptschnitt, die andere durch die Cylinderaxe. Die erstere schneidet den Hauptschnitt in einer Geraden $m''n''=mn$, die zweite bildet mit dem Hauptschnitt einen Winkel, den wir mit ψ bezeichnen wollen. Aus der Aehnlichkeit der in der Ebene des Hauptschnitts liegenden Dreiecke ADC und $n''m''C$ folgt nun

$$m''n'' : m''C = AD : DC$$

und da

$$m''n'' = mn, \quad m''C = R\cos\psi, \quad AD = H, \quad DC = R$$

ist, so ergiebt sich hieraus

$$mn = H\cos\psi.$$

Daher ist der Inhalt des Flächenelements $mm'n'm'$

$$H.\overline{mm'}.\cos\psi$$

und der Inhalt der Mantelfläche des Hufes also die Summe aller $H.\overline{mm'}.\cos\psi$ oder, da H für alle Elementec onstant ist, so ist dieser Inhalt gleich dem Produkt aus H in die Summe aller $\overline{mm'}.\cos\psi$. Es bedeutet aber $\overline{mm'}.\cos\psi$ die Projection des Bogenelementes $\overline{mm'}$ auf die Kante BB' des Hufes und es ist folglich die Summe aller $\overline{mm'}.\cos\psi$ gleich der Länge dieser Kante, d. i. $=2R$. Der Inhalt der Mantelfläche des Hufes ist also $2RH$, w. z. b. w.

2. Der Hauptschnitt theilt die eingeschriebene Pyramide in zwei gleiche Pyramiden, deren gemeinschaftliche Grundfläche er ist und deren Höhen BC und $B'C$ sind. Daher ist $\frac{1}{3}R^2H$ das Volumen der eingeschriebenen Pyramide. Legen wir nun durch jede der beiden Erzeugungslinien mn, $m'n'$ und die Cylinderaxe eine Ebene, so schneiden diese aus dem Hufe eine Elementarpyramide $mm'Cnn'$ heraus, deren Basis das Flächenelement $mnn'm'$ und deren Höhe $Cn=R$ ist. Der Inhalt einer solchen ist also

$$\frac{1}{3}R.\overline{mnn'm'}$$

und die Summe aller solcher Pyramiden des Volumen des Hufes. Diese Summe ist aber gleich dem Produkte aus $\frac{1}{3}R$ in die Oberfläche des Hufes, d. h. gleich

$$\frac{1}{3}R.2RH=\frac{2}{3}R^2H, \text{ etc.}$$

Coroll. 1. Bezeichnen Ω und V die Mantelfläche und das Volumen des Hufes, so bestehen also die Gleichungen

$$\Omega=2RH, \quad V=\frac{2}{3}R^2H,$$

aus welchen durch Elimination von $2HR$ folgt:

$$V=\frac{1}{3}R\Omega.$$

Eliminirt man R, so ergibt sich

$$\Omega^2=6HV.$$

Coroll. 2. Bezeichnet man den Neigungswinkel der beiden ebenen Grenzflächen des Hufes mit v, so wird $H=R\operatorname{tg}v$, mithin

$$\Omega = 2R^2 . \mathrm{tg}v, \quad V = \frac{2}{3} R^3 . \mathrm{tg}v .^{*)}$$

Coroll. 3. Es seien M und C die Mantelfläche und das Volumen eines geraden Cylinders von der Höhe H, aus welchem unser Huf geschnitten werden kann, so ist

$$M = 2\pi RH, \quad C = \pi R^2 H.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit den beiden eben gefundenen

$$\Omega = 2RH, \quad V = \frac{2}{3} R^2 H,$$

so folgt:

$$\Omega : M = \frac{2R}{\pi} : 2R, \quad V : C = \frac{4R}{3\pi} : 2R.$$

Da nun $\frac{2R}{\pi}$ der Abstand des Schwerpunktes der halbkreisförmigen Kante BDB' und $\frac{4R}{3\pi}$ der Abstand der Fläche dieses Halbkreises von der Kante BB' ist, so enthalten diese Gleichungen die beiden Sätze:

„Das Verhältniss der Mantelflächen des Hufes und des Cylinders von gleicher Höhe, aus welchem er geschnitten ist, ist gleich dem Verhältniss der Entfernung des Schwerpunkts der halbkreisförmigen Kante von der geradlinigen Kante zur Länge der letzten, und:

„Das Verhältniss der Volumina des Hufes und dieses Cylinders ist gleich dem Verhältniss des Abstandes des Schwerpunktes der halbkreisförmigen Grenzfläche am Hufe von dessen Kante zur Länge dieser Kante."

Coroll. 4. Der Körper $ABB'A'$ (Taf. II. Fig. 6.) ist die Differenz zwischen einem geraden Cylinder und zwei congruenten Hufen von der erwähnten Beschaffenheit. Bedeuten wieder R und H den Radius des Querschnitts und die Höhe des Cylinders, so ist die Mantelfläche dieses Körpers

$$2\pi RH - 4RH = 2(\pi - 2)RH,$$

und sein Volumen

$$\pi R^2 H - \frac{4}{3} R^2 H = (\pi - \frac{4}{3}) R^2 H.$$

---

*) S. Meier Hirsch, Sammlung geometrischer Aufgaben. Thl. II., S. 261.

Die Grundfläche dieses Körpers ist ein Kreis $AEA'E'$; senkrecht zu dieser können durch die Cylinderaxe zwei Schnitte geführt werden, von denen der eine ein gleichschenkliches Dreieck ACA' ist und die beiden grossen Halbaxen der elliptischen Grenzflächen enthält, während der andere ein Rechteck $BB'E'E$ ist und durch die gemeinsame kleine Axe der elliptischen Grenzflächen geht.

II.

Schneidet man (Taf. II. Fig. 7. *a*, *b*) einen geraden Kreiscylinder mit zwei schief gegen dessen Axe geneigten Ebenen BAB' und $BA'B'$, deren Durchschnittslinie BB' die Axe in einem Punkte C trifft und auf ihr senkrecht steht, so erhält man einen hufartigen Körper, welcher zwei ebene elliptische Grenzflächen besitzt. Die Kante BB' ist die gemeinschaftliche kleine Axe derselben, ihre grossen Axen liegen in einer durch die Cylinderaxe gehenden auf BB' senkrechten Ebene, welche die Mantelfläche und das Volumen des Hufes halbirt. Die Durchschnittsfigur dieser Ebene mit dem Hufe, nämlich das Dreieck ACA', soll wieder der Hauptschnitt und eine Pyramide, welche die vier Scheitel A, A', B, B' zu Ecken hat, die dem Hufe eingeschriebene Pyramide heissen. Dann gelten auch hier die beiden Sätze:

1. Die Mantelfläche eines Cylinderhufes mit zwei elliptischen Grenzflächen von gemeinschaftlicher kleiner Axe ist das Vierfache des Hauptschnitts.

2. Das Volumen desselben ist das Doppelte der eingeschriebenen Pyramide.

Beweis. Da BB' senkrecht zur Cylinderaxe ist, so kann man durch diese Linie einen Kreisschnitt BDB' legen. Hiedurch erhält man zwei Hufe von der unter I. beschriebenen Art, nämlich $ABB'D$ und $A'B'BD$, deren Summe oder Differenz der Huf $ABB'A'$ ist, je nachdem dessen elliptische Grenzflächen auf entgegengesetzte oder auf dieselbe Seite des Kreisschnitts fallen. Ebenso ist der Hauptschnitt und die eingeschriebene Pyramide des Hufes $BAB'A'$ die Summe oder Differenz der entsprechenden Grössen der Hufe $BAB'D$ und $BA'B'D$. Daher ist (nach I.) die vierfache Summe oder Differenz der Hauptschnitte von $BAB'D$ und $BA'B'D$ gleich der Mantelfläche von $BAB'A'$, und die doppelte Summe oder Differenz der diesen Hufen eingeschriebenen Pyramiden gleich dem Volumen von $BAB'A'$, d. h. die Mantelfläche des Hufes $BAB'A'$ ist viermal so gross als dessen Hauptschnitt, und sein Volumen doppelt so gross, als seine eingeschriebene Pyramide.

Coroll. 1. Ist also wieder Ω und V die Mantelfläche und das Volumen des Hufes mit zwei elliptischen Grenzflächen, R

der Radius des Kreisschnittes und H die Verbindungslinie der Scheitel A und A' der grossen Axen der Grenzflächen, so hat man

$$\Omega = 2RH, \quad V = \frac{2}{3} R^2 H.$$

Bezeichnet man die Neigungswinkel der ebenen Grenzflächen gegen den Kreisschnitt, nämlich $\angle ACD$ und $\angle A'CD$, mit v und v', so wird

$$H = R(\operatorname{tg} v \pm \operatorname{tg} v'),$$

mithin

$$\Omega = 2R^2(\operatorname{tg} v \pm \operatorname{tg} v'), \quad V = \frac{2}{3} R^3(\operatorname{tg} v \pm \operatorname{tg} v').\,^{*})$$

Coroll. 2. Da der Flächenraum des Hauptschnittes und das Volumen der eingeschriebenen Pyramide sich nicht ändert, wenn die Punkte A und A' fest sind, während C sich auf der Cylinderaxe bewegt, so folgt, dass die Mantelfläche und das Volumen eines Hufes mit zwei elliptischen Grenzflächen von gemeinsamer kleinen Axe sich nicht ändert, wenn der Mittelpunkt dieser Flächen eine zur Verbindungslinie der Scheitel der grossen Axen parallele Grade beschreibt.

Coroll. 3. Schneidet man einen geraden Kreiscylinder mit einem Ebenenbüschel, dessen Axe die Cylinderaxe rechtwinklich trifft, so liegen die Scheitel der grossen Axen aller elliptischen Schnitte in zwei Erzeugungslinien des Cylinders, wie AA'. Es verhalten sich die Mantelflächen und die Volumina der entstehenden Hufe wie ihre Scheitellinie AA'. Sind insbesondere vier Ebenen des Büschels harmonisch, so stehen auch die Mantelflächen und Volumina von vier entsprechenden Hufen in harmonischer Proportion.

III.

Es werde (Taf. II. Fig. 8.) ein gerader Kreiscylinder von zwei Ebenen BAB' und $BA'B'$ geschnitten. Beide Schnitte seien schief gegen die Cylinderaxe geführt, ihre Durchschnittslinie BB' treffe diese Axe in einem Punkte C, habe im Uebrigen aber eine beliebige Neigung gegen sie. Diese beiden Ebenen schneiden aus dem Cylinder einen Huf $ABB'A'$ heraus, welcher von zwei elliptischen Flächen begrenzt wird, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt C ist. Um die Axen dieser Ellipsen zu finden, legen wir durch C einen Kreisschnitt des Cylinders, derselbe trifft die Ebenen der Ellipsen in

*) S. Meier Hirsch a. a. O.

ihren kleinen Axen $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$. Senkrecht zu diesen Geraden führen wir durch die Cylinderaxe die Schnitte CAD und CAD'; sie liefern die grossen Halbaxen CA und CA' der Ellipsen und bilden einen Winkel $DCD'=\mu$ mit einander, welcher dem Winkel $\beta C\gamma$ gleich ist, den die kleinen Axen einschliessen. Die beiden letztgenannten Schnitte treffen die Cylinderfläche in zwei Erzeugungslinien DA und $D'A'$, welche durch die Scheitel der grossen Axen der ebenen Grenzflächen gehen; die Stücke AD und $A'D'$ derselben, von diesen Scheiteln bis zur Peripherie des Kreisschnitts gerechnet, mögen mit H und H' bezeichnet werden, die Dreiecke CDA, $CD'A'$, welche die grossen Halbaxen und diese Linien H und H' enthalten, sollen die beiden Hauptschnitte des Hufes heissen. Bezeichnet man endlich den Radius des Kreisschnitts mit R, so gelten folgende Sätze:

1. Die Mantelfläche des Hufes mit zwei elliptischen Grenzflächen von gemeinschaftlichem Mittelpunkt ist

$$=2R\sqrt{H^2+H'^2+2HH'\cos\mu}.$$

2. Das Volumen desselben ist

$$=\frac{2}{3}R^2\sqrt{H^2+H'^2+HH'\cos\mu}\,.$$

Beweis 1. Es sei $mm'n'n$ ein Flächenelement, sein Inhalt ist $\overline{mn}.\overline{kk'}$, wenn kk' das zugehörige Bogenelement des Kreisschnittes ist. Nun ist aber

$$\overline{mn}=\overline{nk}\pm\overline{mk},$$

je nachdem die elliptischen Grenzflächen auf entgegengesetzte oder auf dieselbe Seite des Kreisschnitts fallen. Durch nk legen wir nun eine Ebene senkrecht zum Hauptschnitt DCA und eine andere, welche durch die Axe des Cylinders geht. Die erstere schneidet den Hauptschnitt in einer Geraden, deren Länge $=kn$ ist; der Winkel, den die zweite mit dem Hauptschnitt bildet, sei ψ.

Ganz auf dieselbe Art, wie unter I., folgt alsdann für nk der Werth

$$\overline{nk}=H\cos\psi.$$

Legen wir ebenso durch mk eine Ebene senkrecht zum Hauptschnitt $D'A'C$ und eine zweite durch die Cylinderaxe, so ist, weil letztere mit diesem Hauptschnitte einen Winkel $\psi+\mu$ bildet:

$$\overline{mk}=H'\cos(\mu+\psi).$$

Daher ist unser Flächenelement gleich

$$\{H\cos\psi \pm H'\cos(\mu+\psi)\}.\overline{kk'}$$

und die Summe aller dieser Elemente innerhalb der gehörigen Grenzen genommen ist die gesuchte Mantelfläche des Hufes. Nun stellen wieder

$$\overline{kk'}.\cos\psi \quad \text{und} \quad \overline{kk'}.\cos(\mu+\psi)$$

die Projectionen des Bogenelementes kk' auf die kleinen Axen der elliptischen Grenzflächen, nämlich auf $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ vor. Ihre Summen sind also (s. I.)

$$R\sin\psi \quad \text{und} \quad R\sin(\mu+\psi)$$

und daher ist die Summe der Flächenelemente allgemein

$$HR\sin\psi \pm H'R\sin(\mu+\psi).$$

Die Grenzen, innerhalb welcher diese Summe zu nehmen ist, ergeben sich auf folgende Art. Legen wir durch die Punkte B' und B Erzeugungslinien des Cylinders, welche die Peripherie des Kreisschnitts in den Punkten p', p treffen, so ist $-\overline{DCp}$ $=-(\pi-\overline{DCp'})$ die untere, $+\overline{DCp'}$ die obere Grenze für den Winkel ψ.

Um nun den Winkel $\overline{DCp'}$ zu finden, bedenken wir, dass er derjenige Werth ψ_0 von ψ ist, für welchen mk und nk gleiche absolute Werthe annehmen. Daher ergibt sich dieser Werth aus der Gleichung

$$H\cos\psi_0 = \mp H'\cos(\psi_0+\mu)$$

als

$$\psi_0 = DCp' = \operatorname{arctg}\frac{H \pm H'\cos\mu}{\pm H'\sin\mu},$$

und hieraus folgen weiter für den Sinus und Cosinus dieses Winkels die Formeln:

$$\sin\psi_0 = \frac{H \pm H'\cos\mu}{\sqrt{H^2 + H'^2 \pm 2HH'\cos\mu}},$$

$$\cos\psi_0 = \frac{\pm H'\sin\mu}{\sqrt{H^2 + H'^2 \pm 2HH'\cos\mu}}.$$

Setzen wir nun in unsere Summe

$$HR\sin\psi \pm H'R\sin(\mu+\psi)$$

die Grenzen ψ_0 und $-\pi+\psi_0$ ein, und subtrahiren das der un-

tern Grenze entsprechende Resultat von dem der obern entsprechenden, so kommt

$$2HR\sin\psi_0 \pm 2H'R\sin(\mu+\psi_0),$$

und da, vermöge der obigen Werthe für $\sin\psi_0$, $\cos\psi_0$,

$$2HR\sin\psi_0 = \frac{2HR(H \pm H'\cos\mu)}{\sqrt{H^2+H'^2 \pm 2HH'\cos\mu}}$$

und

$$\pm 2H'R\sin(\mu+\psi_0) = 2H'R \cdot \frac{\pm H'\sin^2\mu + H\cos\mu \pm H'\cos^2\mu}{\sqrt{H^2+H'^2 \pm 2HH'\cos\mu}}$$

$$= \frac{\pm 2H'R(H\cos\mu \pm H')}{\sqrt{H^2+H'^2 \pm 2HH'\cos\mu}}$$

wird, so geht die ganze Summe, wie leicht zu sehen, über in

$$2R\sqrt{H^2+H'^2 \pm 2HH'\cos\mu}.$$

Das doppelte Zeichen kann man sparen und blos das obere beibehalten, wenn man H und H' als Grössen von gleichem Zeichen betrachtet, wenn die elliptischen Schnitte auf dieselbe, als Grössen von entgegengesetzten Zeichen, wenn sie auf entgegengesetzte Seiten des Kreisschnitts fallen.

2. Denkt man sich den Huf ganz wie unter I. geschah in dreiseitige Elementarpyramiden zerlegt, so ergibt sich, dass das Volumen desselben gleich dem Produkte aus seiner Oberfläche in den dritten Theil des Radius R des Kreisschnitts, d. h. gleich

$$\frac{2}{3}R^2\sqrt{H^2+H'^2+2HH'\cos\mu}$$

ist.

In diesen beiden Formeln sind die unter I. und II. gefundenen enthalten; man erhält sie wieder, wenn man $\mu=0$, $H'=0$ setzt.

Coroll. Bezeichnet man die Neigungswinkel der elliptischen Schnitte gegen den Kreisschnitt mit v und v', so wird

$$H = R\,\mathrm{tg}v, \quad H' = R\,\mathrm{tg}v';$$

mithin die Mantelfläche Ω des Hufes:

$$\Omega=2R^2\sqrt{(\mathrm{tg}^2v+\mathrm{tg}^2v'+2\,\mathrm{tg}v\,.\,\mathrm{tg}v'\,.\cos\mu)},$$

und das Volumen V:

$$V=\frac{2}{3}R^3\sqrt{(\mathrm{tg}^2v+\mathrm{tg}^2v'+2\,\mathrm{tg}v\,.\,\mathrm{tg}v'\,.\cos\mu)}.$$

VII.

Ueber die Entfernungsörter eines Systems gerader Linien und Ebenen.

Von

Herrn Doctor Wilh. Schell,

Privatdocenten an der Universität zu Marburg.

1. Wenn

$$Ax+By+C=0$$

die Gleichung einer Geraden ist, so ist die Länge eines von einem Punkte (ξ, η) auf sie gefällten Perpendikels:

$$p=\frac{A\xi+B\eta+C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

und diese Länge ist positiv oder negativ, je nachdem

$$A\xi + B\eta + C \gtrless 0$$

ist.

Hat man nun n Gerade, G_1, G_2, $G_3 \dots G_n$, deren Gleichungen unter obiger Form vorausgesetzt werden sollen, so dass eben die Gleichung der Geraden G_i

$$A_i x + B_i y + C_i = 0$$

ist, so erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte, für welche die Summe der von einem beliebigen derselben auf die n Geraden gefällten Perpendikel eine Constante k ist, als

$$\Sigma\left(\frac{A\xi + B\eta + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = k,$$

oder, wenn man ordnet:

$$\xi.\Sigma\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + \eta.\Sigma\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} + \Sigma\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} - k = 0.$$

Der gesuchte geometrische Ort ist also eine Gerade; sie heisst der Entfernungsort der n Geraden G_1, $G_2, \dots G_n$. Da die Constante k nicht in den Coefficienten von ξ und η erscheint, so folgt unmittelbar, dass alle den verschiedenen Werthen von k entsprechenden Entfernungsörter mit einander parallel laufen.

2. Die Cosinusse der Winkel α_i, β_i, welche das vom Ursprunge der Coordinaten auf eine der n Geraden G_i gefällte Perpendikel mit den Axen bildet, sind

$$\cos\alpha_i = \frac{A_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}},\quad \cos\beta_i = \frac{B_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}};$$

und die Länge p_i des Perpendikels ist

$$p_i = \frac{C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}}.$$

Daher kann die Gleichung des Entfernungsortes auch unter der Form dargestellt werden:

$$\xi.\Sigma(\cos\alpha) + \eta.\Sigma(\cos\beta) = k - \Sigma(p).$$

Hieraus folgt, dass die Cosinusse der Winkel a, b, welche ein auf den Entfernungsort vom Ursprung gefälltes Perpendikel mit den Axen bildet, die Werthe haben:

$$\cos a = \frac{\Sigma(\cos\alpha)}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2 + (\Sigma\cos\beta)^2}},$$

$$\cos b = \frac{\Sigma(\cos\beta)}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2 + (\Sigma\cos\beta)^2}};$$

und dass die Länge P der Perpendikels ist:

$$P = \frac{\Sigma(p) - k}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2 + (\Sigma\cos\beta)^2}}.$$

3. Bilden die Perpendikel auf zwei Gerade mit den Axen die Winkel α_1, β_1; α_2. β_2, so ist der Cosinus eines der Winkel, die die Geraden unter sich bilden:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2.$$

Setzt man hierin für $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$ die Cosinusse der Winkel, welche der Entfernungsort mit der Axe bildet, für $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$ die Cosinusse einer der Geraden, G_i z. B., so erhält man für den Cosinus des Winkels ω, den der Entfernungsort mit der Geraden G_i bildet:

$$\cos\omega = \frac{\cos\alpha_i\,\Sigma\cos\alpha + \cos\beta_i\,\Sigma\cos\beta}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2 + (\Sigma\cos\beta)^2}}.$$

Da $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2$ immer $=1$ ist, so kann man, wenn man will, den Zähler dieses Bruches auch so schreiben:

$$1 + (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_{i-1} + \cos\alpha_{i+1} + \ldots \cos\alpha_n)$$

$$+ (\cos\beta_1 + \cos\beta_2 + \ldots \cos\beta_{i-1} + \cos\beta_{i+1} + \ldots \cos\beta_n),$$

und der Nenner ist gleichbedeutend mit der Quadratwurzel aus

$$n + 2(\Sigma\cos\alpha_m\cos\alpha_n + \Sigma\cos\beta_m\cos\beta_n),$$

worin die Indices m und n alle möglichen Combinationen der verschiedenen $\cos\alpha$, sowie der $\cos\beta$, anzeigen sollen.

4. Um die Stücke, welche der Entfernungsort von den Coordinatenaxen abschneidet, zu finden, stellen wir die Gleichung desselben unter der Form dar:

$$\frac{\xi}{\dfrac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\alpha}} + \frac{\eta}{\dfrac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\beta}} = 1.$$

Bezeichnen wir diese Stücke mit u und v, so ist also

$$u = \frac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\alpha}, \qquad v = \frac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\beta}.$$

Hieraus folgt, dass, wenn die Constante k um Δk zunimmt, die Grössen u und v um

$$\frac{\Delta k}{\Sigma \cos\alpha},\quad \frac{\Delta k}{\Sigma \cos\beta}$$

sich ändern.

Schneiden sich alle n Geraden im Coordinatenursprung, so ist $\Sigma(p)=0$. Die Lage des Entfernungsortes wird alsdann bestimmt durch

$$u=\frac{k}{\Sigma \cos\alpha},\quad v=\frac{k}{\Sigma \cos\beta}.$$

Laufen alle n Geraden mit einander parallel, so wird

$$\Sigma \cos\alpha = n\cos\alpha,\quad \Sigma\cos\beta = n\cos\beta;$$

und wenn wir das arithmetische Mittel aller Perpendikel, nämlich $\frac{\Sigma(p)}{n}$, mit m bezeichnen, so wird

$$u=\frac{\frac{k}{n}-m}{\cos\alpha},\quad v=\frac{\frac{k}{n}-m}{\cos\beta}.$$

5. Wir haben oben den Winkel bestimmt, den der Entfernungsort mit einer der n Geraden mit G_i bildet; wir wollen nun noch die Coordinaten des Durchschnittspunktes des Ortes mit dieser Geraden suchen. Sind ξ_i, η_i die Coordinaten dieses Punktes, so bestehen dafür also die Gleichungen:

$$A_i\xi_i + B_i\eta_i + C_i = 0,\quad \Sigma\cos\alpha.\xi_i + \Sigma\cos\beta.\eta_i + (\Sigma(p)-k)=0.$$

Hieraus folgen:

$$\xi_i=\frac{B_i(k-\Sigma(p))+C_i\Sigma\cos\beta}{B_i\Sigma\cos\alpha - A_i\Sigma\cos\beta},$$

$$\eta_i=\frac{A_i(k-\Sigma(p))+C_i\Sigma\cos\alpha}{A_i\Sigma\cos\beta - B_i\Sigma\cos\alpha}.$$

6. Ausser dem System der n Geraden $G_1G_2G_3\ldots G_n$ sei noch ein zweites gegeben von m Geraden $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3\ldots\ldots\mathfrak{G}_m$. Werden alle entsprechenden constanten Grössen dieses Systems mit den deutschen Lettern bezeichnet, so ist die Gleichung des Entfernungsorts dieses Systems:

$$\xi.\Sigma\cos\mathfrak{a} + \eta\Sigma\cos\mathfrak{b} = \mathfrak{k} - \Sigma(\mathfrak{p}).$$

Dieser Ort schneidet den ersten

$$\xi\Sigma\cos\alpha + \eta\Sigma\cos\beta = k - \Sigma(p)$$

in einem Punkte, dessen Coordinaten ξ_0, η_0 sind

$$\xi_0=\frac{(k-\Sigma(p))\Sigma\cos\mathfrak{b}-(\mathfrak{k}-\Sigma(\mathfrak{p}))\Sigma\cos\beta}{\Sigma\cos\alpha.\Sigma\cos\mathfrak{b}-\Sigma\cos\beta.\Sigma\cos\mathfrak{a}},$$

$$\eta_0=\frac{(k-\Sigma(p))\Sigma\cos\mathfrak{a}-(\mathfrak{k}-\Sigma(\mathfrak{p}))\Sigma\cos\alpha}{\Sigma\cos\beta\Sigma\cos\mathfrak{a}-\Sigma\cos\alpha\Sigma\cos\mathfrak{b}}.$$

Für den Fall, dass $\mathfrak{k}=k$ sein soll, könnte man den Punkt ξ_0, η_0 den Mittelpunkt gleicher Entfernungen beider Systeme nennen.

Es sei das zweite System z. B. das System der vom Ursprung auf die Geraden G gefällten Perpendikel. Die Gleichung eines solchen, welches der Geraden G_i

$$A_i x+B_i y+C_i=0$$

entspricht, ist

$$-B_i x+A_i y=0,$$

mithin die Gleichung des Entfernungsortes dieses Systems:

$$\xi\Sigma\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}+\eta\Sigma\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=k,$$

d. h.

$$-\xi\Sigma\cos\beta+\eta\Sigma\cos\alpha=k.$$

Um die Coordinaten des Mittelpunktes gleicher Entfernungen zu finden, haben wir nur

$$\Sigma\cos\mathfrak{a}=-\Sigma\cos\beta,\quad \Sigma\cos\mathfrak{b}=\Sigma\cos\alpha,\quad \Sigma(\mathfrak{p})=0,\quad \mathfrak{k}=k$$

in obigen Formeln für ξ_0, η_0 zu setzen. Diese liefern uns dadurch:

$$\xi_0=\frac{-\Sigma(p)\Sigma\cos\alpha+k(\Sigma\cos\alpha-\Sigma\cos\beta)}{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2},$$

$$\eta_0=\frac{-\Sigma(p)\Sigma\cos\beta+k(\Sigma\cos\alpha+\Sigma\cos\beta)}{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2}.$$

Für $k=0$ insbesondere wird:

$$\xi_0 = \frac{-\Sigma(p)\Sigma\cos\alpha}{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2} = \frac{-\Sigma(p).\cos a}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2}},$$

(s. 2.)

$$\eta_0 = \frac{-\Sigma(p)\Sigma\cos\beta}{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2} = \frac{-\Sigma(p).\cos b}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2}}.$$

Die Entfernung dieses Punktes vom Ursprung ist:

$$\frac{-\Sigma(p)}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2}}.$$

7. Lässt man das ganze System der Geraden $G_1, G_2, G_3, .. G_n$ und ihres Entfernungsortes um eine beliebige in der Ebene des Systems liegende Axe rotiren, so beschreibt jede Gerade eine Kegelfläche. Die Kegelfläche, welche der Entfernungsort beschreibt, hat die Eigenschaft, dass wenn man von einem beliebigen Punkte derselben auf alle andern Kegel Normalen fällt, die Summe dieser constant ist.

8. Die Anzahl n der Geraden des Systems $G_1 G_2 ..... G_n$ darf nicht unendlich werden, sonst verschwindet der Entfernungsort. Für das System der Tangenten einer Curve gibt es also keinen solchen. Die Eigenschaft eines Polygons, Entfernungsörter zu besitzen, hört also mit dem Uebergange desselben in eine Curve auf.

---

1. Es sei

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung einer Ebene; die Länge p des von einem Punkte ξ, η, ζ auf sie gefällten Perpendikels ist alsdann

$$p = \frac{A\xi + B\eta + C\zeta + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Sind nun n Ebenen E_1, E_2, $E_3 .... E_n$ gegeben und stellen wir die Gleichung einer jeden von ihnen unter obiger Form dar, so dass z. B. die Gleichung der Ebene E_i die folgende ist

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0,$$

so stellt

$$\Sigma\frac{A\xi+B\eta+C\zeta+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=k$$

den geometrischen Ort aller Punkte ξ, η, ζ dar, für welche die Summe der von ihnen auf die Ebenen E gefällten Perpendikel eine Constante k ist, d. h. den Entfernungsort dieses Ebenensystems. Diese Gleichung kann wieder unter der Form

$$\xi.\Sigma\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\eta.\Sigma\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\zeta.\Sigma\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$+\Sigma\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-k=0$$

geschrieben werden. Der geometrische Ort ist, wie man sieht, eine Ebene, und alle den verschiedenen Werthen von k entsprechenden Lagen derselben laufen mit einander parallel.

2. Bezeichnen wir mit α_i, β_i, γ_i die Winkel, welche das vom Ursprung der Coordinaten auf die Ebene E_i gefällte Perpendikel mit den Axen bildet, und mit p_i die Länge desselben, so hat man:

$$\cos\alpha_i=\frac{A_i}{\sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2}},\quad \cos\beta_i=\frac{B_i}{\sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2}},$$

$$\cos\gamma_i=\frac{C_i}{\sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2}},\quad p_i=\frac{D}{\sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2}}.$$

Daher kann die Gleichung des Entfernungsortes auch unter der Form dargestellt werden:

$$\xi.\Sigma\cos\alpha+\eta.\Sigma\cos\beta+\xi.\Sigma\cos\gamma=k-\Sigma(p).$$

Hieraus folgen die Cosinusse der Winkel a, b, c, welche ein auf den Entfernungsort vom Ursprunge gefälltes Perpendikel mit den Axen bildet, nämlich:

$$\cos a=\frac{\Sigma\cos\alpha}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2+(\Sigma\cos\gamma)^2}},$$

$$\cos b=\frac{\Sigma\cos\beta}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2+(\Sigma\cos\gamma)^2}},$$

$$\cos c=\frac{\Sigma\cos\gamma}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2+(\Sigma\cos\beta)^2+(\Sigma\cos\gamma)^2}}.$$

und die Länge P dieses Perpendikels, nämlich:

$$P = \frac{k - \Sigma(p)}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2 + (\Sigma\cos\beta)^2 + (\Sigma\cos\gamma)^2}}.$$

3. Bilden die Perpendikel, welche auf zwei Ebenen gefällt werden können, mit den Axen die Winkel $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, so ist bekanntlich der Cosinus des Neigungswinkels N beider Ebenen:

$$\cos N = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

Daher erhält man den Cosinus des Winkels, welchen der Entfernungsort mit einer der n Ebenen, mit E_i, bildet, als

$$\cos N_i = \frac{\cos\alpha_i\,\Sigma\cos\alpha + \cos\beta_i\,\Sigma\cos\beta + \cos\gamma_i\,\Sigma\cos\gamma}{\sqrt{(\Sigma\cos\alpha)^2 + (\Sigma\cos\beta)^2 + (\Sigma\cos\gamma)^2}}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes enthält wegen

$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1$$

die Winkel α_i, β_i, γ_i nur scheinbar.

4. Stellt man die Gleichung des Entfernungsorts unter der Form dar:

$$\frac{\xi}{\frac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\alpha}} + \frac{\eta}{\frac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\beta}} + \frac{\zeta}{\frac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\gamma}} = 1,$$

so ersieht man, dass die Axenparameter u, v, w, d. h. die Stücke, welche der Ort von den Axen abschneidet, die Werthe haben:

$$u = \frac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\alpha}, \qquad v = \frac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\beta}, \qquad w = \frac{k-\Sigma(p)}{\Sigma\cos\gamma}.$$

5. Ist ausser dem System der n Ebenen E_1, E_2, ... E_n, noch ein zweites System von m andern Ebenen $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3\ldots\mathfrak{E}_m$ gegeben, so ist, wenn die entsprechenden Grössen dieses letzteren mit den grossen deutschen Buchstaben bezeichnet werden, die Gleichung des Entfernungsorts des zweiten Systems:

$$\xi\Sigma\cos\mathfrak{A} + \eta\Sigma\cos\mathfrak{B} + \zeta\Sigma\cos\mathfrak{C} = \mathfrak{K} - \Sigma(\mathfrak{p}).$$

Dieser Ort schneidet den erstern

$$\xi\Sigma\cos\alpha+\eta\Sigma\cos\beta+\zeta\Sigma\cos\gamma=k-\Sigma(p)$$

in einer Geraden, welche für den Fall, dass $\mathfrak{K}=k$ sein soll, die Gerade der gleichen Entfernungen beider Systeme genannt werden kann.

Ist für ein drittes System von q Ebenen, der Entfernungsort

$$\xi\Sigma\cos\mathfrak{a}+\eta\Sigma\cos\mathfrak{b}+\zeta\Sigma\cos\mathfrak{c}=\mathfrak{k}-\Sigma(\mathfrak{p}),$$

so schneidet derselbe jeden der beiden vorhergehenden in einer Geraden. Diese drei Geraden laufen in einen Punkt zusammen. Für den Fall, dass $\mathfrak{K}=k=\mathfrak{k}$ ist, kann dieser Punkt der Mittelpunkt der gleichen Entfernungen der drei Ebenensysteme heissen.

Die Gleichungen der Geraden gleicher Entfernungen und die Coordinaten des Mittelpunkts gleicher Entfernungen ergeben sich leicht aus diesen drei Gleichungen.

VIII.

Einige Sätze zur Theorie der hyperbolischen Functionen.

Von

Herrn Doctor Moritz Cantor

zu Frankfurt a. M.

Die hyperbolischen Functionen unterscheiden sich bekanntlich dadurch von den trigonometrischen, dass sie, wie diese von Exponentialgrössen mit imaginärem Exponenten, von Exponentialgrössen mit reellem Exponenten abhängen. Zur Bezeichnung gebraucht man die Buchstaben des deutschen Alphabets und schreibt demgemäss:

$$\mathfrak{Sin}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\mathfrak{Cos}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\mathfrak{Tg}x = \frac{\mathfrak{Sin}x}{\mathfrak{Cos}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Aus diesen Definitionen ergeben sich unmittelbar die Fundamentalsätze:

$$[1] \quad (\mathfrak{Cos}x)^2 - (\mathfrak{Sin}x)^2 = 1.$$

$$[2] \quad \begin{cases} \mathfrak{Sin}(x \pm y) = \mathfrak{Sin}x.\mathfrak{Cos}y \pm \mathfrak{Cos}x.\mathfrak{Sin}y, \\ \mathfrak{Cos}(x \pm y) = \mathfrak{Cos}x.\mathfrak{Cos}y \pm \mathfrak{Sin}x.\mathfrak{Sin}y. \end{cases}$$

$$[3]\quad \begin{cases} \text{Cos}(x+y)+\text{Cos}(x-y)=2.\text{Cos}x.\text{Cos}y, \\ \text{Cos}(x+y)-\text{Cos}(x-y)=2.\text{Sin}x.\text{Sin}y, \\ \text{Sin}(x+y)+\text{Sin}(x-y)=\text{Sin}2.x.\text{Cos}y, \\ \text{Sin}(x+y)-\text{Sin}(x-y)=2.\text{Cos}x.\text{Sin}y. \end{cases}$$

$$[4]\quad \begin{cases} \text{Cos}x+\text{Sin}x=e^x, \\ \text{Cos}x-\text{Sin}x=e^{-x}; \end{cases}$$

die wir zur folgenden Entwicklung voraussetzen müssen.

Stellen wir uns die Aufgabe, die Summen der beiden Reihen:

1. $\text{Cos}a+\text{Cos}(a+b)+\text{Cos}(a+2b)+\ldots\ldots+\text{Cos}(a+nb)=S,$

2. $\text{Sin}a+\text{Sin}(a+b)+\text{Sin}(a+2b)+\ldots\ldots+\text{Sin}(a+nb)=s$

zu finden, so ergeben sich dieselben sehr leicht durch gleichzeitige Behandlung beider Reihen. Addiren wir nämlich 1. und 2., so ist

$$S+s=(\text{Cos}a+\text{Sin}a)+(\text{Cos}(a+b)+\text{Sin}(a+b))+(\text{Cos}(a+2b)+\text{Sin}(a+2b)) \\ +\ldots\ldots+(\text{Cos}(a+nb)+(\text{Sin}a+nb)),$$

welches wegen [4] in folgende Gleichung übergeht:

$$S+s=e^a+e^{a+b}+e^{a+2b}+\ldots\ldots+e^{a+nb}.$$

Aber

$$e^a+e^{a+b}+e^{a+2b}+\ldots\ldots+e^{a+nb}$$

ist eine geometrische Reihe, deren Summe leicht darzustellen ist, also

$$3.\quad S+s=\frac{e^{a+(n+1)b}-e^a}{e^b-1}.$$

Wird ferner 2. von 1. abgezogen, so ist:

$$S-s=(\text{Cos}a-\text{Sin}a)+(\text{Cos}(a+b)-\text{Sin}(a+b)) \\ +(\text{Cos}(a+2b)-\text{Sin}(a+2b))+\ldots+(\text{Cos}(a+nb)-\text{Sin}(a+nb)),$$

oder gleichfalls wegen [4]

$$S-s=e^{-a}+e^{-(a+b)}+e^{-(a+2b)}+\ldots\ldots+e^{-(a+nb)}.$$

Auch hier ist die rechte Seite eine geometrische Reihe von bekannter Summe, also

$$4.\quad S-s=\frac{e^{b-a}-e^{-a-nb}}{e^b-1}.$$

Werden nun die Gleichungen 3., 4. combinirt, so erhält man:

$$S=\frac{e^{a+(n+1)b}-e^a+e^{b-a}-e^{-a-nb}}{2(e^b-1)},$$

$$s=\frac{e^{a+(n+1)b}-e^a-e^{b-a}+e^{-a-nb}}{2(e^b-1)};$$

und damit eigentlich schon die Lösung der Aufgabe. Es kommt nur noch darauf an, den Werthen von S, s gefälligere Formen zu geben, und dieses wird erreicht, wenn wir von den Exponentialgrössen wieder zu hyperbolischen Functionen zurückgehen. Dann wird nämlich:

$$S = \frac{\mathrm{Cos}(a+(n+1)b) - \mathrm{Cos}(n+nb) + \mathrm{Cos}(b-a) - a\mathrm{Cos} + \mathrm{Sin}(a+(n+1)b) + \mathrm{Sin}(a+nb) + \mathrm{Sin}(b-a) - \mathrm{Sin}a}{2(\mathrm{Cos}b + \mathrm{Sin}b - 1)},$$

$$s = \frac{\mathrm{Cos}(a+(n+1)b) + \mathrm{Cos}(a+nb) - \mathrm{Cos}(b-a) - \mathrm{Cos}a + \mathrm{Sin}(a+(n+1)b) - \mathrm{Sin}(a+nb) - \mathrm{Sin}(b-a) - \mathrm{Sin}a}{2(\mathrm{Cos}b + \mathrm{Sin}b - 1)}.$$

Der Nenner der beiden Brüche reducirt sich folgendermassen:

$$\mathrm{Cos}b = (\mathrm{Cos}\frac{b}{2})^2 + (\mathrm{Sin}\frac{b}{2})^2, \quad \mathrm{Sin}b = 2.\mathrm{Sin}\frac{b}{2}.\mathrm{Cos}\frac{b}{2}, \quad -1 = (\mathrm{Sin}\frac{b}{2})^2 - (\mathrm{Cos}\frac{b}{2})^2;$$

also

$$2(\mathrm{Cos}b + \mathrm{Sin}b - 1) = 4.\mathrm{Sin}\frac{b}{2}(\mathrm{Sin}\frac{b}{2} + \mathrm{Cos}\frac{b}{2}).$$

Zur Reduction der Zähler dienen die Formeln [3] und es wird:

$$\mathrm{Cos}(a+(n+1)b)+\mathrm{Cos}(a+nb)=2\,\mathrm{Cos}(a+\frac{2n+1}{2}b)\;\mathrm{Cos}\,\frac{b}{2},$$

$$\mathrm{Cos}(a+(n+1)b)-\mathrm{Cos}(a+nb)=2\,\mathrm{Sin}(a+\frac{2n+1}{2}b).\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2},$$

$$\mathrm{Sin}(a+(n+1)b)+\mathrm{Sin}(a+nb)=2\,\mathrm{Sin}(a+\frac{2n+1}{2}b).\mathrm{Cos}\,\frac{b}{2},$$

$$\mathrm{Sin}(a+(n+1)b)-\mathrm{Sin}(a+nb)=2\,\mathrm{Cos}(a+\frac{2n+1}{2}b).\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2};$$

$$\mathrm{Cos}(b-a)+\mathrm{Cos}\,a=2\,\mathrm{Cos}\left(\frac{b}{2}\right)\cdot\mathrm{Cos}(\frac{b}{2}-a),$$

$$\mathrm{Cos}(b-a)-\mathrm{Cos}\,a=2\,\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}\cdot\mathrm{Sin}\,(\frac{b}{2}-a),$$

$$\mathrm{Sin}(b-a)+\mathrm{Sin}\,a=2\,\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}\cdot\mathrm{Cos}\,(\frac{b}{2}-a),$$

$$\mathrm{Sin}(b-a)-\mathrm{Sin}\,a=2\,\mathrm{Cos}\,\frac{b}{2}.\mathrm{Sin}\,(\frac{b}{2}-a);$$

und durch Substitution in die Werthe von S, s:

$$S=\frac{2(\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}+\mathrm{Cos}\,\frac{b}{2})\,(\mathrm{Sin}(a+\frac{2n+1}{2}b)+\mathrm{Sin}(\frac{b}{2}-a))}{4.\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}\,(\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}+\mathrm{Cos}\,\frac{b}{2})}$$

$$=\frac{2\,\mathrm{Sin}(a+\frac{2n+1}{2}b)+\mathrm{Sin}(\frac{b}{2}-a)}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}},$$

$$s=\frac{2(\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}+\mathrm{Cos}\,\frac{b}{2})(\mathrm{Cos}(a+\frac{2n+1}{2}b)-\mathrm{Cos}\,(\frac{b}{2}-a))}{4.\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}\,(\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}+\mathrm{Cos}\,\frac{b}{2})}$$

$$=\frac{\mathrm{Cos}(a+\frac{2n+1}{2}b)-\mathrm{Cos}\,(\frac{b}{2}-a)}{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{b}{2}}.$$

Endlich ist noch:

$$\mathrm{Sin}(a+\frac{2n+1}{2}b)+\mathrm{Sin}(\frac{b}{2}-a)=2\,\mathrm{Sin}(\frac{n+1}{2}\,\mathrm{Cos}\,b).(a+\frac{nb}{2}),$$

$$\mathrm{Cos}(a+\frac{2n+1}{2}b)-\mathrm{Cos}(\frac{b}{2}-a)=2\,\mathrm{Sin}(\frac{n+1}{2}b).\mathrm{Sin}(a+\frac{nb}{2}).$$

Wir erhalten daher die Summen:

$$\text{I.}\quad \mathrm{Cos}\,a+\mathrm{Cos}(a+b)+\mathrm{Cos}(a+2b)+\ldots\ldots+\mathrm{Cos}(a+nb)$$

$$=\frac{\mathrm{Cos}(a+\frac{nb}{2}).\mathrm{Sin}(\frac{n+1}{2}b)}{\mathrm{Sin}\frac{b}{2}},$$

$$\text{II.}\quad \mathrm{Sin}\,a+\mathrm{Sin}(a+b)+\mathrm{Sin}(a+2b)+\ldots.+\mathrm{Sin}(a+nb)$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}(a+\frac{nb}{2}).\mathrm{Sin}(\frac{n+1}{2}b)}{\mathrm{Sin}\frac{b}{2}}.$$

Wird II. durch I. dividirt, so erhält man die merkwürdige Relation:

$$\text{III.}\quad \frac{\mathrm{Sin}\,a+\mathrm{Sin}(a+b)+\mathrm{Sin}(a+2b)+\ldots\ldots+\mathrm{Sin}(a+nb)}{\mathrm{Cos}\,a+\mathrm{Cos}(a+b)+\mathrm{Cos}(a+2b)+\ldots.+\mathrm{Cos}(a+nb)}$$

$$=\mathrm{Tg}(a+\frac{nb}{2}).$$

Es möchte nicht ohne Interesse sein, zu bemerken, dass die Formeln I., II., III. auch noch richtig bleiben, wenn statt der Functionalzeichen Sin, Cos, Tg die sin, cos, tg gesetzt werden. Die Ableitung jener Formeln geschieht bekanntlich auf die Weise, dass man, ähnlich wie wir es oben thaten,

$$\sum_{h=0}^{h=n}\sin(a+hb)=s,\qquad \sum_{h=0}^{h=n}\cos(a+hb)=S$$

setzt, die erstere Gleichung mit $\sqrt{-1}$ vervielfacht, zu der zweiten addirt und dann die Trennung des Reellen von dem Imaginären vornimmt.

Setzen wir in I. und II. der Reihe nach:

$$a=a,\quad b=2b,\quad n=n;\qquad a=a+b,\quad b=2b,\quad n=n;$$

$$a=a+b,\quad b=2b,\quad n=n-1;$$

so erhalten wir folgende sechs Summationen, bei denen wir uns der Kürze wegen des Summenzeichens bedienen wollen:

$$5.\quad \sum_{h=0}^{h=n} \mathrm{Cos}(a+2hb) = \frac{\mathrm{Cos}(a+nb).\mathrm{Sin}((n+1)b)}{\mathrm{Sin}b},$$

$$6.\quad \sum_{h=0}^{h=n} \mathrm{Cos}(a+(2h+1)b) = \frac{\mathrm{Cos}(a+(n+1)b).\mathrm{Sin}((n+1)b)}{\mathrm{Sin}b},$$

$$7.\quad \sum_{h=0}^{h=n-1} \mathrm{Cos}(a+(2h+1)b) = \frac{\mathrm{Cos}(a+nb).\mathrm{Sin}nb}{\mathrm{Sin}b},$$

$$8.\quad \sum_{h=0}^{h=n} \mathrm{Sin}\,(a+2hb) = \frac{\mathrm{Sin}(a+nb).\mathrm{Sin}((n+1)b)}{\mathrm{Sin}b},$$

$$9.\quad \sum_{h=0}^{h=n} \mathrm{Sin}(a+(2h+1)b) = \frac{\mathrm{Sin}(a+(n+1)b).\mathrm{Sin}((n+1)b)}{\mathrm{Sin}b},$$

$$10.\quad \sum_{h=0}^{h=n-1} \mathrm{Sin}(a+(2h+1)b) = \frac{\mathrm{Sin}(a+nb).\mathrm{Sin}nb}{\mathrm{Sin}b}.$$

Bilden wir nun die Differenzen 5. — 6., 5. — 7., 8. — 9., 8. — 10., so ist:

$$11.\quad \sum_{h=0}^{h=2n+1} (-1)^h \mathrm{Cos}(a+hb)$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}((n+1)b)}{\mathrm{Sin}b}\{\mathrm{Cos}(a+nb) - \mathrm{Cos}(a+(n+1)b)\},$$

$$12.\quad \sum_{h=0}^{h=2n} (-1)^h.\mathrm{Cos}(a+hb)$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}(a+nb)}{\mathrm{Sin}b}\{\mathrm{Sin}((n+1)b) - \mathrm{Sin}nb\},$$

$$13.\quad \sum_{h=0}^{h=2n+1} (-1)^h.\mathrm{Sin}(a+hb)$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}((n+1)b)}{\mathrm{Sin}b}\{\mathrm{Sin}\,(a+nb) - \mathrm{Sin}(a+(n+1)b)\},$$

14. $\sum_{h=0}^{h=2n} (-1)^h . \mathrm{Sin}(a+hb)$

$$= \frac{\mathrm{Sin}(a+nb)}{\mathrm{Sin}b} \{\mathrm{Sin}((n+1)b - \mathrm{Sin}nb\}.$$

Und führen wir die Differenzen der Cos. und Sin. wieder auf Producte zurück, so ist nach leichter Reduction:

IV. $\mathrm{Cos}a - \mathrm{Cos}(a+b) + \mathrm{Cos}(a+2b) - \ldots - \mathrm{Cos}(a+(2n+1)b)$

$$= -\frac{\mathrm{Sin}((n+1)b).\mathrm{Sin}(a+\frac{2n+1}{2}b)}{\mathrm{Cos}\frac{b}{2}},$$

V. $\mathrm{Cos}a - \mathrm{Cos}(a+b) + \mathrm{Cos}(a+2b) - \ldots + \mathrm{Cos}(a+2nb)$

$$= \frac{\mathrm{Cos}(\frac{2n+1}{2}b).\mathrm{Cos}(a+nb)}{\mathrm{Cos}\frac{b}{2}},$$

VI. $\mathrm{Sin}a - \mathrm{Sin}(a+b) + \mathrm{Sin}(a+2b) - \ldots - \mathrm{Sin}(a+(2n+1)b)$

$$= -\frac{\mathrm{Sin}((n+1)b).\mathrm{Cos}(a+\frac{2n+1}{2}b)}{\mathrm{Cos}\frac{b}{2}},$$

VII. $\mathrm{Sin}a - \mathrm{Sin}(a+b) + \mathrm{Sin}(a+2b) - \ldots + \mathrm{Sin}(a+2nb)$

$$= \frac{\mathrm{Cos}(\frac{2n+1}{2}b).\mathrm{Sin}(a+nb)}{\mathrm{Cos}\frac{b}{2}}.$$

Daraus folgt ferner:

VIII. $\frac{\mathrm{Sin}a - \mathrm{Sin}(a+b) + \mathrm{Sin}(a+2b) - \ldots + \mathrm{Sin}(a+2nb)}{\mathrm{Cos}a - \mathrm{Cos}(a+b) + \mathrm{Cos}(a+2b) - \ldots + \mathrm{Cos}(a+2nb)} = \mathrm{Tg}(a+nb),$

IX. $\frac{\mathrm{Cos}a - \mathrm{Cos}(a+b) + \mathrm{Cos}(a+2b) - \ldots - \mathrm{Cos}(a+(2n+1)b)}{\mathrm{Sin}a - \mathrm{Sin}(a+b) + \mathrm{Sin}(a+2b) - \ldots - \mathrm{Sin}(a+(2n+1)b)}$

$$= \mathrm{Tg}(a+\frac{2n+1}{2}b).$$

Und vergleicht man diese Resultate mit III., so ist:

$$\text{X.}\quad \frac{\mathfrak{Sin}\,a-\mathfrak{Sin}(a+b)+\mathfrak{Sin}(a+2b)-\ldots\ldots+\mathfrak{Sin}(a+2nb)}{\mathfrak{Cos}\,a-\mathfrak{Cos}(a+b)+\mathfrak{Cos}(a+2b)-\ldots\ldots+\mathfrak{Cos}(a+2nb)}$$

$$=\frac{\mathfrak{Sin}\,a+\mathfrak{Sin}(a+b)+\mathfrak{Sin}(a+2b)+\ldots\ldots+\mathfrak{Sin}(a+2nb)}{\mathfrak{Cos}\,a+\mathfrak{Cos}(a+b)+\mathfrak{Cos}(a+2b)+\ldots\ldots+\mathfrak{Cos}(a+2nb)},$$

$$\text{XI.}\quad \frac{\mathfrak{Cos}\,a-\mathfrak{Cos}(a+b)+\mathfrak{Cos}(a+2b)-\ldots\ldots-\mathfrak{Cos}(a+(2n+1)b)}{\mathfrak{Sin}\,a-\mathfrak{Sin}(a+b)+\mathfrak{Sin}(a+2b)-\ldots\ldots-\mathfrak{Sin}(a+(2n+1)b)}$$

$$=\frac{\mathfrak{Sin}\,a+\mathfrak{Sin}(a+b)+\mathfrak{Sin}(a+2b)+\ldots\ldots+\mathfrak{Sin}(a+(2n+1)b)}{\mathfrak{Cos}\,a+\mathfrak{Cos}(a+b)+\mathfrak{Cos}(a+2b)+\ldots+\mathfrak{Cos}(a+(2n+1)b)}.$$

Auch aus den bisherigen weiteren Sätzen kann man unmittelbar auf Analoges in der Theorie der cyklischen Functionen schliessen. Zu dieser Uebertragung dienen die bekannten Sätze:

$$\mathfrak{Sin}\,xi=i.\sin x,\quad \mathfrak{Cos}\,xi=\cos x;$$

wo $i=\sqrt{-1}$. Und so finden wir, dass in IV. das Zeichen des Summenausdruckes das entgegengesetzte wird, während V., VI., VII. unverändert bleiben.

IX.

Versuche über die elektrische Induction.

Von

Herrn Director W. Knochenhauer

zu Meiningen.

Zweite Abhandlung.

Zu den Versuchen über die Inductionserscheinungen bei Anwendung der Nebenbatterie wurde der Apparat (Taf. IV. Fig. 2.) in soweit verändert, dass die Glasstäbe *AB* und *CD* in einem neuen Rahmen auf 4′ Entfernung von einander gebracht wurden, damit die senkrecht herablaufenden Enden der gespannten Drähte keinen störenden Einfluss auf einander übten; die Drähte in ihrer ganzen Länge gradlinig zu spannen, gestattete das Local nicht. Ausserdem war der Rahmen erweitert worden, so dass die Drähte bis auf 18″ aus einander gerückt werden konnten. Um die Seitendrähte *OX* und *QZ* auch mehr aus einander zu bringen, wurde der Funkenmesser *Y* nach Taf. IV. Fig. 4. mit den Belegungen der Nebenbatterie selbst in Verbindung gesetzt, indem ein starker Draht von der einen Kugel aus gegen die innere, ein anderer von der zweiten Kugel aus gegen die äussere Belegung fest geklemmt ward. Meine anfängliche Absicht, die Kugeln des Funkenmessers *Y* in einer constanten Entfernung von einander zu lassen und dagegen wie früher bei den Scheiben (Taf. IV. Fig. 1.) die Batterieladung je nach der geringern oder grössern Distanz der gespannten Drähte zu vermindern oder zu steigern, erwies sich sogleich als unstatthaft, da die Induction bei stärkerer Batterieladung schneller als bei schwächerer abnimmt, auch das Maximum der Induction im erstern Falle einen etwas längern Schlies

sungsdraht der Nebenbatterie fordert als im letztern. Die Art, die Versuche anzustellen, war also durchgehends folgende: Nachdem der Schliessungsdraht der Hauptbatterie aus einer bestimmten Länge Kupferdraht (überall von 0,513 par. Linien Durchm.) gebildet und den Kugeln des Funkenmessers S eine feste Stellung gegeben war, welche die Ladung J der Hauptbatterie bestimmte, wurden die gespannten Drähte bis auf diejenige Entfernung von einander gerückt, wo der Funkenmesser Y noch einen Funken von wenigstens 0,4 bis 0,5 Linien Länge gab; dem Schliessungsdraht der Nebenbatterie war bereits annähernd diejenige Länge gegeben, welche das Maximum der Induction lieferte; darauf wurde dieser Schliessungsdraht verkürzt oder verlängert, bis das Maximum genau erreicht war. Erst jetzt wurden die Funken über Y bei den verschiedenen Distanzen der gespannten Drähte gemessen. In andern Fällen wurde der Schliessungsdraht der Nebenbatterie von seiner Länge im Maximum der Induction aus um 2′, 4′..... verkürzt oder verlängert. Die Berechnung der beiden Constanten in der Formel $i = \frac{aE}{b+x}$, welche die inducirte Spannung i der Nebenbatterie ausdrückt, geschah immer aus den Beobachtungen bei der kleinsten und der grössten Entfernung der Drähte; x bezeichnete aber abweichend gegen früher die Distanz in par. Zollen, da hiernach eingestellt wurde; die Werthe von aE und b sind also gegenwärtig 12mal kleiner als die in der ersten Abhandlung gefundenen*). Die beobachteten Werthe von i (in den folgenden Tabellen, wo sie angegeben sind, mit FM. bezeichnet) konnten indess nicht unmittelbar in Rechnung genommen werden, da sie, wie schon die in der ersten Abhandlung mitgetheilte Reihe gezeigt hatte, vorher um eine bestimmte Zahl vergrössert werden mussten, um welche der Funkenmesser die Spannung zwischen den Belegungen der Nebenbatterie zu klein angab. Die Correction wurde dadurch ermittelt, dass der Funkenmesser Y Stellungen wie in Taf. IV. Fig. 3. bekam, wodurch er um eine bestimmte Zahl Fusse von den beiden Belegungen entfernt ward**). — Die sämmtlichen Versuche waren zu zwei verschiedenen Zeiten angestellt worden, ein Theil im Winter 1850, der andere im Sommer 1851; beide Abtheilungen muss ich auseinander halten, da die ersten mit einem kleinen Fehler behaftet sind, dessen Grund ich bis jetzt nicht anzugeben vermag. Ich werde die Versuche der ersten Abtheilung mit gewöhnlichen, die

---

*) Wegen der Berechnung bemerke ich, dass ich die Werthe von i ursprünglich mit zwei Decimalen notirt und mit diesen gerechnet habe.

**) Im Interesse anderer glaube ich beifügen zu müssen, dass jeder Beobachter die für seinen Apparat etwa erforderliche Correction besonders bestimmen muss. Bei meinen jetzigen Versuchen, wo ich etwas über eine Linie dicken, in seiner ganzen Länge ausgespannten Draht und andere Flaschen anwende, fällt die Correction ganz fort. Soweit ich bereits die Verhältnisse kenne, hatte die Correction ihren Grund in der Art, wie der Schliessungsdraht bei den bisherigen Flaschen mit der innern Belegung verbunden war.

der andern mit römischen Zahlen numeriren. Im Verlauf der Beobachtungen kam ich zur Ueberzeugung, dass sie noch ungenügend blieben, um auf alle Fragen, die hier aufgeworfen werden müssen, eine sichere Antwort zu geben; es werden hierzu jedenfalls längere gespannte Drähte erfordert, als ich anwenden konnte. Ich bitte demnach die mitzutheilenden Versuche nur als einen Anfang anzusehen, dies neue Gebiet von, wie ich glaube, nicht unwichtigen Thatsachen zu durchmustern und zunächst wenigstens diejenigen Punkte hervorzusuchen, die mit andern Mitteln noch strenger zu erforschen sind. Dabei wolle man noch berücksichtigen, dass der Zustand der Luft oder andere Umstände kleine Aenderungen in den Zahlen herbeiführten, wenigstens habe ich bei ganz unverändertem Apparate an einem spätern Tage oft etwas grössere oder kleinere Angaben am Funkenmesser erhalten als an einem frühern, ja an verschiedenen Tagen nicht einmal die gleiche Schärfe in den Messungen gefunden. Man erwarte also von diesen meinen Beobachtungen nicht mehr als sie gewähren können; sie geben eben nur eine erste Annäherung, die als solche selbst die sonst nothwendige Rücksicht auf die Ungleichheit der angewandten Flaschen entbehrlich macht. — Ich gehe zur Mittheilung der Versuche über, in denen die Länge der gespannten Drähte 8′ betrug.

Nr. 1. HB. 2 Flaschen (1+2), NB. 2 Flaschen (3+4). $J=37{,}5$.

Hdr. $=19'{,}7$; Ndr. $=22'{,}0$.

Dist.	FM(Fig.3)	*i* abgel.	FM(Fig.4)	Corr.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z.	25,7	34,1	29,6	4,5	34,1	34,1
3	22,9	30,6	26,1	4,4	30,6	30,5
6	19,5	26,6	22,1	4,6	26,6	26,3
9	16,9	23,6	19,1	4,5	23,6	23,1
12	14,6	20,8	16,4	4,5	20,8	20,6
15	12,8	18,7	14,1	4,6	18,6	18,6
				Mittel 4,5.		

$b=15{,}9$; $aE=577$.

Die Ueberschrift giebt die Zusammensetzung der Haupt- und der Nebenbatterie an; beide waren hier aus zwei Flaschen gebildet, nämlich jene aus Fl. 1. und 2., diese aus Fl. 3 und 4. Das beigefügte J giebt die Ladung der Hauptbatterie an, wie sie aus der Entfernung der Kugeln am Funkenmesser S nach der frühern Weise hergeleitet war. Unter Hdr. und Ndr. steht die Länge beider Schliessungsdrähte notirt, welche das Maximum der Induction erforderte; die Drähte in den Flaschen wurden bei zweien zu 0,5, bei einer allein zu 1,0 Fuss berechnet; der Funkenmesser S ward in äquivalenter Länge zu 0,7 Fuss hinzugezählt. In der Tabelle selbst enthält die erste Columme die Distanz der gespannten Drähte in par. Zollen (im Lichten gemessen), die zweite Co-

lumne giebt die am Funkenmesser Y beobachteten Spannungen an, als er nach Taf. IV. Fig. 3. um $3\frac{1}{2}'$ von den Belegungen der Nebenbatterie entfernt stand; aus diesen Zahlen wurde die Spannung i der Nebenbatterie (i abgel.) abgeleitet, indem zunächst 2,9 addirt und dann die Spannungsdifferenz für $3\frac{1}{2}'$ hinzugefügt wurde. Nach vorläufigen Beobachtungen hatte sich nämlich ergeben, dass der wie Taf. IV. Fig. 3. in die Leitung eingeschobene Funkenmesser Y bei $J=36{,}75$ die Spannung um 2,80, bei $J=52{,}25$ um 3,97 zu klein angab; dazu kam aus der ersten Abhandlung 2,26 bei $J=31{,}25$ und aus einer spätern Beobachtung (Vers. Nr. I.) 2,88 bei $J=37{,}50$; der in die Leitung der Nebenbatterie eingeschobene Funkenmesser gab also ähnlich wie im einfachen Schliessungsdraht einer gewöhnlichen Batterie die Spannung um eine zu J proportionale Grösse zu gering an, im Mittel um 3,0 für $J=40{,}0$. Wurden mit den so berechneten Werthen von i die Angaben des nach Taf. IV. Fig. 4. unmittelbar mit den Belegungen der Nebenbatterie in Verbindung stehenden Funkenmessers verglichen, die in der vierten Columne enthalten sind, so machte sich für ihn in dieser Stellung eine Correction von 4,5 bei $J=36{,}75$ erforderlich; die Reihe Nr. 4. gab dieselbe Correction $=3{,}4$ bei $J=27{,}5$, die Reihe Nr. 5. $=6{,}0$ bei $J=53{,}2$, endlich die Reihe Nr. I. $=4{,}3$ bei $J=37{,}5$. Aus allen Angaben zusammen folgte eine wiederum mit J proportional wachsende Correction, die für $J=40{,}0$ im Mittel 4,5 war. In der ersten Abtheilung habe ich die unmittelbar gefundene Correction beibehalten, in der zweiten Abtheilung dagegen bei $J=37{,}5$ die beobachteten Werthe von i um 4,3, bei $J=53{,}0$ um 6,0 und bei $J=63{,}7$ um 7,25 vergrössert. Will man demnach aus den von mir der Kürze wegen in den folgenden Tabellen als i beob. notirten Werthen die wirklich gemessene Distanz der Kugeln am Funkenmesser Y (nach Taf. IV. Fig. 4.) in par. Linien ableiten, so muss man zunächst die eben angegebene Correction und ausserdem 3,25 subtrahiren und den Rest mit 20 dividiren. Die in der sechsten Columne enthaltenen um 4,5 vergrösserten Werthe von i wurden nach der Formel $i=\frac{aE}{b+x}$ berechnet, und die aus den beiden äussersten Beobachtungen abgeleiteten Werthe von b und aE unter die Reihe gesetzt. Die folgenden Tabellen werden nur die erste, sechste und siebente Columne enthalten, wenn anders nicht die Correction durch sie besonders ermittelt worden ist.

Nr. 2. Wie bei Nr. 1. Ndr. $=22',0+$

Dist.	+ 2' *i* beob.	+ 2' *i* ber.	+ 4' *i* beob.	+ 4' *i* ber.	+ 6' *i* beob.	+ 6' *i* ber.
1 Z	32,1	32,1	29,3	29,3	26,3	26,3
3	27,6	28,0	24,2	24,5	21,0	21,3
6	23,2	23,5	19,5	19,8	16,6	16,6
9	20,3	20,3	16,6	16,6		
12	17,9	17,9				

$b=12,7$ $b=9,4$ $b=7,5$

$aE=441.$ $aE=306.$ $aE=227.$

Dist.	+ 8' *i* beob.	+ 8' *i* ber.
1 Z	23,5	23,5
2	20,2	20,7
3	18,0	18,4
5	15,2	15,2

$b=6,2$

$aE=170.$

Dist.	+ 10' *i* beob.	+ 10' *i* ber.	+ 12' *i* beob.	+ 12' *i* ber.	+ 14' *i* beob.	+ 14' *i* ber.
½ Z			21,9	21,9	20,4	20,4
1	21,4	21,4	19,8	20,0	18,4	18,4
2	18,1	18,4	17,0	17,0	15,4	15,4
3	16,2	16,2				

$b=5,3$ $b=4,6$ $b=4,1$

$aE=134.$ $aE=112.$ $aE=94.$

Im vorstehenden Versuche wurde der Schliessungsdraht der Nebenbatterie von seiner Länge 22',0 für das Maximum der Induction nach und nach um 2', 4'..... verlängert; dadurch sanken die Werthe von b und aE, die letztern jedoch in der Weise, dass von $+6'$ (oder $+8'$) an das Product aus aE und der hinzugefügten Länge (l) constant blieb; es ist nämlich

$$227\times6=1362,\quad 170\times8=1360,\quad 134\times10=1340,\quad 112\times12=1344,\quad 94\times14=1316,$$

im Mittel also $aE\times l=1350.$

Nr. 3. Batterie wie Nr. 1. $J = 37{,}5$.

Hdr. 27′,7; Ndr. = 30′,0.

Dist.	Max.		— 2′		— 4′		— 6′	
	i beob.	*i* ber.	*i* beob.	*i* ber.	*i* beob.	*i* ber.	*i* beob.	*i* ber.
1Z	31,5	31,5	31,5	31,5	29,8	29,8	26,9	26,9
3	27,1	27,4	26,8	26,8	24,1	24,3	21,3	21,6
6	22,8	23.0	22,0	21,8	19,0	19,0	16,6	16,6
9	20,0	19,8	18,4	18,4				
12	17,4	17,4						

$b = 12{,}5$ $b = 10{,}2$ $b = 8{,}8$ $b = 7{,}1$

$aE = 426$ $aE = 354$ $aE = 263$ $aE = 218$.

Dist.	— 8′		— 10′		— 12′	
	i beob.	*i* ber.	*i* beob.	*i* ber.	*i* beob.	*i* ber.
½ Z					22,3	22,3
1	24,4	24,4	21,9	21,9	19,8	20,2
2			18,4	18,8	17,0	17,0
3	18,6	18,9	16,4	16,4		
5	15,4	15,4				

$b = 5{,}9$ $b = 5{,}0$ $b = 4{,}3$

$aE = 168$ $aE = 130$ $aE = 108$.

Der Schliessungsdraht der Hauptbatterie war um 8′ verlängert, wodurch eine gleiche Verlängerung für die Nebenbatterie nothwendig wurde; der letztere Schliessungsdraht wurde nach und nach um 2′, 4′..... verkürzt. Auch hier sind die Producte aus aE und der fortgenommenen Länge constant, nämlich

$218 \times 6 = 1308$, $168 \times 8 = 1344$, $130 \times 10 = 1300$, $108 \times 12 = 1296$.

somit im Mittel

$$aE \times l = 1310.$$

Nr. 4. Batterie wie Nr. 1. $J = 27{,}5$.
Hdr. 19′,7; Ndr. 21′,5.

Dist.	FM(Fig.3)	*i* abgel.	FM(Fig.4)	Corr.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z	18,9	25,0	21,6	3,4	25,0	25,0
2	17,7	23,7	20,2	3,4	23,7	23,8
3	16,8	22,6	19,1	3,5	22,8	22,7
6	14,6	19,9	16,5	3,4	19,9	20,0
9	12,8	17,8	14,4	3,4	17,8	17,8
			Mitt.	3,4		

$b = 18{,}7$; $aE = 493$.

Nr. 5. Batterie wie Nro. 1. $J = 53{,}2$.
Hdr. 19′,7; Ndr. 22′,5.

Dist.	FM(Fig.3)	*i* abgel.	FM(Fig.4)	Corr.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z	32,5	43,2	37,2	6,0	43,2	43,2
3	28,3	38,3	32,2	6,0	38,3	38,1
6	23,4	32,4	26,4	6,0	32,4	32,3
9	19,7	28,1	22,0	6,1	28,0	28,0
12	17,0	25,0	18,9	6,1	24,9	24,7
15	14,7	22,2	16,2	6,0	22,2	22,2
18	13,0	20,1	14,1	6,0	20,1	20,1
			Mitt.	6,0		

$b = 13{,}7$; $aE = 636$.

Nr. 6. Wie Nro. 5. Ndr. 22′,5 + ...

+ 2′		+ 4′		+ 6′		+ 8′	
Dist.	*i* beob.	Dist.	*i* beob.	Dist.	*i* beob.	Dist.	*i* beob.
1 Z	40,2	1	36,7	1	33,2	1	29,5
12	21,0	12	17,7	6	20,6	6	18,2

$b = 11{,}0$ $b = 9{,}3$ $b = 7{,}2$ $b = 6{,}9$
$aE = 483$ $aE = 377$ $aE = 272$ $aE = 227$

+ 10′		+ 12′	
Dist.	*i* beob.	Dist.	*i* beob.
1	26,9	1	24,9
4	18,6	3	18,8

$b = 5{,}8$ $b = 5{,}2$
$aE = 182$ $aE = 155$.

Wird die Ladung der Hauptbatterie gesteigert, so sinkt nach Nr. 5. der Werth von b. Nach Nr. 6. bleibt von $l=8'$ an das Product $aE \times l$ constant, $=1816=1820=1860$ im Mittel $=1830$.

Nr. I. HB. 2 Flaschen (1+2), NB. 1 Flasche (4). $J=37{,}5$.

Hdr. 19',7; Ndr. 38',5.

Dist.	FM(Fig.3)	i abgel.	FM(Fig.4)	Corr.	i beob.	i ber.
1 Z	33,0	40,1	35,6	4,4	39,9	39,9
3	28,1	34,6	30,1	4,5	34,4	34,5
6	23,0	28,9	24,7	4,2	29,0	28,6
9	19,1	24,6	20,3	4,2	24,6	24,4
12	16,1	21,2	17,0	4,2	21,3	21,3
			Mitt.	4,3		

$b=11{,}5$; $aE=500$.

Nr. II. Wie Nr. I. Ndr. 38',5 — ....

Dist.	—2' i beob.	—2' i ber.	—4' i beob.	—4' i ber.	—6' i beob.	—6' i ber.	—8' i beob.	—8' i ber.
1 Z	39,8	39,8	38,2	38,2	35,6	35,6	32,4	32,4
3	33,8	33,6	31,3	31,3	28,6	28,6	25,0	25,1
6	27,6	27,2	24,3	24,2	22,1	22,1	18,8	18,8
9	23,2	22,9	19,9	19,9				
12	19,7	19,7						

$b=9{,}8$ $b=7{,}7$ $b=7{,}2$ $b=5{,}8$

$aE=430$ $aE=332$ $aE=293$ $aE=222$

Dist.	—10' i beob.	—10' i ber.	—12' i beob.	—12' i ber.
1 Z	30,8	30,8	28,6	28,6
3	23,6	23,8	20,8	20,8
5	19,4	19,4		

$b=5{,}8$ $b=4{,}4$

$aE=210$ $aE=154$.

Hieraus

$$210 \times 10 = 2100, \quad 154 \times 12 = 1848.$$

im Mittel $aE \times l = 1974$. Der Funkenmesser Y schlug von $-8'$ an schon ziemlich unsicher, daher

Nr. III. Repetition von Nr. I. und II.*)

Max.			−10′			−12′		
1 Z	40,1	$b = 12,5$	1 Z	31,6	$b = 5,2$	1 Z	29,1	$b = 4,5$
12 Z	22,1	$aE = 541$	3 Z	23,8	$aE = 194$	3 Z	21,3	$aE = 161$.

Hieraus

$$194 \times 10 = 1940 \quad \text{und} \quad 161 \times 12 = 1932,$$

im Mittel $aE \times l = 1936$.

Nr. IV. Repetition von Nr. I.

1 Z	39,8	$b = 12,0$
12 Z	21,7	$aE = 524$.

Nr. V. Batterie wie Nr. I. $J = 37,5$.

Hdr. 27′,7; Ndr. 54′,0.

Dist.	*i* beob.	*i* ber.	
1 Z	36,9	36,9	$b = 10,8$
3	31,3	31,6	$aE = 436$.
6	25,7	25,9	
9	22,0	22,0	

Nr. VI. Repet. von Nr. V.

1 Z	36,6	$b = 10,6$
9 Z	21,7	$aE = 425$.

---

*) Der Kürze wegen werde ich da, wo nur die beiden äussersten Beobachtungen angestellt worden sind, die Ueberschriften Dist. und *i* beob. fortlassen.

Nr. VII. HB. 3 Flaschen (1+2+3), NB. 1 Flasche (4). $J = 37,5$

Hdr. 19′,7; Ndr. 54′,0.

Dist.	*i* beob.	*i* ber.	
1 Z	45,8	45,8	
3	38,7	39,1	$b = 10,8$
6	32,2	32,1	$aE = 541.$
9	27,2	27,2	
12	23,7	23,7	

Nr. VIII. und IX. Repet. von VII.

1 Z	45,8	$b = 10,4$		1 Z	45,3	$b = 10,7$
12 Z	23,3	$aE = 527.$		12 Z	23,3	$aE = 529.$

Nr. X. Wie Nr. VII. Ndr. 54′,0 – 16′.

1 Z	31,9	$b = 4,6$	
4 Z	20,9	$aE = 183$,	also $aE \times l = 2928.$

In den Versuchen I. bis IX. stimmte die Länge des Schliessungsdrahts der Nebenbatterie beim Maximum der Induction genauer mit dem Gesetze überein, dass er sich umgekehrt zum Hauptdraht wie die Flaschenzahl in beiden Batterien verhalte, als wie dies bei den Versuchen 1—5 der Fall gewesen war, deshalb wurden die letzten Versuche kurz wiederholt, woraus sich wirklich eine kleine Differenz gegen früher ergab.

Nr. XI. und XII. HB. 2 Flaschen (1+2), NB. 2 Flaschen (3+4). $J = 37,5.$

Hdr. 19′,7; Ndr. 20′,8.

1 Z	31,8	$b = 16,2$		1 Z	31,4	$b = 16,2$
12 Z	19,4	$aE = 546.$		12 Z	19,4	$aE = 542.$

Nr. XIII. und XIV. Batt. wie Nr. XI. $J = 53,0$

Hdr. 19′,7; Ndr. 21′,5.

1 Z	41,9	$b = 14,1$		1 Z	41,5	$b = 13,7$
12 Z	24,2	$aE = 635.$		12 Z	23,7	$aE = 611.$

Nr. XV. Batt. wie Nr. XI. $J=53,0$.

Hdr. 31′,7; Ndr. 33′,5.

1 Z	36,1	$b=8,8$
9 Z	19,9	$aE=353$.

Nr. XVI. HB. 1 Flasche (2), NB. 2 Flaschen (3+4). $J=53,0$.

Hdr. 32′,2; Ndr. 18′,5.*)

Max.			+2′		
1 Z	30,0	$b=11,4$	1 Z	28,2	$b=10,4$
6 Z	21,4	$aE=372$.	6 Z	19,6	$aE=321$.

+4′			+6′		
1 Z	25,2	$b=7,6$	1 Z	22,7	$b=6,1$
4 Z	18,8	$aE=217$.	3 Z	17,7	$aE=162$.

Nr. XVII. Batt. wie Nr. XI. $J=53,0$.

Hdr. 47′,7; Ndr. 49′,5.

1 Z	31,0	$b=8,1$
6 Z	20,0	$aE=282$.

Nr. XVIII. Batt. wie XI. $J=63,7$.

Hdr. 47,7; Ndr. 49′,5.

1 Z	36,0	$b=7,2$	1 Z	35,5	$b=7,5$
6 Z	22,4	$aE=296$.	6 Z	22,4	$aE=303$.

Nr. XIX. HB. 1 Flasche (2), NB. 2 Flaschen (3+4). $J=63,7$.

Hdr. 48′,2; Ndr. 29′,5.**)

1 Z	29,5	$b=8,5$
5 Z	20,7	$aE=280$.

---

*) Diese Länge des Nebendrahts entspricht dem Gesetze vollkommen, da das Verhältniss von Fl. 2 zu Fl. 3+4 wie 1,097:1,927 oder wie 1:1,76 ist.

**) Die Länge des Nebendrahts ist in beiden Fällen zu gross; dies Verhältniss tritt ein, wenn der inducirte Strom an Lebhaftigkeit verliert, wobei die Angaben des Funkenmessers unsicher werden. S. das Folgende.

Nr. XX. HB. 1 Flasche (2), NB. 3 Flaschen (1+3+4). $J=63,7$.

Hdr. 48′,2; Ndr. 19′,4.**)

$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & +4' \\ \begin{array}{l|l|l} 1\ \text{Z} & 26,7 & b=11,1 \\ 4\ \text{Z} & 20,9 & aE=323. \end{array} & \left|\ \begin{array}{l|l|l} 1\ \text{Z} & 23,2 & b=7,3 \\ 3\ \text{Z} & 18,7 & aE=194, \end{array}\right. \end{array} \quad \text{also } aE \times l = 776.$$

Da ich die Producte $aE \times l$ genauer bestimmt zu haben wünschte, die in Rücksicht auf meine frühern Untersuchungen (Jahresb. d. Wien. Acad.) erst constant werden können, wenn l bei gleichen Batterien nahe die Länge von 8′, bei HB. 2 Fl. NB. 1 Fl. von 12′, bei HB. 3 Fl. NB. 1 Fl. von 16′ und bei umgekehrter Flaschenzahl von $5^1/_3$′ und von 4′ erlangt hat, so suchte ich die Resultate von kleinen Fehlern in der Länge des Nebendrahts beim Maximum dadurch unabhängig zu machen, dass ich, soweit es möglich war, eine gleiche Länge Draht fortnahm und hinzufügte, und das Mittel aus beiden Angaben als den annähernd richtigen Werth ansah. Hierdurch entstanden noch folgende Versuche:

Nr. XXI. HB 3 Flaschen (1+2+3), NB 1 Flasche (4). $J=37,5$.

Hdr. 19′,7; Ndr. 54′,0.

$$-16'\left|\begin{array}{l|l|l} 1\ \text{Z} & 32,3 & b=4,8 \\ 4\ \text{Z} & 21,3 & aE=186. \end{array}\right. \quad \Big| \quad +16'\left|\begin{array}{l|l|l} 1\ \text{Z} & 29,4 & b=5,5 \\ 4\ \text{Z} & 20,2 & aE=192. \end{array}\right.$$

$$aE \times l = 3024.$$

Nr. XXII. HB 2 Flaschen (1+2), NB 1 Flasche (4). $J=37,5$.

Hdr. 19′, 7; Ndr. 38′,5.

$$-10^1/_2{}'\left|\begin{array}{l|l|l} 1\ \text{Z} & 30,9 & b=5.1 \\ 4\ \text{Z} & 20,7 & aE=188. \end{array}\right. \quad \Big| \quad +10^1/_2{}'\left|\begin{array}{l|l|l} 1\ \text{Z} & 29,1 & b=6,3 \\ 4\ \text{Z} & 20,6 & aE=211. \end{array}\right.$$

$$aE \times l = 2100.$$

Nr. XXIII. HB 2 Flaschen (1+2), NB 2 Flaschen (3+4). $J=37,5$.

Hdr. 19′,7; Ndr. 20′,8.

$$+10'\left|\begin{array}{l|l|l} 1\ \text{Z} & 21,3 & b=6,0 \\ 4\ \text{Z} & 14,8 & aE=148. \end{array}\right. \quad aE \times l = 1480$$

**) S. vorhergehende Seite.

Nr. XXIV. HB 2 Flaschen (1 + 2), NB 2 Flaschen (3 + 4) $J = 37{,}5$.

Hdr. 25′,7; Ndr. 27′,5 (angenommen).

$$-8' \left| \begin{matrix} 1 & Z \\ 4 & Z \end{matrix} \right| \begin{matrix} 24{,}5 \\ 17{,}2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} b = 6{,}1 \\ aE = 173. \end{matrix} \right. \quad \Bigg| \quad +8' \left| \begin{matrix} 1 & Z \\ 4 & Z \end{matrix} \right| \begin{matrix} 22{,}6 \\ 16{,}3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} b = 6{,}8 \\ aE = 177. \end{matrix} \right.$$

$$aE \times l = 1400.$$

Nr. XXV. HB 2 Flaschen (1+2), NB 1 Flasche (4). $J = 37{,}5$.

Hdr. 25′,7; Ndr. 50′,5 (angenommen).

$$-10\tfrac{1}{2}' \left| \begin{matrix} 1 & Z \\ 4 & Z \end{matrix} \right| \begin{matrix} 31{,}9 \\ 22{,}9 \end{matrix} \left| \begin{matrix} b = 6{,}6 \\ aE = 244. \end{matrix} \right. \quad \Bigg| \quad +10\tfrac{1}{2}' \left| \begin{matrix} 1 & Z \\ 4 & Z \end{matrix} \right| \begin{matrix} 28{,}1 \\ 20{,}1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} b = 6{,}6 \\ aE = 211. \end{matrix} \right.$$

$$aE \times l = 2394.$$

Nr. XXVI. HB 1 Flasche (2), NB 2 Flaschen (3+4). $J = 37{,}5$.

Hdr. 26′,2; Ndr. 15′,5 (angenommen).

$$+6' \left| \begin{matrix} 1 & Z \\ 3 & Z \end{matrix} \right| \begin{matrix} 17{,}1 \\ 13{,}5 \end{matrix} \left| \begin{matrix} b = 6{,}5 \\ aE = 129. \end{matrix} \right. \quad aE \times l = 774.$$

Nr. XXVII. HB 2 Flaschen (1 + 2), NB 2 Flaschen (3 + 4). $J = 53{,}0$.

Hdr. 25′,7; Ndr. 27′,5 (angenommen).

$$-8' \left| \begin{matrix} 1 & Z \\ 5 & Z \end{matrix} \right| \begin{matrix} 32{,}3 \\ 20{,}4 \end{matrix} \left| \begin{matrix} b = 5{,}8 \\ aE = 220. \end{matrix} \right. \quad \Bigg| \quad +8' \left| \begin{matrix} 1 & Z \\ 5 & Z \end{matrix} \right| \begin{matrix} 30{,}6 \\ 20{,}6 \end{matrix} \left| \begin{matrix} b = 7{,}3 \\ aE = 254. \end{matrix} \right.$$

$$aE \times l = 1896.$$

Nr. XXVIII. HB 1 Flasche (2), NB 2 Flaschen (3+4). $J = 53{,}0$.

Hdr. 26′,2; Ndr. 15′,5 (angenommen).

$$+6' \left| \begin{matrix} 1 & Z \\ 4 & Z \end{matrix} \right| \begin{matrix} 23{,}7 \\ 17{,}5 \end{matrix} \left| \begin{matrix} b = 7{,}4 \\ aE = 200. \end{matrix} \right. \quad \Bigg| \quad +8' \left| \begin{matrix} 1 & Z \\ 4 & Z \end{matrix} \right| \begin{matrix} 21{,}6 \\ 15{,}7 \end{matrix} \left| \begin{matrix} b = 7{,}0 \\ aE = 174. \end{matrix} \right.$$

$$aE \times l = 1296.$$

Nr. XXIX. HB 2 Flaschen (1 + 2), NB 2 Flaschen (3 + 4). $J = 63,7$.

Hdr. 25′,7; Ndr. 27′,5 (angenommen).

−8′	1 Z	37,5	$b = 5,9$	+8′	1 Z	36,0	$b = 7,5$
	6 Z	21,7	$aE = 257$.		6 Z	22,6	$aE = 304$.

$aE \times l = 2432$.

Nr. XXX. HB 1 Flasche (2), NB 2 Flaschen (3+4). $J = 63,7$.

Hdr. 26′,2; Ndr. 15′,5 (angenommen).

+6′	1 Z	28,1	$b = 7,8$	+8′	1 Z	26,0	$b = 7,1$
	4 Z	21,0	$aE = 250$.		4 Z	19,0	$aE = 212$.

$aE \times l = 1600$.

Nr. XXXI. HB 1 Flasche (2), NB 2 Flaschen (3+4). $J = 53,0$.

Hdr. 32′,2; Ndr. 18′,5.

Max.	1 Z	30,1	$b = 10,7$	+6′	1 Z	22,4	$b = 6,5$
	6 Z	21,2	$aE = 353$.		4 Z	16,0	$aE = 168$.

$aE \times l = 1008$.

Nr. XXXII. HB 1 Flasche (2), NB 2 Flaschen (3+4). $J = 63,7$.

Hdr. 32′,2; Ndr. 19′,0.

Max.	1 Z	34,7	$b = 10,2$	+7½′	1 Z	23,7	$b = 6,6$
	6 Z	24,0	$aE = 388$.		4 Z	17,0	$aE = 180$.

$aE \times l = 1350$.

Nr. XXXIII. HB 1 Flasche (2), NB 1 Flasche (4).*) $J = 53,0$.

Hdr. 32′,2; Ndr. 33′,5.

Max.			−8′			+8′		
1 Z	37,0	$b = 8,7$	1 Z	29,1	$b = 5,2$	1 Z	28,0	$b = 6,5$
9 Z	20,3	$aE = 360$.	4 Z	19,6	$aE = 180$.	4 Z	20,0	$aE = 210$.

$aE \times l = 1560$.

---

*) Die Anzahl der Flaschen in den Batterien hat bei gleichem Verhältnisse keinen Einfluss auf die Resultate, jedoch vorausgesetzt, dass die Flaschen an Grösse oder Ladungskraft nicht von einander abweichen.

Nr. XXXIV. Batt. wie Nr. XXXIII. $J=63{,}7$.

Hdr. 32′,2; Ndr. 33′,5 (angenommen).

Max.			$-8'$			$+8'$		
1 Z	43.0	$b=8{,}0$	1 Z	33,2	$b=5{,}1$	1 Z	33,5	$b=6{,}6$
9 Z	22,7	$aE=386$.	4 Z	22,2	$aE=202$.	4 Z	24,0	$aE=254$.

$aE\times l=1824$.

Nr. XXXV. Batt. wie Nr. XXXIII. $J=63{,}7$.

Hdr. 48′,2; Ndr. 49′,0.

Max.			$-8'$			$+8'$		
1 Z	36,0	$b=7{,}2$	1 Z	27,7	$b=5{,}9$	1 Z	32,2	$b=6{,}3$
6 Z	22,4	$aE=292$.	4 Z	19,4	$aE=193$	4 Z	22,9	$aE=227$.

$aE\times l=1680$.

Nr. XXXVI. HB 1 Flasche (2), NB 2 Flaschen (3+4). $J=63{,}7$.

Hdr. 48′,2; Ndr. 29′,0.

Max.			$-8'$			$+8'$		
1 Z	30,4	$b=8{,}7$	1 Z	23,9	$b=5{,}4$	1 Z	23,0	$b=6{,}4$
5 Z	21,5	$aE=294$.	3 Z	18,4	$aE=155$	3 Z	18,1	$aE=171$.

$aE\times l=1304$.

Die Angaben des Funkenmessers wurden in den beiden letzten Reihen unzuverlässig. Um die Fehlergrenzen näher kennen zu lernen, welche in den Werthen von b und aE liegen, wurde folgende Reihe angestellt:

Nr. XXXVII. Batt. wie Nr. XXXV. $J=63{,}7$.

Hdr. 48′,2; Ndr. 49′,5.

Dist	i beob.	i ber.
1 Z	36,6	36,6
2	31,7	32,7
3	28,2	29,6
4	25,9	27,0
5	24,2	24,8
6	22.1	22,9
7	20,9	21,3
8	19,7	20.0
9	18,7	18,7

$b=7{,}4$

$aE=304$.

Die aus Dist. 1 und 9 Z abgeleiteten Werthe von b und aE drücken die Reihe nicht mehr vollständig aus; die beob. Zahlen werden bei grössern Distanzen zu gross. Dass der Grund in dem für 8′ gespannten Draht zu langen Schliessungsbogen der Hauptbatterie liegt, nicht in der stärkeren Ladung derselben, zeigen nachstehende Versuche.

Nr. XXXVIII. Batt. wie vor. Nr. $J = 63{,}7$.

Hdr. 20′,2; Ndr. 22′,0.

Dist.	i beob.	i ber.
1 Z	48,9	48,9
2	45,1	45,5
3	42,4	42,5
4	39,9	40,0
5	37,7	37,7
6	35,6	35,6
9	30,5	30,6
12	26,9	26,9

$b = 12.5$
$aE = 657.$

Nr. XXXIX. HB 2 Flaschen (1+2), NB 1 Flasche (4). $J = 53{,}0$.

Hdr. 19′,7; Ndr. 38′,5.

Dist.	i beob.	i ber.
1 Z	54,5	54,5
3	46,2	46,4
6	38,2	37,9
9	32,2	32,0
12	27,7	27,7

$b = 10{,}4$
$aE = 622.$

Obschon die Versuche noch weiter ausgedehnt werden müssen, so treten doch bereits einige Gesetze hervor, auf welche ich die Aufmerksamkeit zu richten wünsche. Ich stelle hierzu die Werthe von b und aE beim Maximum der Induction in folgender Tabelle zusammen.

Nr. des Versuchs	Flaschenzahl in HB	Flaschenzahl in NB	Hdr.	Ndr.	J	b	aE
XI.	2	2	19,7	20,8	37,5	16,2	546
XII.	„	„	„	„	„	16,2	542
I.	„	„	„	22,0	„	15,9	577
						16,1	553
I.	2	1	„	38,5	„	11,5	500
III.	„	„	„	„	„	12,5	541
IV.	„	„	„	„	„	12,0	524
						12,0	522
VII.	3	1	„	54,0	„	10,8	541
VIII.	„	„	„	„	„	10,4	527
IX.	„	„	„	„	„	10,7	529
						10,6	532
XIII.	2	2	„	21,5	53,0	14,1	635
XIV.	„	„	„	„	„	13,7	611
5.	„	„	„	22,5	53,2	13,7	636
						13,8	627
XXXIX.	2	1	„	38,5	53,0	10,4	622
XV.	2	2	31,7	33,5	53,0	8,8	353
XXXIII.	1	1	32,2	33,5	„	8,7	360
						8,7	356
XVI.	1	2	„	18,5	„	11,4	372
XXXI.	„	„	„	„	„	10,7	353
						11,0	362
XXXIV.	1	1	„	33,5	63,7	8,0	386
XXXII.	1	2	„	19,0	„	10,2	388
XVIII.	2	2	47,7	49,5	63,7	7,2	296
XVIII.	„	„	„	„	„	7,5	303
XXXV.	1	1	48,2	49,0	„	7,2	292
						7,3	297
XIX.	1	2	„	29,5	„	8,5	280
XXXVI.	„	„	„	29,0	„	8,7	294
						8,6	287
XX.	1	3	„	19,4	„	11,1	323

Zunächst ergiebt die blosse Ansicht der Tabelle, dass bei unverändertem Schliessungsdraht und bei unveränderter Ladung der Hauptbatterie aE constant bleibt, wie auch die Nebenbatterie geändert werde. Zweitens lässt sich entnehmen, dass ebenfalls bei constanter Leitung und Ladung der Hauptbatterie b auf $^3/_4$ und auf $^2/_3$ seines Werthes sinkt, wenn die Flaschenzahl der Ne-

benbatterie zur Flaschenzahl der Hauptbatterie von dem Verhältnisse 1:1 auf das Verhältniss 1:2 und 1:3 übergeht; bei umgekehrten Verhältnissen steigt b auf $^4/_3$ und auf $^3/_2$ seines Werthes.*) Welche Aenderungen b und aE mit veränderter Ladung der Hauptbatterie erleiden, müssen die spätern Beobachtungen ergeben, da ich hier eine grosse Veränderlichkeit mit der Art der Flaschen, ob sie von stärkerm oder schwächerm Glase sind, bereits wahrgenommen habe. Bei gleicher Ladung der Hauptbatterie scheint aE mit der Länge des Schliessungsdrahtes zu sinken, doch wird diese Länge noch wegen der durchbrochenen Luftschicht und wegen der Glasstärke der Flaschen corrigirt werden müssen. Bei $J = 37{,}5$ ist

$$536 \times 20 = 10720, \quad 436 \times 28 \text{ (Nr. V.)} = 12208;$$

bei $J = 53{,}0$ ist

$$625 \times 20 = 12500, \; 359 \times 32 = 11488, \; 282 \times 48 \text{ (Nr. XVII.)} = 13536;$$

endlich bei $J = 63{,}7$ ist

$$657 \times 20 \text{ (Nr. XXXVIII.)} = 13140, \quad 387 \times 32 = 12384$$

und

$$292 \times 48 = 14016.$$

Aus der Zusammenstellung der Werthe von $aE \times l$ erhält man folgende Tabelle:

---

*) Nach diesem Gesetze ist in meiner Abh. Pogg. Ann. B. 71. p. 343. die beobachtete Ladung 29,32 der Nebenbatterie nicht als $\frac{2}{3}$, sondern als $\frac{3}{4}$ von der Ladung 40,00 der Hauptbatterie aufzufassen.

Nr. des Versuchs.	Flaschenzahl in HB	NB	Hdr.	J	$aE \times l.$
XXIII.	2	2	19,7	37,5	1480
2.	„	„	„	„	1350
II.	2	1	„	„	1974
III.	„	„	„	„	1936
XXII.	„	„	„	„	2100
X.	3	1	„	„	2928
XXI.	„	„	„	„	3024
XXIV.	2	2	25,7	„	1400
XXV.	2	1	„	„	2394
XXVI.	1	2	26,2	„	774
XXVII.	2	2	25,7	53,0	1896
XXVIII.	1	2	26,2	„	1296
XXIX.	2	2	25,7	63,7	2432
XXX.	1	2	26,2	„	1600
XXXIII.	1	1	32,2	53,0	1560
XXXI.	1	2	„	„	1008
XVI.	„	„	„	„	972
XXXIV.	1	1	„	63,7	1824
XXXII.	1	2	„	„	1350
XXXV.	1	1	48,2	63,7	1680
XXXVI.	1	2	„	„	1304
XX.	1	3	„	„	776

Wie wenige Schärfe auch diesen Zahlen zukommen mag, so trage ich doch kein Bedenken, aus ihnen als Gesetz abzuleiten, dass bei constanter Ladung und Leitung der Hauptbatterie die Producte $aE \times l$ sich wie $1 : {}^3/_2 : 2$ verhalten, wenn das Verhältniss der Flaschenzahl in der Nebenbatterie zur Flaschenzahl in der Hauptbatterie wie 1:1, wie 1:2, wie 1:3 ist und umgekehrt, dass die Producte $aE \times l$ von 1 auf $^2/_3$ auf $^1/_2$ sinken, wenn die Nebenbatterie zur Hauptbatterie von 1:1 auf 2:1 und auf 3:1 übergeht.

Versuche mit gespannten Drähten von 4′ Länge liessen sich in einem zu geringen Umfange durchführen, als dass daraus besondere Schlüsse hätten gezogen werden können. Man findet die vorher über b und aE beim Maximum der Induction gefundenen Gesetze bestätigt, erkennt auch, dass beide im Allgemeinen nur halb so gross sind als bei gespannten Drähten von 8′ Länge, es fehlt indess zur festern Begründung die Kenntniss über den hemmenden Einfluss des Schliessungsdrahtes selbst. Bemerkenswerh ist, dass die Länge des Schliessungsdrahts der Nebenbatterie

zu kurz ausfällt; hierin tritt dieselbe Erscheinung hervor, die oben bei den Versuchen XXXV. und XXXVI. wahrgenommen wurde, nämlich dass da, wo die inducirende Kraft der Hauptbatterie zu gering wird, die Nebenbatterie eine Tendenz zeigt, in ihrer Wirkungsweise sich der Hauptbatterie mehr gleich zu stellen. Die Versuche sind folgende:

HB 1 Flasche (2), NB 1 Flasche (4). $J=37,5$.

Hdr. 14′,2; Ndr. 15′,0.

Dist.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z	28,3	28,3
2	25,3	25,3
3	22,9	22,8
4	20,9	20,8
5	19,0	19,1
6	17,7	17,7

$b=7,3$
$aE=236$.

HB 2 Flaschen (1+2), NB 1 Flasche (4). $J=37,5$.

Hdr. 14′,2; Ndr. 26′,5.

Dist.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z	34,4	34,4
2	29,8	30,0
3	26,4	26,5
4	23,8	23,8
5	21,6	21,5
6	19,7	19,7

$b=5,7$
$aE=230$.

HB 3 Fl. (1+2+3), NB 1 Fl. (4). $J=37,5$.

Hdr. 14′,2; Ndr. 35′,5.

Dist.	*i* beob	*i* ber.
1 Z	38,3	38,3
2	32,6	33,1
3	29,1	29,1
4	25,8	25,9
5	23,3	23,2
6	21,3	21,3

$b=5,3$
$aE=240$.

HB 1 Fl. (2), NB 1 Fl. (4) $J=53,0$.

Hdr. 14′,2; Ndr. 15′,5.

Dist.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z	36,5	36,5
2	32,0	32,2
3	28,6	28,8
4	26,1	26,1
5	23,9	23,9
6	22,0	22,0

$b=6,6$
$aE=277$.

HB 2 Fl. (1+2), NB 1 Fl. (4). $J=53,0$.

Hdr. 14′,2; Ndr. 26′,5.

Dist.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z	44,5	44,5
2	38,0	38,2
3	33,4	33,5
4	29,9	29,9
5	27,0	26,9
6	24,5	24,5

$b=5,1$
$aE=273$.

Ausserdem hatte ich eine Reihe Beobachtungen angestellt, in denen Platindrähte (Pl.) von je 17 Zoll Länge und 0,081 par. Linien Durchmesser in die Schliessungsdrähte eingeschaltet waren. Von der einen Seite bewährten sich diese Platindrähte als annähernd mit 2′ Kupferdraht (K) äquivalent, von der andern Seite hemmten sie aber die Inductionskraft insoweit, dass die Versuche beschränkt wurden und bis jetzt kein festes Ziel erreicht werden konnte. Ich halte es für genügend 3 Beobachtungsreihen mitzutheilen, von denen die beiden ersten zeigen, dass die Platindrähte in Bezug auf die Länge der Schliessungsdrähte beim Maximum der Induction nur mit ihrem äquivalenten Werthe in Rechnung kommen, die dritte eine Vergleichung mit der ihr entsprechenden Reihe in der ersten Abhandlung gestattet, wo der inducirte Strom mit dem Luftthermometer gemessen wurde. Dieser Versuch giebt $b=8,0$ oder nach der frühern Weise $b=95,7$; das Luftthermometer gab $b=93,5$, beide sehr wenig von einander verschieden, was zum Theil noch durch die in beiden Reihen verschiedene Form der gespannten Drähte ausgeglichen werden mag.

HB 1 Fl. (2), NB 1 Fl. (4). $J=63,7$.

Hdr. 18′,2 K. + Pl.; Ndr. 22′,0 K.

Dist.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z	41,6	41,6
2	37,2	38,1
3	34,2	35,2
6	28,2	28,5
9	23,7	24,0
12	20,7	20,7

$b=9,9$
$aE=455$.

HB 1 Fl. (2), NB 1 Fl. (4). $J=53,0$.

Hdr. 18′,2 + Pl.; Ndr. 21′,5 K.

Dist.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z	37,0	37,0
3	31,0	31,4
6	25,4	25,6
9	21,5	21,7
12	18,7	18,7

$b=10,3$
$aE=418$.

HB 1 Fl. (2), NB 1 Fl. (4). $J=53,0$.

Hdr. 20′,2 K. + Pl.; Ndr. 22′,0 K. + Pl.

Dist.	*i* beob.	*i* ber.
1 Z	30,7	30,7
2	27,6	27,6
3	25,0	25,1
4	23,0	23,0
5	21,2	21,3
6	19,7	19,7

$b=8,0$
$aE=276$.

X.

Miscellen.

Aus einem Briefe, welchen Herr Professor Dr. Anger in Danzig schon unter dem 10. December 1851 an mich zu richten die Güte hatte, halte ich mich verpflichtet. das Folgende hier mitzutheilen, indem ich Herrn Professor Anger zugleich freundschaftlichst um Verzeihung bitte, dass dies nicht schon früher geschehen ist, weil sich bis jetzt immer nicht ein geeigneter Platz zu dieser Mittheilung im Archive finden wollte. Herr Professor Anger schreibt mir Folgendes:

„Erlauben Sie mir, dass ich diese Gelegenheit benutze, eine kleine mathematische Bemerkung in Beziehung auf Ihre Ableitung der Gauss'schen Gleichungen hinzuzufügen, welche Sie im dritten Hefte des siebzehnten Theiles des Archivs der Mathematik und Physik*) gegeben haben. Die Ableitung ist mir bereits seit dem Jahre 1823 bekannt, auch erinnere ich mich, sie im Jahre 1827 dem jetzigen Director der Königsberger Sternwarte Herrn Dr. Busch mitgetheilt zu haben. Vor drei bis vier Jahren theilte ich sie meinem Freunde, dem Oberlehrer an der hiesigen Johannis-Schule (einer höheren Bürgerschule) Herrn Gronau mit, dem sie sehr gefiel, und der sie seitdem beim Unterricht benutzte, wie das beigelegte Heft eines seiner Schüler ausweiset.“

*) Thl. XVII. Nr. VI. S. 259.

Indem ich vollkommen anerkenne, dass in dem mir gütigst übersandten mathematischen Hefte eines Schülers der Johannisschule in Danzig die in Rede stehende Ableitung sich im Wesentlichen ganz so findet, wie ich dieselbe in dem 17ten Theile des Archivs S. 259. gegeben habe, kann ich mich nur freuen, bei dieser kleinen Untersuchung mit einem so ausgezeichneten Mathematiker wie Herrn Professor Anger zusammengetroffen zu sein, und bitte denselben wegen der Verspätung dieser Mittheilung nochmals recht sehr um Verzeihung. Ich habe mich aber um so mehr zu derselben für verpflichtet gehalten, weil die a. a. O. des Archivs von mir gegebene Ableitung der Gauss'schen Gleichungen wahrscheinlich Eingang in die Lehrbücher finden wird, eben so wie meine in Thl. XVI. Nr. XVI. S. 194. gegebene Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie. Ein anderer sehr werther Freund, Herr Åstrand in Gothenburg in Schweden, schreibt mir schon vor geraumer Zeit, dass er von dieser Herleitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in einem von ihm herauszugebenden Lehrbuch der Trigonometrie, welches mir indess noch nicht zu Gesicht gekommen ist, Gebrauch machen werde. Die Herleitung der Gauss'schen Gleichungen soll, wie ich höre, bereits in das vielfach in Recensionen empfohlene Lehrbuch der Trigonometrie von Herrn Lübsen, welches mir indess auch noch nicht zu Gesicht gekommen ist, aufgenommen worden sein.

XI.

Ueber die Entfernungsörter des Tetraeders.

Von

Herrn Anton Maur,

Kandidaten des höheren Schulamts an der Realschule zu Düsseldorf.

---

§. 1.

Aufgabe.

Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu finden, für welche die Summe der Abstände von den vier Seitenflächen eines Tetraeders eine gegebene constante Grösse ist.

Dabei ist zu bemerken, dass wir den Abstand eines Punktes von einer Seitenfläche des Tetraeders als positiv oder als negativ betrachten, je nachdem der Punkt in Bezug auf die betreffende Seitenfläche auf der Seite liegt, auf welcher das Tetraeder liegt oder umgekehrt.

Das gegebene Tetraeder sei nun $ABCD$.

Der Winkel nach dem innern Raume des Tetraeders hin:

zwischen den beiden Ebenen ABC und ABD sei v_2;

„ „ „ „ „ ACD „ v_3,

„ „ „ „ „ BCD „ v_4.

Der ebene Winkel *BAC* sei α,

„ „ „ *ACB* „ γ; der Aussenwinkel

des ebenen Winkels *ABC* „ β.

Wir bezeichnen ferner:

die Seite *BC* mit a,

„ *AC* mit b,

„ *AB* mit c.

Die vier Seitenflächen des Tetraeders wollen wir als die *XY*-Ebenen von vier rechtwinkligen Coordinaten-Systemen im Raume annehmen.

Es sei demnach in dem ersten Systeme die Ebene *ABC* die *XY*-Ebene. Der positive Theil der *Z*-Axe sei das Stück der in *A* auf die Ebene *ABC* Senkrechten nach dem innern Raume des Tetraeders hin. Der positive Theil der *X*-Axe sei *AB*. Der positive Theil der *Y*-Axe sei das Stück der in der Ebene *ABC* in *A* auf *AB* Senkrechten, welches nach dem innern Raume des Dreiecks *ABC* hin liegt. Die Coordinaten irgend eines Punktes wollen wir in diesem Systeme mit (x_1, y_1, z_1) bezeichnen.

In dem zweiten Systeme sei *ABD* die Ebene *XY*. Der positive Theil der *Z*-Axe sei das Stück der in *A* auf der Ebene *ABD* Senkrechten, welches nach dem innern Raume des Tetraeders hin liegt. Der positive Theil der *X*-Axe sei *AB*. Der positive Theil der *Y*-Axe sei das Stück der in der Ebene *ABD* in *A* auf *AB* Senkrechten, welches nach dem innern Raume des Dreiecks *ABD* hin liegt. Die Coordinaten irgend eines Punktes wollen wir in diesem Systeme mit (x_2, y_2, z_2) bezeichnen.

In dem dritten Systeme sei *ACD* die *XY*-Ebene. Der positive Theil der *Z*-Axe sei das Stück der in *A* auf der Ebene *ACD* Senkrechten, welches nach dem innern Raume des Tetraeders hin liegt. Der positive Theil der *X*-Axe sei *AC*. Der positive Theil der *Y*-Axe sei das Stück der in der Ebene *ACD* in *A* auf *AC* Senkrechten, welches nach dem innern Raume des Dreiecks *ACD* hin liegt. Die Coordinaten irgend eines Punktes wollen wir in diesem Systeme mit (x_3, y_3, z_3) bezeichnen.

In dem vierten Systeme endlich sei *BCD* die *XY*-Ebene. Der positive Theil der *Z*-Axe sei das Stück der in *B* auf der Ebene *BCD* Senkrechten, welches nach dem innern Raume des Tetraeders hin liegt. Der positive Theil der *X*-Axe sei *BC*. Der positive Theil der *Y*-Axe sei das Stück der in der Ebene *BCD* in *B* auf *BC* Senkrechten, welches nach dem inneren Raume des Tetraeders hin liegt. Die Coordinaten irgend eines Punktes wollen wir in diesem Systeme mit (x_4, y_4, z_4) bezeichnen.

Es macht nun mit der positiven Richtung der Z_1-Axe

die positive Richtung der Z_2-Axe den Winkel $\pi - \nu_2$,

„ „ „ Z_3 „ „ $\pi - \nu_3$,

„ „ „ Z_4 „ „ $\pi - \nu_4$.

Ferner bildet mit der positiven Richtung der X_1-Axe

die positive Richtung der X_2-Axe den Winkel 0,

„ „ „ X_3 „ „ α,

„ „ „ X_4 „ „ β.

Wenden wir jetzt die Formeln für die Coordinatenverwandlung im Raume an, so erhalten wir folgende allgemein gültigen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_2, \\ y_1 &= -y_2\cos\nu_2 + z_2\sin\nu_2, \\ z_1 &= -y_2\sin\nu_2 - z_2\cos\nu_2. \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_3\cos\alpha - y_3\cos\nu_3\sin\alpha + z_3\sin\nu_3\sin\alpha, \\ y_1 &= x_3\sin\alpha + y_3\cos\nu_3\cos\alpha - z_3\sin\nu_3\cos\alpha, \\ z_1 &= -y_3\sin\nu_3 - z_3\cos\nu_3. \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (2)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c + x_4\cos\beta + y_4\cos\nu_4\sin\beta - z_4\sin\nu_4\sin\beta, \\ y_1 &= x_4\sin\beta - y_4\cos\nu_4\cos\beta + z_4\sin\nu_4\cos\beta, \\ z_1 &= -y_4\sin\nu_4 - z_4\cos\nu_4. \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (3)$$

Multipliziren wir die zweite der Gleichungen (1) mit $\sin\nu_2$ und die dritte mit $\cos\nu_2$, und subtrahiren dann die dritte von der zweiten, so erhalten wir:

$$z_2 = y_1\sin\nu_2 - z_1\cos\nu_2 \;\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

Multipliziren wir die erste der Gleichungen (2) mit $\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$, und subtrahiren dann die zweite von der ersten, so erhalten wir:

$$x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha = -y_3\cos\nu_3 + z_3\sin\nu_3.$$

Multipliziren wir diese Gleichung mit $\sin\nu_3$ und die dritte der Gleichungen (2) mit $\cos\nu_3$, und subtrahiren dann die dritte Gleichung von dieser, so erhalten wir:

$$z_3 = x_1 \sin\nu_3 \sin\alpha - y_1 \cos\alpha \sin\nu_3 - z_1 \cos\nu_3 . \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Aus den drei Gleichungen (3) folgt ganz auf dieselbe Weise:

$$z_4 = c \sin\nu_4 \sin\beta - x_1 \sin\nu_4 \sin\beta + y_1 \sin\nu_4 \cos\beta - z_1 \cos\nu_4 . \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Ferner ist:

$$z_1 = z_1 . \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Addiren wir die Gleichungen (4), (5), (6), (7) und bezeichnen mit β den entsprechenden innern Winkel des Dreiecks ABC, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \\ &= c \sin\beta \sin\nu_4 + x_1 (\sin\nu_3 \sin\alpha - \sin\nu_4 \sin\beta) \\ &\quad + y_1 (\sin\nu_2 - \sin\nu_3 \cos\alpha - \sin\nu_4 \cos\beta) \\ &\quad + z_1 (1 - \cos\nu_2 - \cos\nu_3 - \cos\nu_4) . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8) \end{aligned}$$

Soll nun

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 ,$$

d. h. die Summe der Abstände des Punktes (x_1, y_1, z_1) von den vier Seitenflächen des Tetraeders eine gegebene Constante sein, welche wir mit S bezeichnen wollen, so ist:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = S . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt:

$$\begin{aligned} & x_1 (\sin\nu_3 \sin\alpha - \sin\nu_4 \sin\beta) + y_1 (\sin\nu_2 - \sin\nu_3 \cos\alpha - \sin\nu_4 \cos\beta) \\ &\quad + z_1 (1 - \cos\nu_2 - \cos\nu_3 - \cos\nu_4) + c \sin\beta \sin\nu_4 - S = 0 . \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10) \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt den geometrischen Ort der Punkte dar, für welche die Summe der Abstände von den vier Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ gleich der Constanten S ist.

Da diese Gleichung vom ersten Grade ist, so zeigt uns ihre Form zunächst, dass der in Rede stehende geometrische Ort eine Ebene ist; und da die Coeffizienten der Veränderlichen alle drei unabhängig von der Constanten S sind, so zeigt uns ihre Form ferner, dass für alle Werthe der Constanten S die Entfernungsörter eines und desselben Tetraeders parallel sind.

§. 2.

Es sei die Höhe des Tetraeders in Bezug auf

ABC	als Grundfläche	H_1,
ABD	„	H_2,
ACD	„	H_3,
BCD	„	H_4.

Es sei ferner die Höhe des Dreiecks

ABD	in Bezug auf	AB	als Grundlinie	h_c,
ACD	„	AC	„	h_b,
BCD	„	BC	„	h_a.

Es sei endlich der Inhalt	des Dreiecks	ABC	gleich	Δ_1;
„	„	ABD	„	Δ_2;
„	„	ACD	„	Δ_3;
„	„	BCD	„	Δ_4;

und der Inhalt des ganzen Tetraeders gleich J.

Soll der geometrische Ort (10) durch A gehen, so muss S gleich der Summe der Abstände des Punktes A von den vier Seitenflächen des Tetraeders sein, also gleich H_4.

Ebenso ist für den Ort, welcher durch B geht, $S=H_3$;

„ „ C „ $S=H_2$;

„ „ D „ $S=H_1$.

Dasselbe Resultat finden wir leicht analytisch.

Es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \sin v_2 &= \frac{H_1}{h_c}, \\ \sin v_3 &= \frac{H_1}{h_b}, \\ \sin v_4 &= \frac{H_1}{h_a}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

Soll nun der geometrische Ort durch A gehen, also durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so muss das constante Glied verschwinden. Es muss demnach sein:

$$S = c.\sin\nu_4 \sin\beta = \frac{a.c.\sin\beta . H_1}{a.h_a} = \frac{3.J}{\Delta_4} = H_4 .$$

Soll ferner der geometrische Ort (10) durch B gehen, so muss durch Verlegung des Anfangspunkts der Coordinaten nach B das constante Glied verschwinden.

Es sind aber die Coordinaten von B:

$$x_1 = c, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0.$$

Also erhält man zur Bestimmung von S:

$$c\sin\alpha\sin\nu_3 - c\sin\beta\sin\nu_4 + c\sin\beta\sin\nu_4 - S = 0$$

oder

$$S = c.\sin\alpha.\sin\nu_3 = \frac{b.c.\sin\alpha.H_1}{b.h_b} = \frac{3J}{\Delta_3} = H_3 .$$

Soll ferner der geometrische Ort (10) durch C gehen, so muss durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten nach C das constante Glied verschwinden.

Es sind aber die Coordinaten von C:

$$x_1 = b.\cos\alpha, \quad y_1 = b.\sin\alpha, \quad z_1 = 0.$$

Also erhält man zur Bestimmung von S:

$$b\sin\alpha\cos\alpha\sin\nu_3 - b\cos\alpha\sin\beta\sin\nu_4 + b\sin\alpha\sin\nu_2 - b\sin\alpha\cos\alpha\sin\nu_3$$
$$- b\sin\alpha\cos\beta\sin\nu_4 + c\sin\beta\sin\nu_4 - S = 0,$$

oder

$$- b\sin\nu_4(\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta) + c\sin\beta\sin\nu_4 + b\sin\alpha\sin\nu_2 - S = 0$$

oder

$$S = b\sin\alpha\sin\nu_2 = \frac{b.c.\sin\alpha . H_1}{c.h_c} = \frac{3J}{\Delta_2} = H_2 .$$

Soll endlich der geometrische Ort (10) durch D gehen, so muss durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten nach D das constante Glied verschwinden.

Die Coordinaten von D sind aber:

$$x_1 = h_c . \operatorname{cotg} . DAB = h_c \frac{\operatorname{cotg}\nu_3 \sin\nu_2 + \cos\nu_2 \cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{h_b . \cos\nu_2 + h_c . \cos\nu_2 . \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$y_1 = h_c . \cos v_2 ,$$

$$z_1 = H_1 = h_c' \sin v_2 = h_b \sin v_3 = h_a \sin v_4 .$$

Also erhält man zur Bestimmung von S:

$$h_b \sin v_3 \cos v_3 + h_c \sin v_3 \cos v_2 \cos\alpha - h_b \sin v_4 \cos v_3 . \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$
$$- h_c . \sin v_4 \cos v_2 \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha} + h_c \sin v_2 \cos v_2 - h_c \sin v_3 \cos v_2 \cos\alpha$$
$$- h_c \sin v_4 \cos v_2 \cos\beta + H_1 - h_c \sin v_2 \cos v_2 - h_b \sin v_3 \cos v_3$$
$$- h_a \sin v_4 \cos v_4 + c \sin\beta \sin v_4 - S = 0$$

oder

$$\sin v_4 \left\{ c\sin\beta - h_a \cos v_4 - h_b \cos v_3 . \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - h_c \cos v_2 \left(\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha} \right) \right\}$$
$$+ H_1 - S = 0$$

oder

$$\sin v_4 (c\sin\beta - h_a \cos v_4 - h_b \cos v_3 . \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - h_c \cos v_2 . \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}) + H_1 - S = 0$$

oder

$$\frac{\sin v_4}{a} (ac\sin\beta - a.h_a \cos v_4 - b.h_b \cos v_3 - c.h_c \cos v_2) + H_1 - S = 0$$

oder

$$\frac{2\sin v_4}{2} (\Delta_1 - \Delta_4 \cos v_4 - \Delta_3 \cos v_3 - \Delta_2 \cos v_2) + H_1 - S = 0 .$$

Es ist aber bekanntlich:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \cos v_2 + \Delta_3 \cos v_3 + \Delta_4 \cos v_4 .$$

Also erhält man:

$$S = H_1 .$$

Die Gleichung (10) erhält bei dieser letzten Annahme von S die Form:

$$x_1 (\sin\alpha \sin v_3 - \sin\beta \sin v_4) + y_1 (\sin v_2 - \cos\alpha \sin v_3 - \cos\beta \sin v_4)$$
$$+ z_1 (1 - \cos v_2 - \cos v_3 - \cos v_4) + H_4 - H_1 = 0 . \quad \ldots\ldots \; (12)$$

§. 3.

Die Ebene (12) ist vermittelst ihrer Durchschnitte mit den Kanten des Tetraeders leicht zu construiren.

Sie schneidet die Kanten *AD*, *BD*, *CD* im Punkte *D*.

Die Gleichungen der Kante *AB* sind:

$$z_1 = 0, \quad y_1 = 0.$$

Für die Coordinaten des Durchschnittspunktes mit der Ebene (12) erhält man demnach:

$$z_1 = 0, \quad y_1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{H_1 - H_4}{\sin\alpha\sin\nu_3 - \sin\beta\sin\nu_4} = \frac{(H_1 - H_4)c}{c.\sin\alpha\sin\nu_3 - c.\sin\beta\sin\nu_4} = \frac{H_1 - H_4}{H_3 - H_4}c.$$

Die Gleichungen der Kante *AC* sind:

$$z_1 = 0, \quad y_1 = x_1.\text{tg}\alpha.$$

Für die Coordinaten des Durchschnittspunktes mit der Ebene (12) erhält man also:

$$z_1 = 0, \quad x_1 = \frac{(H_1 - H_4)b\cos\alpha}{b\sin\alpha\sin\nu_2 - b\sin\gamma\sin\nu_4} = \frac{H_1 - H_4}{H_2 - H_4}b.\cos\alpha,$$

$$y_1 = \frac{H_1 - H_4}{H_2 - H_4}b.\sin\alpha.$$

Das auf *AC* abgeschnittene Stück ist aber gleich $\frac{x_1}{\cos\alpha}$; also gleich

$$\frac{H_1 - H_4}{H_2 - H_4}b.$$

Die Gleichungen der Kante *BC* sind:

$$z_1 = 0, \quad y_1 = -x_1\text{tg}\beta + c.\text{tg}\beta.$$

Für die Coordinaten des Durchschnittspunktes mit der Ebene (12) erhält man also:

$$z_1 = 0, \quad x_1 = \frac{H\cos\beta + c\sin\beta\sin\nu_3\cos\alpha - c\sin\beta\sin\nu_2}{\sin\gamma\sin\nu_3 - \sin\beta\sin\nu_2},$$

$$y_1 = \frac{H_3 - H_1}{H_3 - H_2}a.\sin\beta.$$

Das auf der Kante BC abgeschnittene Stück ist aber gleich

$$\frac{y_1}{\sin\beta},$$

also gleich

$$\frac{H_3-H_1}{H_3-H_2}a.$$

Ist einer der Coeffizienten von a, b, oder c negativ, so ist das Stück nicht auf die betreffende Kante selbst, sondern auf ihre Verlängerungen über B resp. A hinaus aufzutragen.

Ist in einem besondern Falle einer der Coeffizienten Null oder unendlich gross, so schneidet der Ort (12) die betreffende Kante in A resp. B, oder ist damit parallel. Sind alle drei Coeffizienten Null, so fällt (12) mit der Ebene ABD zusammen; sind alle drei unendlich gross, so ist (12) mit der Ebene ABC parallel. Sind zwei Coeffizienten unendlich, so ist auch der dritte unendlich.

Endlich kann einer, zwei oder alle drei Coeffizienten unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinen.

Hat z. B. der Coeffizient von c diese Form, so ist

$$H_1=H_4,$$

$$H_3=H_4;$$

also

$$H_1=H_3.$$

Es sind also dann die beiden anderen Coeffizienten Null; mithin geht (12) durch die Punkte A und B, fällt also mit der Ebene ABD zusammen.

Hat der Coeffizient von b die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, so ist:

$$H_1=H_4,$$

$$H_2=H_4;$$

also auch

$$H_1=H_2.$$

Mithin ist dann der Coeffizient von c gleich Null, und der Coeffizient von a gleich der Einheit, also geht der Ort (12) durch die Punkte A und C, und fällt mit der Ebene ACD zusammen.

Hat endlich der Coeffizient von a die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, so ist:

$$H_1 = H_3,$$
$$H_2 = H_3;$$

also auch

$$H_1 = H_2.$$

Die Coeffizienten von b und c werden also jeder gleich der Einheit. Der Ort (12) geht also durch die Punkte B und C, fällt mithin mit der Ebene BCD zusammen.

Wir sehen hieraus, dass das Auftreten der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ Folge davon ist, dass die betreffende Kante in der Ebene (12) liegt.

Nehmen ferner zwei der Coeffizienten die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, z. B. die von b und c, so ist

$$H_1 = H_4,$$
$$H_3 = H_4,$$
$$H_2 = H_4;$$

also

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4.$$

Es wird also dann auch der Coeffizient von a unbestimmt. Ueberhaupt findet man, dass der dritte Coeffizient unbestimmt wird, sobald zwei Coeffizienten unbestimmt sind. Die Bedingungsgleichung ist immer:

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4.$$

In diesem Falle ist aber das Tetraeder ein reguläres, und es ist:

$$\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \text{arc.cos}\frac{1}{3}$$

und

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3}R.$$

Die Gleichung (10) reduzirt sich in diesem Falle auf eine blosse Constante, verliert also ihre Bedeutung.

Wir werden später hierauf zurückkommen.

Aus diesen Erörterungen sehen wir, dass die Construktion der Gleichung (12) vermittels ihrer Durchschnitte mit den Kanten des Tetraeders, den letzten Fall ausgenommen, immer anwendbar ist.

§. 4.

Multipliziren wir die Gleichung (5) mit $\sin\beta\sin\nu_4$ und (6) mit $\sin\alpha\sin\nu_3$, und addiren dann beide, so erhalten wir:

$$z_4\sin\alpha\sin\nu_3+z_3\sin\beta\sin\nu_4=-y_1(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)\sin\nu_3\sin\nu_4$$
$$-z_1(\sin\beta\sin\nu_4\cos\nu_3+\sin\alpha\sin\nu_3\cos\nu_4)+c\sin\alpha\sin\beta\sin\nu_3\sin\nu_4$$

oder

$$z_4\sin\alpha\sin\nu_3+z_3\sin\beta\sin\nu_4=-y_1\sin\gamma\sin\nu_3\sin\nu_4$$
$$-z_1(\sin\beta\sin\nu_4\cos\nu_3+\sin\alpha\sin\nu_3\cos\nu_4)+c\sin\alpha\sin\beta\sin\nu_3\sin\nu_4.$$

Multipliziren wir diese Gleichung mit $\sin\nu_2$ und die Gleichung (4) mit $\sin\gamma\sin\nu_3\sin\nu_4$ und addiren beide, so erhalten wir:

$$z_4\sin\alpha\sin\nu_2\sin\nu_3+z_3\sin\beta\sin\nu_2\sin\nu_4+z_2\sin\gamma\sin\nu_3\sin\nu_4$$
$$=c\sin\alpha\sin\beta\sin\nu_2\sin\nu_3\sin\nu_4-z_1(\sin\gamma\sin\nu_3\sin\nu_4\cos\nu_2$$
$$+\sin\beta\sin\nu_2\sin\nu_4\cos\nu_3+\sin\alpha\sin\nu_2\sin\nu_3\cos\nu_4),$$

$$\frac{z_4}{\sin\nu_4}+\frac{z_3\sin\beta}{\sin\nu_3\sin\alpha}+\frac{z_2\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\nu_2}+z_1\left(\frac{\sin\gamma\cos\nu_2}{\sin\alpha\sin\nu_2}+\frac{\sin\beta\cos\nu_3}{\sin\alpha\sin\nu_3}+\frac{\cos\nu_4}{\sin\nu_4}\right)$$
$$=c\sin\beta.$$

Es ist aber:

$$\frac{1}{\sin\nu_4}=\frac{h_a}{H_1}=\frac{a.h_a}{a.H_1}=\frac{2\Delta_4}{aH_1},$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin\nu_3}=\frac{b.h_b}{a.H_1}=\frac{2\Delta_3}{aH_1},$$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\nu_2}=\frac{c\,h_c}{aH_1}=\frac{2\Delta_2}{aH_1}.$$

Setzen wir diese Werthe in die gefundene Gleichung, so erhalten wir:

$$\frac{2.z_4.\Delta_4}{aH_1}+\frac{2.z_3.\Delta_3}{aH_1}+\frac{2.z_2.\Delta_2}{aH_1}+z_1\left(\frac{2\Delta_2.\cos\nu_2}{aH_1}+\frac{2\Delta_3\cos\nu_3}{aH_1}+\frac{2\Delta_4\cos\nu_4}{aH_1}\right)$$
$$=c\sin\beta$$

oder

$$z_4\Delta_4+z_3\Delta_3+z_2\Delta_2+z_1(\Delta_2\cos\nu_2+\Delta_3\cos\nu_3+\Delta_4\cos\nu_4)=\Delta_1 H=3J$$

oder, da

$$\Delta_2\cos\nu_2+\Delta_3\cos\nu_3+\Delta_4\cos\nu_4=\Delta_1$$

ist:

$$\frac{1}{3}z_4\Delta_4+\frac{1}{3}z_3\Delta_3+\frac{1}{3}z_2\Delta_2+\frac{1}{3}z_1\Delta_1=J. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Die Gleichung (13) enthält folgenden Satz:

Nimmt man irgend einen Punkt im Raume an, so ist die Summe der vier Tetraeder, welche die vier Seitenflächen eines gegebenen Tetraeders zu Grundflächen und den beliebig angenommenen Punkt zur Spitze haben, gleich dem gegebenen Tetraeder.

Dabei ist zu bemerken, dass die Inhalte bald additiv bald subtraktiv zu nehmen sind, je nach der Lage des Punktes im Raume.

Es ist ferner:

$$\frac{\Delta_1}{3J}=H_1,$$

$$\frac{\Delta_2}{3J}=H_2,$$

$$\frac{\Delta_3}{3J}=H_3,$$

$$\frac{\Delta_4}{3J}=H_4.$$

Also folgt aus (13):

$$\frac{z_1}{H_1}+\frac{z_2}{H_2}+\frac{z_3}{H_3}+\frac{z_4}{H_4}=1. \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Diese Gleichung enthält folgenden Satz:

Für jeden Punkt im Raume ist die Summe der Quotienten aus seinen Abständen von den vier Seitenflächen eines gegebenen Tetraeders und den Höhen des Tetraeders in Bezug auf die entsprechende Seitenfläche als Grundfläche, mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen in der oben angegebenen Bedeutung, gleich der Einheit.

Ist insbesondere:

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4,$$

also das gegebene Tetraeder ein reguläres, und bezeichnen wir seine Höhe mit H, so ist:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = H,$$

d. h. die Summe der Entfernungen jedes beliebigen Punktes im Raume von den vier Seitenflächen eines regulären Tetraeders ist mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen gleich der Höhe des gegebenen regulären Tetraeders.

Es musste aus diesem Grunde die Gleichung (10) für diesen besondern Fall unter einer unbrauchbaren Form erscheinen.

§. 5.

Die Gleichung (14) umfasst, wenn wir erwägen, dass die Abstände sowohl positiv als negativ in der oben aufgestellten Bedeutung, jedoch nicht alle vier gleichzeitig negativ sein können, folgende besonderen Gleichungen, worin z_1, z_2, z_3 und z_4 an sich positive Grössen bedeuten sollen:

$$\frac{z_1}{H_1} + \frac{z_2}{H_2} + \frac{z_3}{H_3} + \frac{z_4}{H_4} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

$$\frac{z_1}{H_1} + \frac{z_2}{H_2} + \frac{z_3}{H_3} - \frac{z_4}{H_4} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

$$\frac{z_1}{H_1} + \frac{z_2}{H_2} - \frac{z_3}{H_3} + \frac{z_4}{H_4} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

$$\frac{z_1}{H_1} - \frac{z_2}{H_2} + \frac{z_3}{H_3} + \frac{z_4}{H_4} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

$$-\frac{z_1}{H_1} + \frac{z_2}{H_2} + \frac{z_3}{H_3} + \frac{z_4}{H_4} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

$$\frac{z_1}{H_1} + \frac{z_2}{H_2} - \frac{z_3}{H_3} - \frac{z_4}{H_4} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$\frac{z_1}{H_1} - \frac{z_2}{H_2} + \frac{z_3}{H_3} - \frac{z_4}{H_4} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

$$-\frac{z_1}{H_1} + \frac{z_2}{H_2} + \frac{z_3}{H_3} - \frac{z_4}{H_4} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

$$\frac{z_1}{H_1}-\frac{z_2}{H_2}-\frac{z_3}{H_3}+\frac{z_4}{H_4}=1, \quad \text{..........} \quad (23)$$

$$-\frac{z_1}{H_1}+\frac{z_2}{H_2}-\frac{z_3}{H_3}+\frac{z_4}{H_4}=1, \quad \text{........} \quad (24)$$

$$-\frac{z_1}{H_1}-\frac{z_2}{H_2}+\frac{z_3}{H_3}+\frac{z_4}{H_4}=1, \quad \text{..........} \quad (25)$$

$$\frac{z_1}{H_1}-\frac{z_2}{H_2}-\frac{z_3}{H_3}-\frac{z_4}{H_4}=1, \quad \text{........} \quad (26)$$

$$-\frac{z_1}{H_1}+\frac{z_2}{H_2}-\frac{z_3}{H_3}-\frac{z_4}{H_4}=1, \quad \text{........} \quad (27)$$

$$-\frac{z_1}{H_1}-\frac{z_2}{H_2}+\frac{z_3}{H_3}-\frac{z_4}{H_4}=1, \quad \text{.........} \quad (28)$$

$$-\frac{z_1}{H_1}-\frac{z_2}{H_2}-\frac{z_3}{H_3}+\frac{z_4}{H_4}=1. \quad \text{.........} \quad (29)$$

Setzen wir dem absoluten Werthe nach:

$$z_1=z_2=z_3=z_4,$$

d. h. **sind die Abstände des in Rede stehenden Punktes von den vier Seitenflächen des gegebenen Tetraeders absolut genommen einander gleich, so wird die Kugel, welche jenen Punkt zum Mittelpunkte und den absolut genommenen gleichen Abstand zum Radius hat, die vier Seitenflächen des Tetraeders berühren.**

Wir erhalten demnach aus der Gleichung (15) für den Radius der eingeschriebenen Kugel, wenn wir ihn mit R bezeichnen:

$$R=\frac{1}{\frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_2}+\frac{1}{H_3}+\frac{1}{H_4}}. \quad \text{........} \quad (30)$$

Setzen wir auch in den Gleichungen (16), (17), (18), (19)

$$z_1=z_2=z_3=z_4$$

und bezeichnen den gleichen Abstand mit R_1 resp. R_2, R_3, R_4, so erhalten wir:

$$R_1=\frac{1}{\frac{1}{H_1}+\frac{1}{H_2}+\frac{1}{H_3}-\frac{1}{H_4}}, \quad \text{..........} \quad (31)$$

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} + \frac{1}{H_4}}, \text{ ....} \quad (32)$$

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} + \frac{1}{H_3} + \frac{1}{H_4}}, \text{ ....} \quad (33)$$

$$R_4 = \frac{1}{-\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} + \frac{1}{H_3} + \frac{1}{H_4}}, \text{ ....} \quad (34)$$

R_1 ist der Radius einer Kugel, deren Mittelpunkt in dem Raume liegt, welcher von der Fläche BCD und den Verlängegerungen der Flächen ABC, ABD und ACD über ihre Durchschnitte mit BCD hinaus eingeschlossen wird, und demnach die Fläche BCD selbst und die Verlängerungen der drei anderen Flächen berührt.

R_2 ist der Radius einer Kugel, deren Mittelpunkt in dem Raume liegt, welcher von der Fläche ACD selbst und den Verlängerungen der Flächen ABC, ABD und BCD über ihre Durchschnitte mit ACD hinaus eingeschlossen wird, und demnach die Fläche ACD selbst und die Verlängerungen der drei anderen Flächen des Tetraeders berührt.

R_3 ist der Radius einer Kugel, deren Mittelpunkt in dem Raume liegt, welcher von der Fläche ABD selbst und den Verlängerungen der Flächen ABC, ACD und BCD über ihre Durchschnitte mit ABD hinaus eingeschlossen wird, und demnach die Fläche ABD selbst und die Verlängerungen der drei anderen Flächen des Tetraeders berührt.

R_4 endlich ist der Radius einer Kugel, deren Mittelpunkt in dem Raume liegt, welcher von der Fläche ABC selbst und den Verlängerungen der Flächen ABD, ACD und BCD über ihre Durchschnitte mit ABC hinaus eingeschlossen wird, und demnach die Fläche ABC selbst und die Verlängerungen der drei anderen Flächen des Tetraeders berührt.

Diese vier beschriebenen Berührungskugeln wollen wir die „über den Flächen angeschriebenen Kugeln“ nennen.

Aus den Gleichungen (31), (32), (33), (34) folgt unmittelbar:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{R},$$

d. h. die Summe der reziproken Werthe der Radien der über den Flächen angeschriebenen Kugeln ist für jedes Tetraeder gleich dem reziproken Werthe des Radius der eingeschriebenen Kugel.

Setzen wir ferner in den Gleichungen (20), (21), (22), (23), (24), (25)

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4$$

und bezeichnen den gleichen Abstand mit R_5 resp. R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, so erhalten wir:

$$R_5 = \frac{1}{\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_4}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

$$R_6 = \frac{1}{\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} + \frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_4}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

$$R_7 = \frac{1}{-\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} + \frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_4}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

$$R_8 = \frac{1}{\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} + \frac{1}{H_4}} = -R_7, \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

$$R_9 = \frac{1}{-\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} + \frac{1}{H_4}} = -R_6, \ldots (39)$$

$$R_{10} = \frac{1}{-\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} + \frac{1}{H_3} + \frac{1}{H_4}} = -R_5 \ldots\ldots (40)$$

Wir sehen schon hieraus, dass von diesen sechs Berührungskugeln immer drei unmöglich sind.

Ist R_5 positiv, so ist es der Radius einer Berührungskugel, deren Mittelpunkt in dem Raume liegt, welcher von den Verlängerungen der vier Flächen des Tetraeders über die Kante *CD* hinaus eingeschlossen wird. Wir wollen diese Kugel die „über der Kante *CD* angeschriebene“ nennen.

Ebenso finden wir, dass R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, wenn sie positiv sind, die Radien der über der Kante *BD*, resp. *BC*, *AD*, *AC*, *AB* angeschriebenen Kugeln sind.

Wie wir gesehen, sind von den sechs über den Kanten angeschriebenen Kugeln immer nur drei möglich. Dabei sind aber folgende acht Fälle möglich:

Es können gleichzeitig positiv sein:

1) R_5 , R_6 , R_7;

2) R_5 , R_6 , R_8;

3) R_5 , R_9 , R_7;

4) R_5 , R_9 , R_8;

5) R_{10} , R_9 , R_8;

6) R_{10} , R_9 , R_7;

7) R_{10} , R_6 , R_8;

8) R_{10} , R_6 , R_7.

Bilden wir wieder aus den Gleichungen (35), (36), (37), (38), (39), (40) die Summe der reziproken Werthe der Radien der möglichen über den Kanten angeschriebenen Kugeln, so erhalten wir die acht möglichen Fälle:

$$\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_7}=\frac{1}{R}-\frac{4}{H_4},$$

$$\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_8}=\frac{4}{H_1}-\frac{1}{R},$$

$$\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_9}+\frac{1}{R_7}=\frac{4}{H_2}-\frac{1}{R},$$

$$\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_9}+\frac{1}{R_8}=\frac{1}{R}-\frac{1}{H_3},$$

$$\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_9}+\frac{1}{R_8}=\frac{4}{H_4}-\frac{1}{R},$$

$$\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_9}+\frac{1}{R_7}=\frac{1}{R}-\frac{4}{H_1},$$

$$\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_8}=\frac{1}{R}-\frac{4}{H_2},$$

$$\frac{1}{R_{10}}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_7}=\frac{4}{H_3}-\frac{1}{R};$$

d. h. die Summe der reziproken Werthe der Radien der drei über den Kanten angeschriebenen Kugeln ist gleich

der Differenz des reziproken Werthes des Radius der eingeschriebenen Kugel und des vierfachen reziproken Werthes der Höhe des Tetraeders in Bezug auf diejenige Fläche als Grundfläche, in welcher die drei Kanten liegen, über welchen die drei Kugeln angeschrieben sind.

Setzen wir endlich auch in den Gleichungen (26), (27), (28), (29) .

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4,$$

und bezeichnen den gleichen Abstand mit R_{11} resp. R_{12}, R_{13}, R_{14}; so erhalten wir:

$$R_{11} = \frac{1}{+\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_4}} \text{ .... } (41)$$

$$R_{12} = \frac{1}{-\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_4}} \text{ .... } (42)$$

$$R_{13} = \frac{1}{-\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} + \frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_4}} \text{ .... } (43)$$

$$R_{14} = \frac{1}{-\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} + \frac{1}{H_4}} \text{ .... } (44)$$

R_{11}, resp. R_{12}, R_{13}, R_{14} müssten die Radien von vier Kugeln sein, deren Mittelpunkte in denjenigen Räumen lägen, welche durch die Verlängerungen von drei Flächen des Tetraeders über die von ihnen gebildete Ecke hinaus entstehen, und welche die vier Flächen des Tetraeders berühren. Wir sehen aber ohne Weiteres, dass eine Kugel, deren Mittelpunkt in einem der beschriebenen Räume liegt, die vierte Fläche nicht berühren kann, ohne die drei andern zu schneiden. Es müssen demnach R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14} negativ sein, also muss:

$$\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_4} < 0,$$

$$-\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_4} < 0,$$

$$-\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} + \frac{1}{H_3} - \frac{1}{H_4} < 0,$$

$$-\frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_3} + \frac{1}{H_4} < 0;$$

oder:

$$H_2H_3H_4 < H_1H_2H_3 + H_1H_2H_4 + H_1H_3H_4,$$

$$H_1H_3H_4 < H_2H_3H_4 + H_1H_2H_4 + H_1H_2H_3,$$

$$H_1H_2H_4 < H_2H_3H_4 + H_1H_3H_4 + H_1H_2H_3,$$

$$H_1H_2H_3 < H_1H_2H_4 + H_1H_3H_4 + H_2H_3H_4$$

sein, d. h.: Bildet man aus den vier Höhen eines Tetraeders die vier möglichen Produkte zu dreien ohne Wiederholung, so ist jedes dieser Produkte kleiner als die Summe der drei andern.

Ist insbesondere

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4,$$

so ist:

$$R = \frac{1}{4}H,$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \frac{1}{2}H$$

und die Radien der drei über den Kanten angeschriebenen Kugeln werden unendlich gross.

§. 6.

Die Lage der Mittelpunkte, ausgedrückt durch ihre drei Coordinaten, ergiebt sich leicht aus den Gleichungen (4), (5), (6) oder, da der Radius der Berührungskugel gleich dem absoluten Werthe der Entfernung des Mittelpunktes von der XY-Ebene ist, mit gehöriger Berücksichtigung der Zeichen, aus dem Radius der Berührungskugel und den beiden Gleichungen (4) und (5):

$$z_2 = y_1 \sin\nu_2 - z_1 \cos\nu_2$$

und

$$z_3 = x_1 \sin\nu_3 \sin\alpha - y_1 \sin\nu_3 \cos\alpha - z_1 \cos\nu_3 .$$

Die Rechnung ist leicht auszuführen.

Hiermit will ich diese kurze Skizze schliessen.

XII.

Ueber trigonometrisches Höhenmessen, mit besonderer Rücksicht auf terrestrische Strahlenbrechung.

Von

dem Herausgeber.

Die Berechnung der Höhen aus geodätischen Messungen wird, insofern man dabei nicht die allerdings vortreffliche Methode der sogenannten entgegengesetzten oder gegenseitigen Zenithdistanzen in Anwendung bringt, wohl fast allgemein so geführt, dass man dabei den Refractions-Coefficienten (0,08 nach Delambre) als bekannt oder gegeben voraussetzt. Man weiss aber, dass der Werth dieses Coefficienten noch sehr schwankend ist, wie schon die von verschiedenen Mathematikern und Astronomen für denselben gegebenen, von einander mehrfach abweichenden Bestimmungen zur Genüge beweisen. Es scheint daher zweckmässig zu sein, sowohl die Messungen, als auch deren Berechnung, in solcher Weise anzuordnen und einzurichten, dass man der Kenntniss des Werths des Refractions-Coefficienten nicht bedarf, sondern vielmehr diesen Coefficienten aus den Messungen selbst, zugleich mit der gesuchten Höhe, in jedem einzelnen Falle abzuleiten im Stande ist, wobei wir, wie schon oben erinnert, von der Anwendung der Methode der sogenannten entgegengesetzten oder gegenseitigen Zenithdistanzen jetzt ganz abstrahiren, welche an sich vortreffliche Methode bekanntlich an den Beobachter die in vielen Fällen nur mit grossen Schwierigkeiten ausführbare Forderung stellt, mit seinen Instrumenten die zu messende Höhe selbst zu besteigen. Eine solche Methode wie die in Rede stehende zu entwickeln, ist der Zweck

dieses Aufsatzes, wobei ich zugleich von vorn herein die Erde als eine Kugel betrachten, und, unter dieser Voraussetzung, die Entwickelung mit völliger geometrischer Strenge zu führen versuchen werde, um nicht nachher die sogenannte Reduction wegen der Kugelgestalt der Erde besonders anbringen zu müssen, was allerdings das gewöhnliche Verfahren, aber geometrisch nicht völlig streng, wenn auch für die gewöhnlichen Fälle der Praxis genau genug ist. Streng genommen wäre freilich auch auf die ellipsoidische Gestalt der Erde Rücksicht zu nehmen, was jedoch in den meisten Fällen unnöthig sein dürfte, und daher, um diesem Aufsatze eine nicht zu grosse Ausdehnung zu geben, von mir für jetzt unterlassen, aber vielleicht zum Gegenstande eines späteren Aufsatzes gemacht werden wird.

Wie schon vorhin erinnert worden ist, nehmen wir im Folgenden an, dass die Meeresfläche, welche bekanntlich als die wahre oder eigentliche Oberfläche der Erde zu betrachten ist, eine aus dem Mittelpunkte C der Erde mit dem Halbmesser r beschriebene Kugelfläche sei, und denken uns nun auf der Erde drei Punkte A, A_1, A_2, deren Höhen über der Meeresfläche wir durch h, h_1, h_2 bezeichnen wollen, so dass also $r+h$, $r+h_1$, $r+h_2$ die Entfernungen dieser Punkte von dem Mittelpunkte der Erde sind. Durch den Mittelpunkt C der Erde und die beiden Punkte A und A_1 denken wir uns ferner eine Ebene gelegt, und in dieser Ebene aus C als Mittelpunkt durch den Punkt A, also mit dem Halbmesser $r+h$, einen zwischen den Vertikalen CA und CA_1 der Punkte A und A_1 liegenden Kreisbogen beschrieben, welchen wir mit Maassstäben messen, nach einem unter dem Namen einer Basismessung jedem Geometer bekannten Verfahren, indem wir, von dem Punkte A anfangend, in der Ebene ACA_1, immer in horizontaler Lage, einen Maassstab neben den anderen legen, so dass die Endpunkte je zweier Maassstäbe sich berühren, bis wir endlich bei der Vertikalen CA_1 des Punktes A_1 anlangen, natürlich mit allen bei einer so subtilen Operation nöthigen Reductionen und Correctionen, deren weitere Besprechung jetzt nicht hierher gehört. Die auf diese Weise gemessene Basis, nach dem Vorhergehenden also den aus C mit dem Halbmesser $r+h$ in der Ebene ACA_1 zwischen den Vertikalen CA und CA_1 beschriebenen Kreisbogen, wollen wir durch B bezeichnen. Setzen wir dann den Erdhalbmesser r und die Höhe h des Punktes A über der Meeresfläche, welche letztere durch ein unmittelbares Nivellement, oder durch barometrisches Höhenmessen bestimmt, oder aus einer anderweitigen trigonometrischen Messung entnommen werden muss, als bekannt voraus, so können wir den Winkel ACA_1 am Mittelpunkte der Erde leicht berechnen, weil, diesen Winkel in Graden ausgedrückt angenommen,

$$360^0 : \angle ACA_1 = 2(r+h)\pi : B,$$

also

$$\angle ACA_1 = \frac{B}{r+h} \cdot \frac{180^0}{\pi}$$

ist. Weil

$$\frac{B}{r+h}=B(r+h)^{-1}=Br^{-1}(1+\frac{h}{r})^{-1}$$

ist und $\frac{h}{r}$ immer ein sehr kleiner Bruch sein wird, so ist nach dem Binomischen Lehrsatze auch

$$\frac{B}{r+h}=\frac{B}{r}(1-\frac{h}{r}+\frac{h^2}{r^2}-\frac{h^3}{r^3}+\frac{h^4}{r^4}-\ldots..),$$

also

$$\angle ACA_1=\frac{B}{r}(1-\frac{h}{r}+\frac{h^2}{r^2}-\frac{h^3}{r^3}+\frac{h^4}{r^4}-\ldots).\frac{180^0}{\pi}.$$

Näherungsweise kann man also setzen:

$$\angle ACA_1=\frac{B}{r}(1-\frac{h}{r}).\frac{180^0}{r}.$$

In vielen Fällen wird es verstattet sein, den Winkel ACA_1 aus einer anderweitigen geodätischen Operation als bekannt vorauszusetzen, wo es dann der immer viele Zeit und Mühe in Anspruch nehmenden Messung der Basis B nicht bedarf.

Die Durchschnittspunkte der Vertikalen CA, CA_1, CA_2 der Punkte A, A_1, A_2 mit einer aus dem Mittelpunkte C der Erde mit einem der Einheit gleichen Halbmesser beschriebenen Kugelfläche, d. h. die Projectionen der Punkte A, A_1, A_2 auf dieser Kugelfläche, wollen wir respective durch A, A_1, A_2 bezeichnen; so ist in dem auf der in Rede stehenden Kugelfläche liegenden sphärischen Dreiecke $\mathrm{AA_1A_2}$ nach dem Vorhergehenden jetzt die Seite AA_1, d. h. eigentlich der Winkel ACA_1 am Mittelpunkte der Kugel, in Graden bekannt, indem nämlich nach dem Obigen offenbar

$$\mathrm{AA}_1=\frac{B}{r+h}.\frac{180^0}{\pi},$$

oder

$$\mathrm{AA}_1=\frac{B}{r}(1-\frac{h}{r}+\frac{h^2}{r^2}-\frac{h^3}{r^3}+\frac{h^4}{r^4}-\ldots).\frac{180^0}{\pi},$$

oder näherungsweise

$$\mathrm{AA}_1=\frac{B}{r}(1-\frac{h}{r}).\frac{180^0}{\pi}$$

ist.

Wenn wir nun den Theodoliten in dem Punkte A aufstellen und uns durch A eine auf CA senkrecht stehende Ebene, den Horizont von A, gelegt denken, so können wir bekanntlich mit dem Theodoliten die Projection des Winkels A_1AA_2 auf den Horizont von A, welche bekanntlich nichts anderes als der Winkel A_1AA_2 des sphärischen Dreiecks AA_1A_2, den wir in der Kürze durch A bezeichnen wollen, ist, und ausserdem den Neigungswinkel der Linie AA_2 gegen den Horizont von A messen, welcher letztere Winkel, indem man denselben, jenachdem A_2 über oder unter dem Horizonte von A liegt, als positiv oder als negativ betrachtet, durch J bezeichnet werden soll.

Eben so kann man, wenn man den Theodoliten ferner auch in dem Punkte A_1 aufstellt und sich durch A_1 eine auf CA_1 senkrecht stehende Ebene, den Horizont von A_1, gelegt denkt, mit dem Theodoliten die Projection des Winkels AA_1A_2 auf den Horizont von A_1, welche bekanntlich nichts anderes als der Winkel AA_1A_2 des sphärischen Dreiecks AA_1A_2, den wir in der Kürze durch A_1 bezeichnen wollen, ist, und ausserdem den Neigungswinkel der Linie A_1A_2 gegen den Horizont von A_1 messen, welcher letztere Winkel, indem man denselben, jenachdem A_2 über oder unter dem Horizonte von A_1 liegt, als positiv oder als negativ betrachtet, durch J_1 bezeichnet werden soll.

Nehmen wir nun noch die Höhe h_1 des Punktes A_1 über der Meeresfläche, deren Kenntniss man sich auf ähnliche Weise, wie vorher bei dem Punkte A gezeigt worden ist, verschaffen muss*), als bekannt an, so haben wir jetzt Data genug, um die Lage des Punktes A_2 auf der Erde, nämlich sowohl seine relative Lage gegen die Punkte A und A_1 auf der Erdkugel, d. h. auf der Meeresfläche, als auch seine Höhe h_2 über der letzteren, bestimmen zu können, wie nun gezeigt werden soll.

Weil man nach dem Vorhergehenden in dem sphärischen Dreiecke AA_1A_2 die Seite AA_1 und die beiden daran liegenden Winkel A und A_1 kennt, so lassen sich in demselben die Seiten AA_2

---

*) Man könnte freilich auch die Zenithdistanz Z des Punktes A_1 in dem Punkte A beobachten. Dann hätte man offenbar zur Bestimmung von h_1 die Proportion

$$r+h:r+h_1=\sin(Z-AA_1):\sin Z,$$

woraus

$$r+h_1=\frac{\sin Z}{\sin(Z-AA_1)}(r+h)$$

folgt. Da man aber die gemessene Zenithdistanz nothwendig wegen der Refraction corrigiren muss, so setzt dieses Verfahren schon die Kenntniss des Refractions-Coefficienten, welche wir ja hier eben umgehen wollen, voraus.

und A_1A_2, d. h. eigentlich die Winkel ACA_2 und A_1CA_2 oder, was dasselbe ist, die Winkel ACA_2 und A_1CA_2, am Mittelpunkte der Erde berechnen, wozu am besten die beiden Neper'schen Formeln

$$\tan\frac{1}{2}(AA_2+A_1A_2)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A_1-A)}{\cos\frac{1}{2}(A_1+A)}\tan\frac{1}{2}AA_1,$$

$$\tan\frac{1}{2}(AA_2-A_1A_2)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A_1-A)}{\sin\frac{1}{2}(A_1+A)}\tan\frac{1}{2}AA_1$$

dienen.

Mittelst der in der Abhandlung Thl. XVIII. Nr. XXX. entwickelten Reihen erhält man auch leicht die folgenden Reihen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(AA_2+A_1A_2)=\frac{1}{2}AA_1 &+\frac{1}{1}\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}A_1\sin(1.AA_1)\\ &+\frac{1}{2}(\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}A_1)^2\sin(2.AA_1)\\ &+\frac{1}{3}(\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}A_1)^3\sin(3.AA_1)\\ &+\frac{1}{4}(\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}A_1)^4\sin(4.AA_1)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

wenn

$$\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}A_1<1$$

ist; und

$$\frac{1}{2}(AA_2+A_1A_2)=-\frac{1}{2}AA_1-\frac{1}{1}\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1\sin(1.AA_1)$$

$$-\frac{1}{2}(\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1)^2\sin(2.AA_1)$$

$$-\frac{1}{3}(\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1)^3\sin(3.AA_1)$$

$$-\frac{1}{4}(\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1)^4\sin(4.AA_1)$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wenn

$$\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}A_1>1$$

ist. Ferner ist

$$\frac{1}{2}(AA_2-A_1A_2)=\frac{1}{2}AA_1-\frac{1}{1}\tang\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1\sin(1.AA_1)$$

$$+\frac{1}{2}(\tang\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1)^2\sin(2.AA_1)$$

$$-\frac{1}{3}(\tang\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1)^3\sin(3.AA_1)$$

$$+\frac{1}{4}(\tang\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1)^4\sin(4.AA_1)$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wenn

$$\tang\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1<1$$

ist; und

$$\frac{1}{2}(AA_2 - A_1A_2) = -\frac{1}{2}AA_1 + \frac{1}{1}\cot\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}A_1\sin(1.AA_1)$$
$$-\frac{1}{2}(\cot\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}A_1)^2\sin(2.AA_1)$$
$$+\frac{1}{3}(\cot\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}A_1)^3\sin(3.AA_1)$$
$$-\frac{1}{4}(\cot\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}A_1)^4\sin(4.AA_1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wenn

$$\tang\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}A_1 > 1$$

ist. Die Seiten

$$AA_1, \quad AA_2, \quad A_1A_2$$

des sphärischen Dreiecks AA_1A_2 sind in diesen Reihen in Theilen der Einheit oder des Halbmessers ausgedrückt. Wie man sich zu verhalten hat, wenn man dieselben in Graden, Minuten, Secunden ausgedrückt haben will, ist bekannt, und braucht hier nicht weiter erläutert zu werden.

Man könnte bei der Auflösung unseres sphärischen Dreiecks auch das Legendre'sche Theorem in Anwendung bringen, was aber, als hinreichend bekannt, einer weiteren Erläuterung hier nicht bedarf.

Die Seiten

$$AA_1, \quad AA_2, \quad A_1A_2$$

des sphärischen Dreiecks AA_1A_2 sind also jetzt bekannt. Will man daraus die auf die Meeresfläche reducirten Entfernungen der drei Punkte A, A_1, A_2 von einander, die wir durch E, E_1, E_2 bezeichnen wollen, so dass E die Entfernung der Punkte A und A_1, E_1 die Entfernung der Punkte A und A_2, E_2 die Entfernung der Punkte A_1 und A_2 von einander ist, alle diese Entfernungen auf die Meeresfläche reducirt, finden; so hat man dazu offenbar die folgenden Proportionen:

$$360^0 : AA_1 = 2r\pi : E,$$
$$360^0 : AA_2 = 2r\pi : E_1,$$
$$360^0 : A_1A_2 = 2r\pi : E_2;$$

aus denen sich die Gleichungen

$$E=\frac{r\pi}{180^0}\,.\,AA_1,\quad E_1=\frac{r\pi}{180^0}\,.\,AA_2,\quad E_2=\frac{r\pi}{180^0}\,.\,A_1A_2$$

ergeben.

Die relative Lage der drei Punkte A, A_1, A_2 auf der Erde, bezogen nämlich auf die Meeresfläche, ist daher jetzt bekannt, und es kommt nun hauptsächlich noch auf die Bestimmung der Höhe h_2 des Punktes A_2 über der Meeresfläche an, welche überhaupt den Hauptgegenstand dieser Abhandlung ausmachen sollte.

In Taf. V. Fig. 1., welche für sich verständlich sein wird, wenn man nur bemerkt, dass AH die Durchschnittslinie des Horizonts von A mit der durch A, C, A_2 gelegten Ebene ACA_2 sein soll, hat man offenbar die Proportion:

$$AH:A_2H=\sin AA_2H:\sin A_2AH.$$

Aber

$$AH=CA.\mathrm{tang}AA_2=(r+h)\mathrm{tang}AA_2,$$

und, wenn sich im Folgenden immer die oberen Zeichen auf den ersten, die unteren auf den zweiten der beiden in der Figur dargestellten Fälle beziehen:

$$A_2H=\pm(CA_2-CH)=\pm\{r+h_2-(r+h)\sec AA_2\},$$

$$\sin AA_2H=\sin\{180^0-AA_2-(90^0+J)\}=\cos(AA_2+J),$$

$$\sin A_2AH=\sin(\pm J)=\pm\sin J;$$

wobei man zu beachten hat, dass J in dem ersten der beiden in der Figur dargestellten Fälle positiv, im zweiten negativ ist. Also ist nach dem Obigen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$(r+h)\mathrm{tang}AA_2:\pm\{r+h_2-(r+h)\sec AA_2\}=\cos(AA_2+J):\pm\sin J,$$

folglich in völliger Allgemeinheit

$$(r+h)\mathrm{tang}AA_2:r+h_2-(r+h)\sec AA_2=\cos(AA_2+J):\sin J;$$

und ganz eben so ergiebt sich für den Punkt A_1 die Proportion:

$$(r+h_1)\mathrm{tang}A_1A_2:r+h_2-(r+h_1)\sec A_1A_2=\cos(A_1A_2+J_1):\sin J_1.$$

Bezeichnen wir nun aber den sogenanten Refractions-Coefficienten für die Temperatur des schmelzenden Eises und die Barometerhöhe $0^m,76$ durch k, so ist der Refractions-Coefficient für die Temperatur t nach dem hunderttheiligen Thermometer und

die Barometerhöhe b nach dem metrischen Barometer, weil der Refractions-Coefficient der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft proportional gesetzt werden kann, nach bekannten physikalischen Gesetzen, die hier nicht weiter erläutert zu werden brauchen:

$$\frac{bk}{0^m,76.(1+0,00375.t)}.$$

Werden daher die an den Stationspunkten A und A_1 beobachteten Lufttemperaturen und Barometerhöhen durch t, b und t_1, b_1 bezeichnet, und wird der Kürze wegen

$$\mu=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)},\quad \mu_1=\frac{b_1}{0^m,76.(1+0,00375.t_1)}$$

gesetzt, wo μ und μ_1 bekannte Grössen sind, so sind $k\mu$ und $k\mu_1$ die Refractions-Coefficienten in den Punkten A und A_1 zur Zeit der Beobachtungen; und nach einem von Laplace in der Mécanique céleste. T. IV. p. 278. bewiesenen Satze*) sind folglich die terrestrischen Refractionen in den Punkten A und A_1 zur Zeit der Beobachtungen respective

$$k\mu.\mathrm{AA}_2 \quad \text{und} \quad k\mu_1.\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2.$$

Bezeichnen daher jetzt J und J_1 nicht die wahren, sondern die beobachteten, d. h. von der terrestrischen Refraction afficirten, Neigungswinkel der Gesichtslinien AA_2 und A_1A_2 gegen die Horizonte von A und A_1, so sind die wahren Werthe dieser Neigungswinkel bekanntlich respective

$$\mathrm{J}-k\mu.\mathrm{AA}_2 \quad \text{und} \quad \mathrm{J}_1-k\mu_1.\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2,$$

in völliger Allgemeinheit, es mögen J, J_1 positiv oder negativ sein, wie leicht erhellen wird. Die vorstehenden Werthe muss man daher jetzt für J und J_1 in die beiden oben entwickelten Proportionen einführen, wodurch dieselben die folgende Gestalt erhalten:

---

*) Freilich ist dieser Satz nur näherungsweise richtig, worüber man meine Abhandlung im Archiv. Thl. X. S. 32. vergleichen kann. In der That ist er aber bis jetzt immer bei der Berechnung der terrestrischen Refraction in Anwendung gebracht worden, und ich will mich daher auch in dieser Abhandlung an dieses allgemein gewöhnliche Verfahren anschliessen, ohne auf die, wie ich glaube, strengeren Entwickelungen, die ich a. a. O. gegeben habe, für jetzt weitere Rücksicht zu nehmen. Wenn nur erst aus diesem weniger strengen Gesichtspunkte eine neue Untersuchung der terrestrischen Refraction mittelst genauer Messungen unternommen würde, wäre, glaube ich, schon viel gewonnen.

$$(r+h)\text{tang}AA_2 : r+h_2-(r+h)\sec AA_2$$
$$=\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}:\sin(J-k\mu.AA_2),$$

$$(r+h_1)\text{tang}A_1A_2 : r+h_2-(r+h_1)\sec A_1A_2$$
$$=\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}:\sin(J_1-k\mu_1.A_1A_2).$$

Diese zwei Proportionen enthalten nun bloss noch die zwei unbekannten Grössen k und h_2, welche sich also mittelst derselben müssen bestimmen lassen.

Unmittelbar aus denselben fliessen die folgenden Formeln:

$$r+h_2=(r+h)\left\{\sec AA_2+\frac{\text{tang}AA_2.\sin(J-k\mu.AA_2)}{\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}}\right\},$$

$$r+h_2=(r+h_1)\left\{\sec A_1A_2+\frac{\text{tang}A_1A_2.\sin(J_1-k\mu_1.A_1A_2)}{\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}}\right\};$$

oder, wie man leicht findet:

$$r+h_2=(r+h)\frac{\cos(J-k\mu.AA_2)}{\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}},$$

$$r+h_2=(r+h_1)\frac{\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)}{\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}};$$

mittelst welcher Formeln h_2 leicht berechnet werden kann, wenn man den Refractions-Coefficienten k kennt.

Weil

$$\frac{r+h_2'}{r+h}=\frac{1+\frac{h_2}{r}}{1+\frac{h}{r}}$$

$$=(1+\frac{h_2}{r})(1+\frac{h}{r})^{-1}=(1+\frac{h_2}{r})\left\{1-\frac{h}{r}+\left(\frac{h}{r}\right)^2-\ldots..\right\},$$

$$\frac{r+h_2}{r+h_1}=\frac{1+\frac{h_2}{r}}{1+\frac{h_1}{r}}$$

$$=(1+\frac{h_2}{r})(1+\frac{h_1}{r})^{-1}=(1+\frac{h_2}{r})\left\{1-\frac{h_1}{r}+\left(\frac{h_1}{r}\right)^2-\ldots.\right\}$$

ist, so ist näherungsweise, mit Vernachlässigung von Gliedern der zweiten Ordnung:

$$\frac{r+h_2}{r+h}=1+\frac{h_2-h}{r},\quad \frac{r+h_2}{r+h_1}=1+\frac{h_2-h_1}{r};$$

also nach dem Obigen:

$$1+\frac{h_2-h}{r}=\frac{\cos(J-k\mu.AA_2)}{\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}},$$

$$1+\frac{h_2-h_1}{r}=\frac{\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)}{\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}};$$

folglich

$$h_2-h=r.\frac{\cos(J-k\mu.AA_2)-\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}}{\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}},$$

$$h_2-h_1=r.\frac{\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)-\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}}{\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}};$$

oder

$$h_2-h=2r.\frac{\sin\frac{1}{2}AA_2.\sin\{J+\frac{1}{2}(1-2k\mu).AA_2\}}{\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}},$$

$$h_2-h_1=2r.\frac{\sin\frac{1}{2}A_1A_2.\sin\{J_1+\frac{1}{2}(1-2k\mu_1).A_1A_2\}}{\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}};$$

mittelst welcher Formeln die Höhendifferenzen h_2-h und h_2-h_1 gefunden werden können. Wären umgekehrt diese Höhendifferenzen, etwa in Folge eines genauen Nivellements, bekannt, so könnte man den Durchmesser der Erde mittelst der Formeln

$$2r=(h_2-h)\frac{\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}}{\sin\frac{1}{2}AA_2.\sin\{J+\frac{1}{2}(1-2k\mu).AA_2\}},$$

$$2r=(h_2-h_1)\frac{\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}}{\sin\frac{1}{2}A_1A_2.\sin\{J_1+\frac{1}{2}(1-2k\mu_1).A_1A_2\}}$$

finden, wobei man indess zu beachten hat, dass nach dem Obigen AA_2 und A_1A_2 offenbar aus der gemessenen Basis B nur dann gefunden werden können, wenn man die Höhe des Punktes A über der Meeresfläche und den Erdhalbmesser kennt, so dass also die beiden vorstehenden Gleichungen eigentlich als in Bezug auf die unbekannte Grösse r transcendente Gleichungen zu be-

trachten sein würden, welche nur durch Näherung aufgelöst werden könnten. Ueberhaupt hat man die vorhergehende Bemerkung über die Bestimmung des Erdhalbmessers aus den Höhendifferenzen h_2-h und h_2-h_1 hier nur als eine ganz gelegentliche Bemerkung zu betrachten, die jetzt gar nicht zu der Sache an sich gehört.

Alle obige Formeln setzen aber den Refractions-Coefficienten k als bekannt voraus, und derselbe muss daher immer zuerst bestimmt werden, bevor man dieselben in Anwendung bringen kann Nun hatten wir aber oben die beiden Gleichungen

$$r+h_2=(r+h)\frac{\cos(J-k\mu.AA_2)}{\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}},$$

$$r+h_2=(r+h_1)\frac{\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)}{\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}}$$

zur Bestimmung von h_2. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von h_2 die Gleichung

$$\frac{r+h}{r+h_1}=\frac{\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}}{\cos(J-k\mu.AA_2)\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}},$$

welche nur die eine unbekannte Grösse k enthält, und mittelst welcher also k bestimmt werden kann. Erst dann, wenn man k mit Hülfe dieser Gleichung ermittelt hat, lässt sich h_2 mittelst eines der beiden obigen Ausdrücke von $r+h_2$ finden.

Weil mit Vernachlässigung von Gliedern der zweiten Ordnung näherungsweise

$$\frac{r+h}{r+h_1}=\frac{1+\frac{h}{r}}{1+\frac{h_1}{r}}=1+\frac{h-h_1}{r}$$

ist, so ist näherungsweise auch

$$1+\frac{h-h_1}{r}=\frac{\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}}{\cos(J-k\mu.AA_2)\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}},$$

bei welcher Form der Gleichung zur Bestimmung von k man nicht die Höhen h, h_1 der Punkte A, A_1 über der Meeresfläche selbst, sondern nur den Höhenunterschied $h-h_1$ dieser Punkte zu kennen braucht, den man, wenn nicht anders, in vielen Fäller zweckmässig durch ein Nivellement wird finden können.

Die Gleichung

$$\frac{r+h}{r+h_1}=\frac{\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}}{\cos(J-k\mu.AA_2)\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}},$$

aus welcher der Refractions-Coefficient k bestimmt werden muss, kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{r+h}{r+h_1}=\frac{\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)}{\cos(J-k\mu.AA_2)}\cdot\frac{\cos AA_2.\cos(J-k\mu.AA_2)-\sin AA_2.\sin(J-k\mu.AA_2)}{\cos A_1A_2.\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)-\sin A_1A_2.\sin(J_1-k\mu_1.A_1A_2)},$$

also

$$\frac{r+h}{r+h_1}=\frac{\cos AA_2-\sin AA_2\,.\,\mathrm{tang}(J-k\mu\,.\,AA_2)}{\cos A_1A_2-\sin A_1A_2\,.\,\mathrm{tang}(J_1-k\mu_1\,.\,A_1A_2)}$$

oder

$$\frac{r+h}{r+h_1}\cdot\frac{\cos A_1A_2}{\cos AA_2}=\frac{1-\mathrm{tang}AA_2.\mathrm{tang}(J-k\mu.AA_2)}{1-\mathrm{tang}A_1A_2.\mathrm{tang}(J_1-k\mu_1.A_1A_2)}.$$

Weil nun aber bei wirklichen praktischen Anwendungen $k\mu$, $k\mu_1$ und AA_2, A_1A_2 immer sehr kleine Grössen sind, so ist nach den Lehren der Differentialrechnung bis auf Glieder der ersten Ordnung genau, wovon man sich leicht überzeugen wird, wenn wir AA_2 und A_1A_2 in Theilen der Einheit oder des Halbmessers ausgedrückt annehmen:

$$\mathrm{tang}(J-k\mu.AA_2)=\mathrm{tang}J-\frac{k\mu.AA_2}{\cos J^2},$$

$$\mathrm{tang}(J_1-k\mu_1.A_1A_2)=\mathrm{tang}J_1-\frac{k\mu_1.A_1A_2}{\cos J_1{}^2};$$

wofür wir näherungsweise auch setzen können:

$$\mathrm{tang}(J-k\mu.AA_2)=\mathrm{tang}J-k\mu\,\frac{\sin AA_2}{\cos J^2},$$

$$\mathrm{tang}(J_1-k\mu_1.A_1A_2)=\mathrm{tang}J_1-k\mu_1\,\frac{\sin A_1A_2}{\cos J_1{}^2}.$$

Führt man dies in die obige Gleichung zur Bestimmung von k ein, so wird dieselbe:

$$\frac{r+h}{r+h_1}\cdot\frac{\cos A_1A_2}{\cos AA_2}=\frac{1-\mathrm{tang}AA_2(\mathrm{tang}J-k\mu\,\frac{\sin AA_2}{\cos J^2})}{1-\mathrm{tang}A_1A_2(\mathrm{tang}J_1-k\mu_1\,\frac{\sin A_1A_2}{\cos J_1{}^2})},$$

oder

$$\frac{r+h}{r+h_1}=\frac{\cos AA_2-\sin AA_2\mathrm{tang}J+k\mu\left\{\frac{\sin AA_2}{\cos J}\right\}^2}{\cos A_1A_2-\sin A_1A_2\mathrm{tang}J_1+k\mu_1\left\{\frac{\sin A_1A_2}{\cos J_1}\right\}^2},$$

oder

$$\frac{r+h}{r+h_1}=\frac{\frac{\cos(J+AA_2)}{\cos J}+k\mu\left\{\frac{\sin AA_2}{\cos J}\right\}^2}{\frac{\cos(J_1+A_1A_2)}{\cos J_1}+k\mu_1\left\{\frac{\sin A_1A_2}{\cos J_1}\right\}^2}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man den folgenden Näherungsausdruck für k:

$$k=\frac{(r+h)\frac{\cos(J_1+A_1A_2)}{\cos J_1}-(r+h_1)\frac{\cos(J+AA_2)}{\cos J}}{\mu(r+h_1)\left\{\frac{\sin AA_2}{\cos J}\right\}^2-\mu_1(r+h)\left\{\frac{\sin A_1A_2}{\cos J_1}\right\}^2},$$

oder

$$k=\frac{(1+\frac{h}{r})\frac{\cos(J_1+A_1A_2)}{\cos J_1}-(1+\frac{h_1}{r})\frac{\cos(J+AA_2)}{\cos J}}{\mu(1+\frac{h_1}{r})\left\{\frac{\sin AA_2}{\cos J}\right\}^2-\mu_1(1+\frac{h}{r})\left\{\frac{\sin A_1A_2}{\cos J_1}\right\}^2}.$$

Hat man aber erst einen Näherungswerth von k gefunden, so wird es immer auch leicht sein, den genauen, der Gleichung

$$\frac{r+h}{r+h_1}=\frac{1+\frac{h}{r}}{1+\frac{h_1}{r}}=\frac{\cos(J_1-k\mu_1.A_1A_2)\cos\{J+(1-k\mu).AA_2\}}{\cos(J-k\mu.AA_2)\cos\{J_1+(1-k\mu_1).A_1A_2\}}$$

oder

$$\frac{r+h}{r+h_1}\cdot\frac{\cos A_1A_2}{\cos AA_2}=\frac{1-\operatorname{tang}AA_2.\operatorname{tang}(J-k\mu.AA_2)}{1-\operatorname{tang}A_1A_2.\operatorname{tang}(J_1-k\mu_1.A_1A_2)}$$

vollständig genügenden Werth von k zu finden, und dann ferner auch h_2 nach dem Obigen zu berechnen.

Wenn man auf die sphärische Gestalt der Erdoberfläche nicht Rücksicht nimmt, sondern dieselbe als eine Ebene betrachtet, gestattet die vorhergehende Aufgabe eine etwas andere Behandlung, die wir noch in der Kürze mittheilen wollen.

Man nehme den Punkt A als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz an. Der Horizont von A sei die Ebene der xy. Die Projection der Linie AA_1 auf den Horizont von A sei der positive Theil der Axe der x. Der positive Theil der Axe der y liege auf derselben Seite der Axe der x, auf welcher die Projection des Punktes A_2 auf dem Horizonte von

A liegt. Der positive Theil der Axe der z liege über dem Horizonte von A. Die Coordinaten der Punkte A_1 und A_2 in diesem Systeme seien x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2. Die Winkel A, A_1 und J, J_1 seien auf ganz ähnliche Art wie vorher gemessen, ebenso die Linie B, welche jetzt nicht wie vorher ein Kreisbogen, sondern eine gerade Linie ist, wenigstens als eine solche angenommen wird.

Nun hat man zuerst die Proportionen

$$\sin(A+A_1):\sin A_1 = B:AA_2,$$

$$\sin(A+A_1):\sin A = B:A_1A_2;$$

wo nämlich A, A_1, A_2 die Projectionen von A, A_1, A_2 auf dem Horizonte von A bezeichnen. Also ist

$$AA_2=\frac{\sin A_1}{\sin(A+A_1)}B, \quad A_1A_2=\frac{\sin A}{\sin(A+A_1)}B.$$

Ferner ist offenbar:

$$x_1=B, \quad y_1=0, \quad z_1=h_1-h$$

und

$$x_2=AA_2.\cos A, \quad y_2=AA_2.\sin A, \quad z_2=AA_2.\tang J$$

oder nach dem Vorhergehenden:

$$x_2=\frac{\cos A\sin A_1}{\sin(A+A_1)}B, \quad y_2=\frac{\sin A\sin A_1}{\sin(A+A_1)}B,$$

$$z_2=\frac{\sin A_1\tang J}{\sin(A+A_1)}B.$$

Legen wir nun durch den Punkt A_1 ein dem Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, und bezeichnen die Coordinaten des Punktes A_2 in diesem Systeme durch $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_2$; so ist

$$\mathfrak{x}_2=A_1A_2.\cos(180^0-A_1), \quad \mathfrak{y}_2=A_1A_2.\sin A_1, \quad \mathfrak{z}_2=A_1A_2.\tang J_1;$$

also nach dem Obigen:

$$\mathfrak{x}_2=-\frac{\sin A\cos A_1}{\sin(A+A_1)}B, \quad \mathfrak{y}_2=\frac{\sin A\sin A_1}{\sin(A+A_1)}B,$$

$$\mathfrak{z}_2=\frac{\sin A\tang J_1}{\sin(A+A_1)}B.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist

$$x_2 = x_1 + \mathfrak{x}_2, \quad y_2 = y_1 + \mathfrak{y}_2, \quad z_2 = z_1 + \mathfrak{z}_2;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\cos A \sin A_1}{\sin(A + A_1)} = 1 - \frac{\sin A \cos A_1}{\sin(A + A_1)},$$

$$\frac{\sin A \sin A_1}{\sin(A + A_1)} = \frac{\sin A \sin A_1}{\sin(A + A_1)},$$

$$\frac{\sin A_1 \operatorname{tang} J}{\sin(A + A_1)} B = h_1 - h + \frac{\sin A \operatorname{tang} J_1}{\sin(A + A_1)} B.$$

Die beiden ersten dieser drei Gleichungen sind identische Gleichungen, so dass uns also nur die dritte Gleichung bleibt, welche sich leicht auf die Form

$$\frac{h - h_1}{B} = \frac{\sin A \operatorname{tang} J_1 - \sin A_1 \operatorname{tang} J}{\sin(A + A_1)}$$

bringen lässt.

Bezeichnen wir jetzt die den als aus dem Mittelpunkte der Erde mit dem Halbmesser $r + h$ beschriebene Kreisbogen betrachteten geraden Linien AA_2 und A_1A_2 entsprechenden Winkel am Mittelpunkte der Erde durch C und C_1, so dass

$$2(r + h)\pi : AA_2 = 360^0 : C,$$

$$2(r + h)\pi : A_1A_2 = 360^0 : C_1;$$

also

$$C = \frac{AA_2}{r + h} \cdot \frac{180^0}{\pi}, \quad C_1 = \frac{A_1A_2}{r + h} \cdot \frac{180^0}{\pi}$$

ist; so ist

$$z_2 = \frac{\sin A_1 \operatorname{tang}(J - k\mu C)}{\sin(A + A_1)} B, \quad \mathfrak{z}_2 = \frac{\sin A \operatorname{tang}(J_1 - k\mu_1 C_1)}{\sin(A + A_1)} B$$

und

$$\frac{h - h_1}{B} = \frac{\sin A \operatorname{tang}(J_1 - k\mu_1 C_1) - \sin A_1 \operatorname{tang}(J - k\mu C)}{\sin(A + A_1)}$$

zu setzen. Aus der letzten Gleichung ist k zu bestimmen, bevor man die dritten Coordinaten z_2, $\mathfrak{z}_2$ des Punktes A_2 mittelst der beiden ersten Gleichungen bestimmen kann.

Näherungsweise ist wie oben:

$$\operatorname{tang}(J - k\mu C) = \operatorname{tang} J - k\mu \frac{\sin C}{\cos J^2},$$

$$\mathrm{tang}(J_1 - k\mu_1 C_1) = \mathrm{tang} J_1 - k\mu_1 \frac{\sin C_1}{\cos J_1^2};$$

also

$$\frac{h-h_1}{B} = \frac{\sin A \,\mathrm{tang} J_1 - \sin A_1 \,\mathrm{tang} J - k\left(\mu_1 \frac{\sin A \sin C_1}{\cos J_1^2} - \mu \frac{\sin A_1 \sin C}{\cos J^2}\right)}{\sin(A + A_1)},$$

woraus

$$k = \frac{\sin A_1 \,\mathrm{tang} J - \sin A \,\mathrm{tang} J_1 + \frac{h-h_1}{B} \sin(A + A_1)}{\mu \frac{\sin A_1 \sin C}{\cos J^2} - \mu_1 \frac{\sin A \sin C_1}{\cos J_1^2}}$$

zur ersten annähernden Berechnung des Refractions-Coefficienten k folgt.

Es hat mir immer wünschenswerth geschienen, dass über die terrestrische Strahlenbrechung mit gehöriger Rücksicht auf Thermometer und Barometer, namentlich über den wahren Werth des Refractions-Coefficienten k für die Temperatur des schmelzenden Eises und die Barometerhöhe $0^m,76$, neue Untersuchungen und desfallsige geodätische Messungen angestellt werden möchten; und ich glaube, dass bei dergleichen Untersuchungen die obigen theoretischen Betrachtungen wohl zweckmässige Anwendung finden dürften. Mir selbst stehen dazu wohl die Hülfsmittel, aber leider nicht die Zeit und Gelegenheit zu Gebote. Möchte daher ein Anderer sich einer solchen gewiss sehr verdienstlichen Arbeit unterziehen!

XIII.

Ueber einen Kettenbruch von zweigliedriger Periode.

Von

Herrn Emil Kahl,

Lieutenant der K. S. Artillerie und Lehrer der Physik und Chemie an der K. S. Kriegsschule zu Dresden.

Es soll irgend ein Näherungswerth des Kettenbruches

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\beta \; \vdots}}}}}$$

allgemein dargestellt werden. Die ersten beiden Näherungswerthe sind:

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{Z_1}{N_1},\quad \frac{\alpha\beta+1}{\beta}=\frac{Z_2}{N_2}.$$

Zur Auffindung der übrigen Näherungswerthe wenden wir die Reductionsformel an:

$$Z_3=\alpha Z_2+Z_1,\quad Z_4=\beta Z_3+Z_2;$$

$$N_3=\alpha N_2+N_1,\quad N_4=\beta N_3+N_2.$$

Mit Hülfe derselben stellen wir eine Reihe der auf einander folgenden Zähler und Nenner zusammen, betrachten diese als Grundreihe und leiten von ihr, ähnlich wie bei den Differenzenreihen, andere Reihen ab. In folgendem Schema sind mit a_0, a_1; a_2, a_3..... die Glieder der Grundreihe, mit Δa_0, Δa_1, Δa_2, Δa_3.... die Glieder der ersten abgeleiteten Reihe, mit $\Delta^2 a_0$, $\Delta^2 a_1$, $\Delta^2 a_2$, $\Delta^2 a_3$... die Glieder der zweiten abgeleiteten Reihe bezeichnet etc.

$$\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots & a_{2n-1} & a_{2n} & a_{2n+1} \\
 & \Delta a_0 & \Delta a_1 & \Delta a_2 \ldots\ldots & \Delta a_{2n-2} & \Delta a_{2n-1} & \Delta a_{2n} \\
 & & \Delta^2 a_0 & \Delta^2 a_1 \ldots\ldots & \Delta^2 a_{2n-3} & \Delta^2 a_{2n-2} & \Delta^2 a_{2n-1} \\
 & & & \Delta^3 a_0 \ldots\ldots & \Delta^3 a_{2n-4} & \Delta^3 a_{2n-3} & \Delta^3 a_{2n-2} \\
 & & & & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Jede dieser abgeleiteten Reihen entsteht aus der nächst vorhergehenden, wenn man bei dieser, falls sie eine abgeleitete Reihe gerader Ordnung ist, die Glieder abwechselnd mit β α, falls sie dagegen eine abgeleitete Reihe ungerader Ordnung ist, abwechselnd mit α β multiplicirt und diese Producte von dem doppelt genommenen folgenden Gliede subtrahirt, wobei zu beachten ist, dass die Hauptreihe hierbei als eine abgeleitete Reihe nullter, also gerader Ordnung zu betrachten ist. Mit Rücksicht auf diese Entstehungsweise haben wir daher folgende Gleichungen:

$$\Delta a_0 = 2a_1 - \beta a_0, \quad \Delta a_1 = 2a_2 - \alpha . a_1, \quad \Delta a_2 = 2a_3 - \beta . a_2 \quad \text{u. s. w.}$$

$$\Delta^2 a_0 = 2\Delta a_1 - \alpha \Delta a_0, \; \Delta^2 a_1 = 2\Delta a_2 - \beta \Delta a_1, \; \Delta^2 a_2 = 2\Delta a_3 - \alpha \Delta a_2 \text{ u. s. w.}$$

allgemein:

$$\Delta^{2n} a_0 = 2\Delta^{2n-1} a_1 - \alpha \Delta^{2n-1} a_0, \quad \Delta^{2n} a_1 = 2\Delta^{2n-1} a_2 - \beta \Delta^{2n-1} a_1,$$
$$\Delta^{2n} a_2 = 2\Delta^{2n-1} a_3 - \alpha \Delta^{2n-1} a_2 \text{ u. s. w.},$$

$$\Delta^{2n+1} a_0 = 2\Delta^{2n} a_1 - \beta \Delta^{2n} a_0, \quad \Delta^{2n+1} a_1 = 2\Delta^{2n} a_2 - \alpha \Delta^{2n} a_1,$$
$$\Delta^{2n+1} a_2 = 2\Delta^{2n} a_3 - \beta \Delta^{2n} a_2 \text{ u. s. w.}$$

Auf folgendem Wege lernt man die Beziehung kennen, die zwischen irgend einem Gliede der Grundreihe und den Anfangsgliedern der abgeleiteten Reihen stattfindet. Nach dem Obigen ergiebt sich nämlich unmittelbar:

$$2a_1 = \Delta a_0 + \beta a_0,$$

$$\begin{aligned}
2^2 a_2 = 2\Delta a_1 + 2\alpha a_1 = {} & \Delta^2 a_0 + \alpha \Delta a_0 \\
& + \alpha \Delta a_0 + \alpha\beta . a_0 \\
\hline
& \Delta^2 a_0 + 2\alpha \Delta a_0 + \alpha\beta . a_0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2^3 a_3 = 2^2 \Delta a_2 + 2^2 \beta a_2 = \Delta^3 a_0 &+ 2\beta \Delta^2 a_0 + \alpha\beta \Delta a_0 \\
&+ \beta \Delta^2 a_0 + 2\alpha\beta \Delta a_0 + \alpha\beta^2 . a_0 \\
\hline
\Delta^3 a_0 &+ 3\beta \Delta^2 a_0 + 3\alpha\beta \Delta_0 a + \alpha\beta^2 . a_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2^4 a_4 = 2^3 \Delta a_3 + 2^3 \alpha a_3 = \Delta^4 a_0 &+ 3\alpha \Delta^3 a_0 + 3\alpha\beta \Delta^2 a_0 + \alpha^2\beta \Delta a_0 \\
&+ \alpha \Delta^3 a_0 + 3\alpha\beta \Delta^2 a_0 + 3\alpha^2\beta \Delta a_0 + \alpha^2\beta^2 a_0 \\
\hline
\Delta^4 a_0 + 4\alpha \Delta^3 a_0 &+ 6\alpha\beta \Delta^2 a_0 + 4\alpha^2\beta \Delta a_0 + \alpha^2\beta^2 . a_0 .
\end{aligned}
$$

In diesen Ausdrücken spricht sich folgendes Gesetz aus:

$$
\text{I.} \quad \left\{
\begin{aligned}
2^{2n} . a_{2n} = &(2n)_0 \Delta^{2n} a_0 + (2n)_1 \alpha \Delta^{2n-1} a_0 + (2n)_2 (\alpha\beta) \Delta^{2n-2} a_0 \\
&+ (2n)_3 \alpha . (\alpha\beta) \Delta^{2n-3} a_0 + (2n)_4 (\alpha\beta)^2 \Delta^{2n-4} a_0 + \ldots \\
&\ldots + (2n)_{2n-1} \alpha . (\alpha\beta)^{n-1} \Delta a_0 + (2n)_{2n} (\alpha\beta)^n . a_0 , \\[1ex]
2^{2n+1} . a_{2n+1} = &(2n+1)_0 \Delta^{2n+1} a_0 + (2n+1)_1 \beta . \Delta^{2n} a_0 \\
&+ (2n+1)_2 (\alpha\beta) \Delta^{2n-1} a_0 + (2n+1)_3 \beta . (\alpha\beta) \Delta^{2n-2} a_0 \\
&+ (2n+1)_4 (\alpha\beta)^2 \Delta^{2n-3} a_0 + \ldots\ldots (2n+1)_{2n} (\alpha\beta)^n . a_0 \\
&+ (2n+1)_{(2n+1)} . \beta (\alpha\beta)^n a_0 .
\end{aligned}
\right.
$$

Die allgemeine Gültigkeit dieses Gesetzes lässt sich leicht durch den Schluss von $2n$ auf $2n+1$ bewahrheiten. Berechnet man nun die Zähler der Partialbrüche des in Rede stehenden Kettenbruches mittels der im Eingange gedachten Reductions-formel und nimmt dieselben als Glieder einer Hauptreihe an und bestimmt hieraus die abgeleiteten Reihen nach Anleitung des unmittelbar Vorhergehenden, so erhält man Folgendes:

$$a_0 = Z_1 , \quad a_1 = Z_2 , \quad a_2 = \alpha Z_2 + Z_1 , \quad a_3 = \alpha\beta . Z_2 + Z_2 + \beta Z_1 ;$$

$$a_4 = \alpha^2\beta . Z_2 + 2\alpha Z_2 + \alpha\beta Z_1 + Z_1 , a_5 = \alpha^2\beta^2 Z_2 + 3\alpha\beta Z_2 + Z_2 + \alpha\beta^2 Z_1 + 2\beta . Z_1 ;$$

$$\Delta a_0 = 2Z_2 - \beta Z_1 , \quad \Delta a_1 = \alpha Z_2 + 2Z_1 , \quad \Delta a_2 = \alpha\beta . Z_2 + 2Z_2 + \beta . Z_1 ;$$

$$\Delta a_3 = \alpha^2\beta . Z_2 + 3\alpha Z_2 + \alpha\beta . Z_1 + 2Z_1 , \quad \Delta a_4 = \alpha^2\beta^2 Z_2 + 4\alpha\beta . Z_2 + 2Z_2 + \alpha\beta^2 Z_1 + 3\beta Z_1 ;$$

$$\Delta^2 a_0 = Z_1(\alpha\beta + 4) , \quad \Delta^2 a_1 = Z_2(\alpha\beta + 4) , \quad \Delta^2 a_2 = (\alpha Z_2 + Z_1)(\alpha\beta + 4) ;$$

$$\Delta^2 a_3 = (\alpha\beta Z_2 + Z_2 + \beta Z_1)(\alpha\beta + 4) ;$$

$$\Delta^3 a_0 = (2Z_2 - \beta Z_1)(\alpha\beta + 4) , \quad \Delta^3 a_1 = (\alpha Z_2 + 2Z_1)(\alpha\beta + 4) ;$$

$$\Delta^3 a_2 = (\alpha\beta Z_2 + 2Z_2 + \beta . Z_1)(\alpha\beta + 4) ;$$

$\Delta^4 a_0 = Z_1(\alpha\beta + 4)^2. \quad \Delta^4 a_1 = Z_2(\alpha\beta + 4)^2;$

$\Delta^5 a_0 = (2Z_2 - \beta Z_1)(\alpha\beta + 4)^2.$

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass die gleichstelligen Glieder der geraden abgeleiteten Reihen unter sich und die der ungeraden abgeleiteten Reihen unter sich eine geometrische Progression bilden, deren Quotient $(\alpha\beta + 4)$ ist, so dass allgemein:

$$\Delta^{2n} a_0 = Z_1(\alpha\beta + 4)^n,$$
$$\Delta^{2n+1} a_0 = (2Z_2 - \beta Z_1)(\alpha\beta + 4)^n.$$

Die Controle für die Richtigkeit dieser allgemeinen Ausdrücke verschafft man sich durch den Schluss von $2n$ auf $2n+1$ und $2n+2$. Führt mar nun die Werthe von Δa_0, $\Delta^2 a_0$, $\Delta^3 a_0$, $\Delta^4 a_0$ etc. in die Gleichung I. ein, so erhält man:

$$\text{II.} \left\{ \begin{aligned} 2^{2n}.Z_{2n+1} &= (2n)_0.Z_1(\alpha\beta+4)^n + (2n)_1.\alpha.(2Z_2 - \beta Z_1)(\alpha\beta+4)^{n-1} \\ &+ (2n)_2.(\alpha\beta)Z_1(\alpha\beta+4)^{n-1} + (2n)_3\alpha.(\alpha\beta)(2Z_2 - \beta Z_1).(\alpha\beta+4)^{n-2} \\ &+ (2n)_4.(\alpha\beta)^2.Z_1(\alpha\beta+4)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots \\ &+ (2n)_{2n-1}.\alpha.(\alpha\beta)^{n-1}.(2Z_2 - \beta Z_1) + (2n)_{(2n)}(\alpha\beta)^n.Z_1, \\ 2^{2n-1}Z_{2n} &= (2n-1)_0(2Z_2 - \beta Z_1)(\alpha\beta+4)^{n-1} \\ &+ (2n-1)_1.\beta.Z_1(\alpha\beta+4)^{n-1} + (2n-1)_2(\alpha\beta).(2Z_2 - \beta Z_1)(\alpha\beta+4)^{n-2} \\ &+ (2n-1)_3.\beta.(\alpha\beta).Z_1(\alpha\beta+4)^{n-2} \\ &+ (2n-1)_4.(\alpha\beta)^2(2Z_2 - \beta Z_1).(\alpha\beta+4)^{n-3} \\ &+ (2n-1)_5\beta.(\alpha\beta)^2.Z_1(\alpha\beta+4)^{n-3} \\ &+ \ldots.\ (2n-1)_{2n-2}(\alpha\beta)^{n-1}.(2Z_2 - \beta Z_1) \\ &+ (2n-1)_{(2n-1)}.\beta.(\alpha\beta)^{n-1}.Z_1. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung II. lässt sich in einen geschlossenen Ausdruck umwandeln, wenn man bedenkt, dass:

$$Z_1 . \frac{\{[\sqrt{\alpha\beta+4} + \sqrt{\alpha\beta}]^{2n} + [\sqrt{\alpha\beta+4} - \sqrt{\alpha\beta}]^{2n}\}}{2}$$
$$= (2n)_0 Z_1(\alpha\beta+4)^n + (2n)_2(\alpha\beta).Z_1(\alpha\beta+4)^{n-1}$$
$$+ (2n)_4.(\alpha\beta)^2.Z_1(\alpha\beta+4)^{n-2} + \ldots.\ (2n)_{2n}.(\alpha\beta)^n.Z_1.$$

$$\alpha.(2Z_2-\beta Z_1)\frac{\{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}-[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}\}}{2\sqrt{\alpha\beta}.\sqrt{\alpha\beta+4}}$$

$$\begin{aligned}= (2n)_1.\alpha.(2Z_2-\beta Z_1)(\alpha\beta+4)^{n-1} \\ + (2n)_3.\alpha.(2Z_2-\beta Z_1).(\alpha\beta).(\alpha\beta+4)^{n-2} + \ldots\ldots \\ + (2n-1)_{2n-1}\alpha.(2Z_2-\beta Z_1).(\alpha\beta)^{n-1}.\end{aligned}$$

$$(2Z_2-\beta Z_1).\left\{\frac{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}+[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}}{2\sqrt{\alpha\beta+4}}\right\}$$

$$\begin{aligned}=(2n-1)_0.(2Z_2-\beta Z_1)(\alpha\beta+4)^{n-1} \\ +(2n-1)_2.(2Z_2-\beta Z_1)(\alpha\beta+4)^{n-2}(\alpha\beta) \\ +(2n-1)_4(2Z_2-\beta Z_1)(\alpha\beta+4)^{n-3}(\alpha\beta)^n \\ +\ldots\ldots+(2n-1)_{2n-2}.(2Z_2-\beta Z_1)(\alpha\beta)^{n-1},\end{aligned}$$

$$\beta.Z_1\left\{\frac{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}-[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right\}$$

$$\begin{aligned}=(2n-1)_1\beta.Z_1(\alpha\beta+4)^{n-1}+(2n-1)_3.\beta.(\alpha\beta)Z_1.(\alpha\beta+4)^{n-2} \\ +(2n-1)_5\beta(\alpha\beta)^2Z_1(\alpha\beta+4)^{n-3} \\ +\ldots\ldots(2n-1)_{2n-1}.\beta.(\alpha\beta)^{n-1}.Z_1.\end{aligned}$$

Führt man diese Ausdrücke, die aus der Entwickelung der links stehenden Binome hervorgegangen sind, in II. ein, so erhält man:

$$\text{III.}\left\{\begin{aligned}2^{2n+1}.Z_{2n+1}=Z_1\{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}+[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}\} \\ +\frac{\alpha.(2Z_2-\beta Z_1).\{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}-[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}\}}{\sqrt{\alpha\beta}.\sqrt{\alpha\beta+4}} \\ 2^{2n}.Z_{2n}=(2Z_2-\beta Z_1)\frac{\{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}+[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}\}}{\sqrt{\alpha\beta+4}} \\ +\frac{\beta.Z_1.\{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}-[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}\}}{\sqrt{\alpha\beta}}\end{aligned}\right.$$

Mit Berücksichtigung, dass die Grundreihe und die abgeleiteten Reihen für die Nenner, aus denen der Zähler erhalten werden wenn man überall für Z_1 und Z_2 N_1 und N_2 schreibt, lassen sich die Ausdrücke für die Nenner aufstellen, wie folgt:

$$
\text{IV.}\left\{
\begin{aligned}
2^{2n+1}N_{2n+1} &= N_1\{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}+[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}\} \\
&\quad+\frac{\alpha.(2N_2-\beta N_1).\{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}-[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n}\}}{\sqrt{\alpha\beta}.\sqrt{\alpha\beta+4}} \\
2^{2n}.N_{2n} &= \frac{(2N_2-\beta N_1)\{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}+[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}\}}{\sqrt{\alpha\beta+4}} \\
&\quad+\frac{\beta.N_1.\{[\sqrt{\alpha\beta+4}+\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}-[\sqrt{\alpha\beta+4}-\sqrt{\alpha\beta}]^{2n-1}\}}{\sqrt{\alpha\beta}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Setzt man in III. und IV. die Werthe $Z_1=\alpha$, $Z_2=\alpha\beta+1$, $N_1=1$, $N_2=\beta$ ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\text{V.}\quad\begin{cases}\dfrac{Z_{2n+1}}{N_{2n+1}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\cdot\dfrac{(2+\sqrt{\alpha\beta}[\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta+4}])[\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta+4}]^{2n}-(2+\sqrt{\alpha\beta}[\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta+4}])(\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta+4})^{2n}}{\{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta+4}\}^{2n+1}-\{\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta+4}\}^{2n+1}},\\[2ex] \dfrac{Z_{2n}}{N_{2n}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\cdot\dfrac{(2+\sqrt{\alpha\beta}[\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta+4}])[\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta+4}]^{2n-1}-(2+\sqrt{\alpha\beta}[\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta+4}])(\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta+4})^{2n-1}}{\{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta+4}\}^{2n}-\{\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta+4}\}^{2n}}.\end{cases}$$

Aus V. geht hervor, dass der Ausdruck für einen geradstelligen und ungeradstelligen Näherungswerth auf gleiche Weise gebildet ist, so dass ganz allgemein:

$$\text{VI.}\quad\frac{Z_m}{N_m}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{(2+\sqrt{\alpha\beta}[\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta+4}])[\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta+4}]^{m-1}-(2+\sqrt{\alpha\beta}[\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta+4}])(\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta+4})^{m-1}}{\{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha\beta+4}\}^{m}-\{\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta+4}\}^{m}}.$$

Setzt man hierin $\alpha=\beta=1$, so erhält man für den Kettenbruch, dessen Partialnenner sämmtlich $=1$ sind:

$$\text{VII.}\quad \frac{Z_m}{N_m}=\frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{m-1}-(3-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{m-1}}{(1+\sqrt{5})^m-(1-\sqrt{5})^m}.$$

Die Zähler der Näherungswerthe dieses Kettenbruches bilden bekanntlich die Reihe:

$$Z_1=1,\quad Z_2=2,\quad Z_3=3,\quad Z_4=5,\quad Z_5=8,\quad Z_6=13 \text{ etc.}$$

Setzt man in III. $\alpha=\beta=1$ und $Z_1=1$, $Z_2=2$, so erhält man folgenden für gerade und ungerade m geltenden Ausdruck als allgemeines Glied dieser Reihe:

$$\text{VIII.}\quad Z_m=\frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{m-1}-(3-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{m-1}}{2^m.\sqrt{5}}.$$

XIV.

Ueber den Distanzmesser von Martins.

Von

dem Herausgeber.

Das in der Ueberschrift genannte einfache Instrument kenne ich nur aus einer kurzen Beschreibung in dem „Lehrgang der mechanischen Naturlehre für höhere Unterrichts-anstalten von G. Karsten. Zweite Abtheilung. Kiel. 1851. S. 261.“ Dieselbe lautet folgendermassen:

„Der Distanzmesser (von Martins) (Taf. V. Fig. 2.) besteht aus einem Fernrohre, in welchem sich ein unter 45° geneigter Spiegel S befindet, der in der Mitte durchbohrt ist, um durch das Fernrohr von A aus nach dem Gegenstande G sehen zu können. In dem vertikalen und hohlen Ständer des Fernrohrs befindet sich ein zweiter Spiegel S_1, welcher um eine horizontale Axe drehbar ist. Alsdann kann man durch Drehung dem Spiegel S_1 eine solche Stellung geben, dass das Auge gleichzeitig G direct durch das Fernrohr und durch Spiegelung von S_1 und S wahrnimmt. Aus der Grösse der Drehung von S_1, welche an einem Limbus abzulesen ist, und der bekannten Entfernung der beiden Spiegel von einander lässt sich, wie leicht ersichtlich, die Entfernung AG berechnen.“

Dass dieses Instrument eine grosse Genauigkeit wohl nicht gewähren kann, ist leicht zu übersehen, indess scheint mir die Idee einfach und sinnreich, und das Instrument, das wohl auch noch einer Verbesserung fähig ist, daher wohl werth zu sein,

dass ich hier eine kurze Theorie desselben entwickele, wodurch es zugleich etwas weiter bekannt werden wird, als dies bis jetzt der Fall zu sein scheint.

In Taf. V. Fig. 3., die ohne besondere Erläuterung für sich verständlich sein wird, sei E die Entfernung des Gegenstandes G von dem Spiegel S, und x sei die Entfernung der beiden Spiegel S und S_1 von einander, welche bei diesem Instrumente eine constante Grösse ist. Ferner sei φ der gleichfalls constante Neigungswinkel des Spiegels S gegen die Visirlinie AG, welchen wir aber nicht wie in der obigen Beschreibung von der bestimmten Grösse 45°, sondern überhaupt nur als constant annehmen wollen. Endlich sei ψ der constante Winkel, unter welchem die Linie SS_1 gegen die von S_1 nach dem Nullpunkte O des mit dem drehbaren Spiegel S_1 verbundenen eingetheilten Kreises gezogene Linie S_1O geneigt ist. Der Neigungswinkel des Spiegels S_1 gegen die Linie S_1O, welcher auf dem eingetheilten Kreise gemessen wird, und als positiv oder als negativ betrachtet werden soll, jenachdem der Spiegel S_1 bei der Messung zwischen S_1S und S_1O sich befindet oder nicht, sei μ. Dies vorausgesetzt, haben wir nach bekannten geometrischen und katoptrischen Sätzen die Proportion:

$$E:x=\sin\{180^\circ-2(\psi-\mu)\}:\sin\{2(\psi-\mu)-2\varphi\},$$

d. i. die Proportion:

$$E:x=\sin 2(\psi-\mu):\sin 2\{(\psi-\mu)-\varphi\},$$

oder, wenn wir

$$\psi-\varphi=\omega$$

setzen, die Proportion:

$$E:x=\sin 2(\psi-\mu):\sin 2(\omega-\mu),$$

also

$$1)\quad E=\frac{\sin 2(\psi-\mu)}{\sin 2(\omega-\mu)}x,$$

mittelst welcher Formel man die Entfernung E aus dem an dem Instrumente gemessenen Winkel μ berechnen kann, wenn man die jedem einzelnen Instrumente eigenthümlichen Constanten x, ψ, ω kennt; und diese Constante für jedes einzelne Instrument mit möglichster Genauigkeit ein für alle Mal zu bestimmen, ist daher eine Hauptsache für dessen sicheren Gebrauch, welcher so genau als möglich zu genügen, man sich keine Mühe verdriessen lassen darf.

Zu dem Ende stelle man das Instrument in einem beliebigen Standpunkte auf, wähle drei von diesem Standpunkte in verschie-

dener Entfernung befindliche Gegenstände G, G_1, G_2 aus, messe deren Entfernungen E, E_1, E_2 von dem Spiegel S so genau als möglich, am besten natürlich mit Maassstäben, und bestimme an dem Instrumente die diesen drei Gegenständen entsprechenden Werthe des vorher durch μ bezeichneten Winkels, welche wir durch μ, μ_1, μ_2 bezeichnen wollen, natürlich in der Weise, wie überhaupt der Gebrauch des Instruments fordert. Dann haben wir nach dem Vorhergehenden die drei Proportionen:

$$E : x = \sin 2(\psi-\mu) : \sin 2(\omega-\mu),$$

$$E_1 : x = \sin 2(\psi-\mu_1) : \sin 2(\omega-\mu_1),$$

$$E_2 : x = \sin 2(\psi-\mu_2) : \sin 2(\omega-\mu_2);$$

aus denen sich

$$x = \frac{\sin 2(\omega-\mu)}{\sin 2(\psi-\mu)} E = \frac{\sin 2(\omega-\mu_1)}{\sin 2(\psi-\mu_1)} E_1 = \frac{\sin 2(\omega-\mu_2)}{\sin 2(\psi-\mu_2)} E_2$$

ergiebt. Hieraus folgt zuvörderst

$$\frac{E \sin 2(\omega-\mu)}{E_1 \sin 2(\omega-\mu_1)} = \frac{\sin 2(\psi-\mu)}{\sin 2(\psi-\mu_1)},$$

also

$$\frac{E \sin 2(\omega-\mu)}{E_1 \sin 2(\omega-\mu_1)} = \frac{\cos 2\mu \operatorname{tang} 2\psi - \sin 2\mu}{\cos 2\mu_1 \operatorname{tang} 2\psi - \sin 2\mu_1},$$

folglich:

$$2)\quad \operatorname{tang} 2\psi = \frac{E \sin 2\mu_1 \sin 2(\omega-\mu) - E_1 \sin 2\mu \sin 2(\omega-\mu_1)}{E \cos 2\mu_1 \sin 2(\omega-\mu) - E_1 \cos 2\mu \sin 2(\omega-\mu_1)},$$

und ganz eben so:

$$3)\quad \operatorname{tang} 2\psi = \frac{E \sin 2\mu_2 \sin 2(\omega-\mu) - E_2 \sin 2\mu \sin 2(\omega-\mu_2)}{E \cos 2\mu_2 \sin 2(\omega-\mu) - E_2 \cos 2\mu \sin 2(\omega-\mu_2)}.$$

Setzt man diese beiden Werthe von tang2ψ einander gleich, so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \; & E \sin 2(\mu_1-\mu_2) \sin 2(\omega-\mu) \\ & + E_1 \sin 2(\mu_2-\mu) \sin 2(\omega-\mu_1) \\ & + E_2 \sin 2(\mu-\mu_1) \sin 2(\omega-\mu_2), \end{aligned}$$

aus der sich ferner die Gleichung

4) $\tang 2\omega$

$$=\frac{E\sin 2\mu\sin 2(\mu_1-\mu_2)+E_1\sin 2\mu_1\sin 2(\mu_2-\mu)+E_2\sin 2\mu_2\sin 2(\mu-\mu_1)}{E\cos 2\mu\sin 2(\mu_1-\mu_2)+E_1\cos 2\mu_1\sin 2(\mu_2-\mu)+E_2\cos 2\mu_2\sin 2(\mu-\mu_1)}$$

ergiebt, mittelst welcher sich ω berechnen lässt. Den Winkel ψ erhält man dann ferner mittelst einer der beiden Formeln 2) oder 3), und x endlich mittelst eines der folgenden aus dem Obigen bekannten Ausdrücke:

$$5)\quad x=\frac{\sin 2(\omega-\mu)}{\sin 2(\psi-\mu)}E=\frac{\sin 2(\omega-\mu_1)}{\sin 2(\psi-\mu_1)}E_1=\frac{\sin 2(\omega-\mu_2)}{\sin 2(\psi-\mu_2)}E_2.$$

Hat man auf diese Weise die drei Constanten x, ψ, ω bestimmt, so kann man jede Entfernung E mittelst der Formel 1) aus dem gemessenen entsprechenden Winkel μ berechnen.

Differentiirt man die Grösse

$$E=\frac{\sin 2(\psi-\mu)}{\sin 2(\omega-\mu)}x$$

in Bezug auf μ als veränderliche Grösse, so erhält man

$$6)\quad \partial E=2x\frac{\sin 2(\psi-\omega)}{\sin 2(\omega-\mu)^2}\partial\mu,$$

oder, wenn $\partial\mu$ in Secunden ausgedrückt ist:

$$7)\quad \partial E=2x\sin 1''.\frac{\sin 2(\psi-\omega)}{\sin 2(\omega-\mu)^2}\partial\mu.$$

Hiernach lässt sich der Fehler ∂E beurtheilen, welchen ein Fehler $\partial\mu$ in dem gemessenen Winkel μ in der zu bestimmenden Entfernung E hervorbringt. Weil nach dem Obigen

$$\psi-\omega=\varphi$$

ist, so kann man die vorstehende Formel auch so schreiben:

$$8)\quad \partial E=2x\sin 1''.\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2(\psi-\varphi-\mu)^2}\partial\mu.$$

Dass der Fehler ∂E sehr gross werden kann, erhellet leicht, weil, je grösser E wird, d. h. je genauer die Linien SG und S_1G einander parallel werden, desto mehr sich offenbar $\psi-\varphi-\mu$ der Null nähert, indem, wenn SG und S_1G einander genau parallel sind, augenscheinlich auch die Spiegel S und S_1 einander genau parallel sind, folglich $\psi-\mu=\varphi$ ist. Jedenfalls erfordert ein solches

Instrument Vorrichtungen zu einer sehr genauen Messung des im Obigen durch μ bezeichneten Winkels, und freilich auch hauptsächlich, dass die durch x bezeichnete Entfernung der beiden Spiegel S und S_1 von einander nicht zu klein sei, eine Forderung, durch welche, wenn ihr genügt werden soll, das Instrument nothwendig an Bequemlichkeit verlieren muss.

Es soll mir lieb sein, wenn das Obige geeignet ist, zur weiteren Prüfung des einfachen Instruments Veranlassung zu geben. Ein ganz genügender Distanzmesser scheint nun einmal zu den frommen Wünschen zu gehören, und man muss deshalb Alles, was in dieser Beziehung geboten wird, um so sorgfältiger prüfen.

Uebrigens würde ich es für zweckmässig halten, das Stativ des Instruments bei B (Taf. V. Fig. 3.) mit einem Charnier oder Zirkelgewinde zu versehen, so dass es sich um B drehen lässt, und dadurch dem Fernrohre des Instruments jede beliebige Richtung gegeben werden kann, wodurch in der Theorie und dem Gebrauche des Instruments nicht das Geringste geändert wird, weil dasselbe nur der Bedingung genügen muss, dass die oben durch x, φ, ψ, $\omega=\psi-\varphi$ bezeichneten Grössen constant bleiben.

XV.

Mathematische Erklärung einiger Erscheinungen bei sphärischen Linsen, ohne Rücksicht auf Kugel- und Farben-Abweichung.

Von dem

Herrn Rector Dr. Weiss

zu Ansbach.

Wenn man beim Unterricht in der Physik und Mathematik von der Annahme ausgeht, dass, abgesehen von der wissenschaftlichen Seite, erstere in der Schule gründlicher und verständlicher, letztere praktischer und anziehender gemacht wird, dadurch dass man beide Wissenschaften, wo immer möglich, mit einander verknüpft, wozu namentlich in dem dritten Cursus unserer Anstalten manchmal Gelegenheit geboten wird; so ergreift man diese sicherlich gern, wenn sie eine für den Schüler leichtfassliche Durchführung zulässt, auch dann noch, wenn, wie beim nachstehenden Aufsatz, gerade keine ausserordentlich praktische Wichtigkeit beansprucht werden kann, indem hier Hauptsache ist, dass die mathematisch leicht zu erhaltenden Resultate auch leicht physikalisch durch den Versuch als richtig bestätigt werden können. Hiezu gibt nun gegenwärtige Abhandlung, deren nöthiger Apparat in einigen Linsen besteht, passende Gelegenheit.

In jedem guten physikalischen Lehrbuch findet sich nämlich eine mehr oder minder weitläufige Betrachtung der Linsen-Wirkungen, immer jedoch ohne im Allgemeinen auf den Ort des Auges, welches das Bild beobachtet, gehörige Rücksicht zu nehmen, wodurch dann viele Erscheinungen, welche dem Schüler,

der durch eine ihm in die Hand gekommene Linse durchschaut, unerklärlich sind, indem in der Schule immer nur einige, nämlich die für die Praxis wichtigen Fälle durchgenommen worden sind. In Folgendem wollen wir nun das Fehlende zu ergänzen suchen, und es dürfte der Aufsatz dann als Pendant zu jedem physikalischen Lehrbuch namentlich in der oben angedeuteten Beziehung meinen hochverehrlichen Herren Collegen nicht unwillkommen erscheinen.

Die Aufgabe, die wir uns zur Lösung gestellt haben, ist folgende:

„In der Entfernung a steht ein Gegenstand vor einer „Linse, die die Brennweite f hat, hinter derselben in „der Entfernung d befindet sich das Auge des Beobach- „ters; in welcher Grösse, Entfernung und Stellung sieht „dieser das Bild, wenn angenommen wird, dass die Mit- „ten von Gegenstand, Linse und Auge immer in einer „Geraden liegen?“

§. 1.

Bekanntlich bewirkt die Linse ein Bild, welches um b von ihr entfernt, $q$mal grösser und aufrecht, oder verkehrt ist, wobei

$$b=\frac{af}{a+f}, \quad q=\frac{f}{a+f},$$

das positive Zeichen von q ein aufrechtes, das negative ein verkehrtes Bild, so wie noch ein positives f die Brennweite einer concaven und ein negatives f die einer convexen Linse bedeutet*). Ferner ist die scheinbare Grösse eines Gegenstandes, das ist die vom Auge beurtheilte, der wahren Grösse desselben direkt und seiner Entfernung vom Auge umgekehrt proportional.

Der Gegenstand ist vom Auge um $a+d$ entfernt, ist nun seine wahre Grösse $=g$, so ist demnach seine scheinbare Grösse $=\frac{g}{a+d}$.

---

*) Man findet alles dieses, was wir als bekannt voraus setzen, in jedem guten Lehrbuch erklärt und nachgewiesen; hätte es hier der Raum gestattet, so wäre vom Verfasser eine kurze, äusserst leichtfassliche und dabei zugleich auch für sphärische Spiegel geltende Entwickelung angefügt worden, welche nun aber bei anderer Gelegenheit gegeben werden soll.

Das Bild ist vom Auge um $b+d$ entfernt, seine wahre Grösse $= \frac{gf}{a+f}$, folglich seine scheinbare Grösse $= \frac{gf}{(b+d)(a+f)}$; wenn wir letztere durch die scheinbare Grösse des Gegenstandes dividiren, so erhalten wir offenbar die Zahl, welche die vom Auge beurtheilte durch die Linse bewirkte Vergrösserung vorstellt; bezeichnen wir diese mit m, so ist sie demnach:

$$m = \frac{f(a+d)}{(b+d)(a+f)} = \frac{f(a+d)}{a(d+f)+df}$$

$$= \frac{f}{f+\frac{ad}{a+d}} = \frac{1}{1+\frac{ad}{(a+d)f}}.$$

§. 2.

Aus diesem Ausdruck für m können sogleich folgende zwei allgemein gültige Schlüsse gemacht werden:

1) Da der für m erhaltene Ausdruck bezüglich a und d symmetrisch ist, so können, wenn die Linse an ihrem Orte bleibt, Gegenstand und Auge ihre Orte tauschen, ohne dass an der Vergrösserung selbst etwas geändert wird.

2) Weil für a oder $d=0$ die Vergrösserungszahl $=1$ wird, so erscheint einem jeden Beobachter ein hart hinter einer Linse stehender Gegenstand ebenso gross, als wenn diese nicht da wäre; dasselbe ist's, wenn man mit einer hart ans Auge gehaltenen Linse einen Gegenstand betrachtet.

§. 3.

Die Entfernung des Bildes vom Auge ist

$$= \varepsilon = b + d = d + \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{f}}.$$

Bekanntlich darf nun ein Gegenstand, wenn er deutlich gesehen werden soll, dem Auge nicht näher stehen, als eine bestimmte Weite (8—10 Zoll), welche man die kürzeste deutliche Sehweite nennt und mit s bezeichnet; als Bedingung für die Deutlichkeit des Bildes gilt somit

$$d + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{f}} > s,$$

und es kann nun, da diese Bedingung im Allgemeinen nicht immer erfüllt ist, das entstehende Bild bald deutlich, bald undeutlich sein. Eine weitere Quelle für eine zu befürchtende Undeutlichkeit liegt darin, dass b negativ und grösser als d sein kann, wodurch dann auch ε negativ wird, was so zu verstehen ist, dass die das Auge treffenden Strahlen erst hinter demselben ein Bild bewirken, wodurch dann offenbar auch nur eine höchst unvollkommene Empfindung in unserm Sehorgan, d. h. ein undeutliches Sehen bewirkt wird. Aus dem Ausdrucke für ε ist ferner ersichtlich, dass in Beziehung auf die Deutlichkeit ein Stellentausch von Gegenstand und Auge nicht ohne Aenderung der letztern gestattet ist.

Nähere Betrachtung der Concav- oder Zerstreuungs-Linsen.

§. 4.

Es war

$$m = \frac{1}{1 + \frac{ad}{(a+d)f}};$$

hier sind a und d der Natur der Sache nach, f aber der Annahme nach positiv, folglich ist m nur positiv, und weil der Nenner von m grösser als 1 ist, immer nur ein Bruch; man sieht demnach durch eine Concav-Linse den Gegenstand nur aufrecht und verkleinert, mit Ausnahme des in §. 2. 1) angeführten Falles. Unter sonst gleichen Umständen (bei demselben a und d) nimmt m ab, wenn f abnimmt, die Verkleinerung ist also dann um so stärker, je kleiner die Brennweite der Zerstreuungs-Linse ist. Die Entfernung des Bildes ist

$$d + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{f}},$$

also um so kleiner, je kleiner die Brennweite ist; ist nun d nicht schon grösser als s, so kann besonders, wenn a auch recht klein ist, dasselbe Bild undeutlich sein, welches unter denselben Umständen bei einer Zerstreuungslinse von grösserer Brennweite noch deutlich ist.

§. 5.

Bleiben a und d nicht dieselben, ändert sich z. B. a, d. h. bleiben Auge und Linse an ihrem Orte, wird dagegen der Gegenstand hinter der Linse gerückt, so ändert sich m, es wird grösser oder kleiner, wenn der Ausdruck $\frac{ad}{(a+d)f}$ abnimmt oder zunimmt; schreibt man diesen Ausdruck so an:

$$\frac{d}{\left(1+\frac{d}{a}\right)f},$$

so ist alsbald ersichtlich, dass er mit wachsendem a auch wächst und mit abnehmendem auch abnimmt, hiedurch bewahrheiten sich die Folgerungen:

1) Für $a=0$, wenn Gegenstand hart an Linse steht, ist $m=1$, also keine Verkleinerung;

2) Rückt der Gegenstand immer weiter von der Linse, so wird das Bild immer kleiner und bei $a=\infty$, d. h. wenn Gegenstand überaus weit weg ist, ist die Verkleinerung $=\frac{f}{f+d}$.

Weil ε die Entfernung des Bildes

$$=d+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{f}}$$

ist, so nimmt ε mit wachsendem a zu (für $a=0$ ist $\varepsilon=d$), und für $a=\infty$ ist $\varepsilon=d+f$, durch eine Concav-Linse kann desshalb, wenn d nicht schon $=s$ ist, ein näher stehender Gegenstand undeutlich, ein weiter entfernter aber deutlich gesehen werden. Wenn $d<s-f$ ist, kann das Bild nicht deutlich erscheinen.

§. 6.

Aendert sich d, d. h. bleiben Gegenstand und Linse unverrückt, und entfernt sich dagegen das Auge des Beobachters, so ändert sich m in derselben Weise, wie vorhin, da der Ausdruck von m symmetrisch in Beziehung auf a und d ist; man hat somit dieselben Folgerungen wie vorhin, man darf nur statt Gegenstand „Auge“ setzen.

Die Entfernung s wächst, wenn d wächst, ist desshalb nicht schon

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{f}} > s,$$

wodurch ein hart an der Linse befindliches Auge undeutlich sieht, so kann dieses doch deutlich sehen, wenn es sich mehr von der Linse entfernt.

§. 7.

Endlich kann auch noch die Linse ihren Ort ändern, während Gegenstand und Auge unverrückt bleiben, es ist alsdann $a+d$ ständig und $=c$ und daraus $a=c-d$; setzt man dieses in den Werth von m, so findet man

$$m=\frac{1}{1+\frac{d(c-d)}{cf}}.$$

Da d nur ein Bruchtheil von c sein kann, so ist

$$cd-d^2=c^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right),$$

wenn $d=\frac{1}{n}c$ gesetzt, folglich nimmt $cd-d^2$, also auch $\frac{cd-d^2}{cf}=w$ zu, wenn d zunimmt; wenn jedoch w zunimmt, so nimmt m ab, es wird also das Bild immer kleiner, jemehr sich die Linse vom Auge entfernt. Da aber aus der Gleichung

$$\frac{d(c-d)}{cf}=w$$

für d der Werth

$$\frac{c\pm\sqrt{c^2-4cfw}}{2}$$

folgt, dieser Werth aber, der Natur der Sache nach, nicht imaginär ausfallen darf, so ist das Wachsen von w an eine Gränze gebunden, es muss nämlich $4cfw<c^2$ d. h. $w<\frac{c}{4f}$ bleiben. Wenn nun der höchste Werth von $w=\frac{c}{4f}$ ist, der bei $d=\frac{c}{2}$ eintritt, so ist der kleinste Werth von

$$m=\frac{1}{1+\frac{c}{4f}}.$$

Es nimmt also die Verkleinerung nur zu, bis die Linse in der Mitte von Auge und Gegenstand steht, hier hat sie dann ihre grösste Stärke erlangt, und von da an wird das Bild wieder grösser.

Die Deutlichkeit ist nach der Formel $\varepsilon = d + \frac{af}{a+f}$ zu bemessen, allgemein kann aus dieser jedoch nichts Erhebliches gefolgert werden.

Nähere Betrachtung der Convex- oder Sammel-Linsen.

§. 8.

Da hier f negativ ist, so ist

$$m = \frac{1}{1 - \frac{ad}{(a+d)f}};$$

soll hier m positiv sein, so muss $\frac{ad}{(a+d)f} < 1$ ausfallen, gleichzeitig ist dann aber der Nenner von m ein ächter Bruch, somit m immer grösser als 1, woraus also der Schluss: durch eine Sammel-Linse kann man die Gegenstände aufrecht, dann aber immer vergrössert sehen. Da aber $\frac{ad}{(a+d)f}$ auch > 1 sein kann, so kann m auch negativ und zwar dem numerischen Werthe nach kleiner oder grösser als 1 sein: durch Sammel-Linsen können somit auch umgekehrte und dann vergrösserte oder verkleinerte Bilder bewirkt werden.

Hierüber lässt sich im Allgemeinen sagen, dass, wenn a oder d oder beide zugleich kleiner als f sind, so ist $\frac{ad}{(a+d)f} < 1$, denn ist z. B. $a < f$, so ist, weil $d > a+d$ und $a < f$ ist, offenbar auch das Produkt $\frac{a}{f} \cdot \frac{d}{a+d} < 1$. Sind a oder d oder beide zugleich $= f$, so ist ebenfalls $\frac{ad}{(a+d)f} < 1$. In allen genannten Fällen ist demnach das Bild aufrecht und vergrössert. In dem einzig nun noch möglichen Falle, wo a und d jedes grösser als f ist, kann $\frac{ad}{(a+d)f} \gtreqless 1$ sein.

Was die Bildentfernung anlangt, so ist $\varepsilon = d - \frac{af}{a-f}$, ist nun $a < f$, so erhält man für ε einen positiven Werth $> d$; ist $a > f$, dabei aber $d > \frac{af}{a-f}$, so erhält man ebenfalls einen positiven Werth, der aber $< d$; in diesen beiden Fällen wird man ε mit s vergleichen und, wenn ersteres grösser als letzteres ist, ein deutliches Bild wahrnehmen. Es kann endlich aber auch noch bei $a > f$, $d < \frac{af}{a-f}$ sein, dann fällt der Werth für ε negativ aus, das heisst Strahlen treten so aus der Linse, dass sie erst hinter dem Auge ein Bild erzeugen, sie treffen somit convergirend das Auge; da aber solche Strahlen nur ein undeutliches, ja zumeist gar kein Sehen verursachen, so entsteht im letzteren Falle also nie ein deutliches Bild.

§. 9.

Wir nehmen nun an, d bleibe dasselbe, es ändere sich also die gegenseitige Entfernung des Auges zur Linse nicht, es rücke aber der Gegenstand allmählich von der Linse weg, indem a nach und nach von 0 anfangend alle Werthe bis zu ∞ durchmacht.

Entweder ist 1) $d \overline{\overline{<}} f$, dann ist $\frac{ad}{(a+d)f}$ ein allmählich mit a wachsender Bruch, folglich m eine immer mehr wachsende positive über 1 grosse Zahl. Hieraus ist ersichtlich, dass der Gegenstand, wenn er hart an der Linse steht, zuerst in seiner natürlichen Grösse, nach und nach aber immer grösser und aufrecht erscheint, je mehr er sich entfernt, zuletzt wenn a unendlich gross ist, hat m den Werth $\frac{f}{f-d}$, (wie leicht einzusehen, wenn man $a = \infty$ substituirt), es ist somit in diesem Falle die stärkste scheinbare Vergrösserung der Zahl gleich, welche anzeigt, wie vielmal grösser ein Bild wäre, das durch die Linse von einem am Ort des Auges stehenden Gegenstand entsteht. (Es ist nämlich die Vergrösserungszahl des Bildes bekanntlich $= \frac{f}{f-x}$, wenn x die Entfernung des Gegenstandes bedeutet.)

Oder 2) es ist $d > f$. Hier wächst $\frac{ad}{(a+d)f}$ auch mit dem Zunehmen von a, bleibt aber, indem es rascher wächst, kein Bruch, nimmt schon bei $a = \frac{df}{d-f}$, d. h. dann, wenn der Gegenstand dahin kommt, wo vom Auge ein Bild durch die Linse entsteht, den Werth 1 an, m ist somit eine positiv wachsende Zahl, grösser als 1 und bei dem letztgenannten Stand $= \infty$. Von da an wird m negativ, zuerst sehr gross, nach und nach immer klei-

ner, bei $a = \frac{2df}{d-2f} = -1$ und zuletzt bei $d = \infty$ wieder $\frac{f}{f-d}$. In diesem Fall entsteht also zuerst ein vergrössertes aufrechtes Bild, das schnell mit der Entfernung von der Linse wächst, an einem gewissen Punkt, wenn nämlich der Gegenstand an den Ort gelangt ist, wo vor dem Auge ein Bild entsteht, ist die Vergrösserung unendlich, das Bild somit nicht wahrnehmbar; bei fortgesetztem Wegrücken des Gegenstandes von der Linse entsteht ein umgekehrtes vergrössertes Bild, das allmählich an Grösse abnimmt und dadurch bei einer gewissen Entfernung in seiner natürlichen Grösse und endlich gar als verkleinertes erscheint, wobei zuletzt die Zahl der scheinbaren Vergrösserung dieselbe ist, wie die der wirklichen desjenigen Bildes, das von einem am Ort des Auges stehenden Gegenstand durch die Linse bewirkt wird.

Für die Deutlichkeit, welche aus der Entfernung des entstehenden Bildes vom Auge beurtheilt wird, hat man:

1) wenn $a < f$, so ist $\varepsilon = d + \frac{af}{f-a}$, sobald diess grösser als s ist, ist das Bild deutlich;

2) wenn $a > f$, so muss $d - \frac{af}{a-f} > s$ sein, wenn das Bild deutlich sein soll, ist aber gar $d < \frac{af}{a-f}$, so ist das Bild, weil ε negativ ist, wie schon früher bemerkt worden ist, entweder gar nicht, oder höchstens nur sehr undeutlich zu sehen.

§. 10.

Bleibt a dasselbe und ändert sich nur d, behalten somit Gegenstand und Linse ihre gegenseitige Entfernung, rückt dagegen das Auge allmählich von letzterer weg, so hat man ganz auf dieselbe Weise die Erklärung der nämlichen Erscheinungen, wie im vorigen Paragraphen, nur muss man d mit a vertauschen.

§. 11.

Bleibt endlich die Entfernung des Auges vom Gegenstand dieselbe, rückt dagegen zwischen ihnen die Linse von ihrem Ort, ist desshalb $a + d = c$ beständig, so ist, weil $a = c - d$ ist,

$$\frac{ad}{(a+d)f} = \frac{d(c-d)}{cf} = w.$$

Nun ist wieder wie in §. 7. w zunehmend, wenn d wächst. Da nun $m=\frac{1}{1-w}$ ist, so nimmt also m mit dem Wachsen von d zu und ist, so lange w nicht grösser als 1 ist, eine positive Zahl, grösser als 1. Da aber auch hier wie in §. 7. w im Wachsen an die Gränze $\frac{c}{4f}$ gebunden ist, so hat man vor Allem zu fragen, ob dieser Grenzwerth $\overline{\overline{<}}$ 1 ist; ist dieses der Fall, so kann m nur positiv sein. Ist jedoch $\frac{c}{4f}>1$ (oder $c>4f$) so kann w auch grösser als 1 sein, dann aber kann m selbst auch negativ und dabei grösser oder kleiner als 1 sein.

Ist nun $c<4f$, so ist w höchstens $=\frac{c}{4f}$ bei $d=\frac{c}{2}$, demnach entsteht, wenn man die Linse vom Auge rückt, ein immer wachsendes und vergrössertes aufrechtes Bild, welches am grössten ist, wenn die Linse zwischen Auge und Gegenstand in der Mitte steht, dann aber wieder in seiner Grösse abnimmt und zur natürlichen gelangt, wenn die Linse am Gegenstand steht.

Ist $c>4f$, so entsteht ebenfalls zuerst ein aufrechtes vergrössertes Bild, das bei

$$d=\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-cf}$$

unendlich gross ist, (wo nämlich $w=1$ wird), dann abnimmt, bis die Linse in der Mitte steht, in welchem Fall die Zahl der scheinbaren Vergrösserung $=\frac{4f}{4f-c}$ ist. Rückt die Linse noch weiter, so wird das Bild wieder grösser und unendlich gross bei

$$d=\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-cf},$$

worauf es dann wieder aufrecht vergrössert, aber abnehmend und zuletzt bei $d=c$ endlich wieder eben so gross erscheint, als wenn der Gegenstand ohne Linse betrachtet wird.

Die Deutlichkeit wird, wie in den beiden vorhergehenden Paragraphen beurtheilt.

XVI.

Entwickelungen elliptischer Integrale in Reihen und der darauf gegründeten Vergleichungen derselben.

Mit Bezugnahme auf meinen früheren im 3. Hefte des I. Theils dieses Archivs aufgenommenen Aufsatz.

Von

Herrn Nicolaus Wilhelm Schulze

zu Oberweisbach bei Rudolstadt.

Ich werde zunächst solche Fälle anführen, die unter der allgemeinen Form

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

begriffen sind, nämlich

$$\text{I.)}\ \int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2-\gamma x^4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Man reducire nach der bekannten Verwandlung von

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}\ \text{in}\ \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

das erste Glied auf die Einheit und zerlege

$$1+\frac{\beta}{\alpha}x^2-\frac{\gamma}{\alpha}x^4$$

in reelle Factoren von der Form

$$(1-m^2x^2)(1+n^2x^2),$$

so kommt

$$m=\sqrt{\frac{\Delta+\beta}{2\alpha}}, \quad \text{und} \quad n=\sqrt{\frac{\Delta-\beta}{2\alpha}},$$

wo

$$\Delta=\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma} \quad \text{und} \quad m>n$$

ist. Alsdann setze man

$$mx=z, \quad \frac{n}{m}=k, \quad z=\cos\varphi \quad \text{und} \quad \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}=c;$$

so folgt

1)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-m^2x^2)(1+n^2x^2)}}=\frac{1}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+k^2z^2)}}$$

$$=-\frac{1}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+k^2\cos\varphi^2}}=-\frac{\sqrt{1-c^2}}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}.$$

Nun ist nach dem früheren Verfahren

2) $$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=[(1+p)-(p+c^2\sin\varphi^2)]^{-\frac{1}{2}}.d\varphi$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{1+p}}+\frac{(p+c^2\sin\varphi^2)}{2\sqrt{(1+p)^3}}+\frac{3(p+c^2\sin\varphi^2)^2}{8\sqrt{(1+p)^5}}\right.$$

$$\left.+\frac{5(p+c^2\sin\varphi^2)^3}{16\sqrt{(1+p)^7}}+\ldots\ldots\right].d\varphi.$$

Integrirt man diese Reihe, indem man p constant nimmt und bedenkt, dass

$$\varphi=\text{arc}(\cos=z=mx=x\sqrt{\frac{\Delta+\beta}{2\alpha}})$$

ist, so folgt bekanntlich, da das Integral für $x=0$ verschwindet:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi = \int_0^{\sqrt{\frac{2a}{\Delta+\beta}}} d\varphi = \frac{1}{2}\pi, \quad \int_0^{\sqrt{\frac{2a}{\Delta+\beta}}} d\varphi \sin\varphi^2 = -\frac{1}{4}\pi,$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2a}{\Delta+\beta}}} d\varphi \sin\varphi^4 = -\frac{3}{16}\pi \quad \text{u. s. f.}$$

Also gestaltet sich vorhergehende Reihe (2), da $\frac{1}{2}\pi$ ein gemeinschaftlicher Factor aller integrirten Glieder wird, indem man das negative Vorzeichen des letzten Ausdrucks in (1) beachtet, in folgende:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1+p}} \cdot \Big[1 + \frac{(p+\frac{1}{2}c^2)}{2(1+p)} + \frac{3(p^2+2pc^2.\frac{1}{2}+\frac{3}{8}c^4)}{8(1+p)^2}$$
$$+ \frac{5(p^3+3p^2c^2.\frac{1}{2}+3pc^4.\frac{3}{8}+\frac{5}{16}c^6)}{16(1+p)^3} + \ldots\Big].$$

Setzt man wie früher das zweite Glied $=0$, wodurch $p=-\frac{1}{c}$ wird, und substituirt diesen Werth von p überall statt p, so fallen alle ungeraden Glieder weg, und man erhält nach gehöriger Ausführung und Anordnung der Glieder:

$$3) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{2-c^2}} \cdot \Big[1 + \frac{3}{4^2}\Big(\frac{c^2}{2-c^2}\Big)^2 + \frac{3.5.7}{4^2.8^2}\Big(\frac{c^2}{2-c^2}\Big)^4$$
$$+ \frac{3.5.7.9.11}{4^2.8^2.12^2}\Big(\frac{c^2}{2-c^2}\Big)^6 + \frac{3.5.7.9.11.13.15}{4^2.8^2.12^2.16^2}\Big(\frac{c^2}{2-c^2}\Big)^8 + \ldots\Big].$$

Diese Reihe convergirt desto schneller, je kleiner c ist, sie hört aber auf zu convergiren, wenn $\frac{c^2}{2-c^2}=1$ und grösser wird.

Berücksichtigt man ferner den Factor $\frac{\sqrt{1-c^2}}{m\sqrt{a}}$ in (1) und setzt statt c und m obige Werthe, so kommt nach gehöriger Reduction:

$$4)\quad \int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta+\beta}}} \frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2-\gamma x^4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3\Delta+\beta}}\cdot\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\Delta-\beta}{3\Delta+\beta}\right)^2+\frac{3.5.7}{4^2.8^2}\left(\frac{\Delta-\beta}{3\Delta+\beta}\right)^4+\ldots\ldots\right].$$

Setzt man $\Delta=2\alpha+\beta$, so wird $\gamma=\alpha+\beta$, also

$$5)\quad \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} \frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2-(\alpha+\beta)x^4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha+2\beta)}}\cdot\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha}{3\alpha+2\beta}\right)^2+\ldots\ldots\right].$$

Ferner folgt, wenn man hierin $\alpha-\beta$ statt α setzt:

$$6)\quad \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}} \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-\beta)-\beta x^2-\alpha x^4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha-\beta)}}\cdot\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha-\beta}{3\alpha-\beta}\right)^2+\ldots\ldots\right].$$

Setzt man in (4) $\Delta=2\alpha-\beta$, indem $\gamma=\alpha-\beta$ wird, so kommt.

$$7)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2-(\alpha-\beta)x^4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha-\beta)}}\cdot\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha-\beta}{3\alpha-\beta}\right)^2+\ldots\ldots\right].$$

Schreibt man endlich $\alpha+\beta$ statt α, so kommt

$$8)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta-\beta x^2-\alpha x^4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha+2\beta)}}\cdot\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha}{3\alpha+2\beta}\right)^2+\ldots\ldots\right].$$

Anmerkung 1. Die Werthe von k, m, n und Δ sind in II., III. und VI. bekanntlich dieselben wie hier.

Anmerkung 2. Es ist nicht gerade nothwendig, das betreffende Differenzial auf die allgemeine Form

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

zu bringen; sondern es genügt, wenn man z. B. hier $z=\sin\varphi$ setzt, wodurch man erhält:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+k^2\sin\varphi^2}}.$$

Verwandelt man nun auf obige Weise

$$[(1+p)-(p-k^2\sin\varphi^2)]^{-\frac{1}{2}}.d\varphi$$

in eine Reihe und führt nach den dortigen Bedingungen die Integration aus, so erhält man dieselbe Reihe wie letztere.

II. $$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2-\gamma x^4}}=\int\frac{dx}{X}.$$

Man verfahre anfänglich wie in I., dann setze man

$$z=\frac{\cos\varphi}{k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}=c;$$

also ist

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+m^2x^2)(1-n^2x^2)}}=\frac{1}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$=-\frac{c}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}.$$

Da wir hier für

$$-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}$$

dieselbe Reihe wie (3) erhalten, so haben wir nur, mit Berücksichtigung des Factors $\frac{c}{m\sqrt{\alpha}}$, die Werthe von c und m dort einzusetzen; und da wegen

$$\varphi = \text{arc}(\cos = kz = nx = x\sqrt{\frac{\Delta-\beta}{2\alpha}})$$

von x die Grenzwerthe 0 und $\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta-\beta}}$ sind, so folgt

$$9)\quad \int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta-\beta}}} \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2-\gamma x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3\Delta-\beta}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\Delta+\beta}{3\Delta-\beta}\right)^2+\frac{3.5.7}{4^2.8^2}\left(\frac{\Delta+\beta}{3\Delta-\beta}\right)^4+\ldots\right].$$

Für $\Delta=2\alpha-\beta$ wird $\gamma=\alpha-\beta$, also

$$10)\quad \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}} \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2-(\alpha-\beta)x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha-2\beta)}}[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha}{3\alpha-2\beta}\right)^2+\ldots].$$

Setzt man hierin $\alpha+\beta$ statt α, so kommt

$$11)\quad \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}} \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta+\beta x^2-\alpha x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha+\beta)}}[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha+\beta}{3\alpha+\beta}\right)^2+\ldots].$$

Setzt man in (9) $\Delta=2\alpha+\beta$, so wird $\gamma=\alpha+\beta$, mithin

$$12)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2-(\alpha+\beta)x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha+\beta)}}[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha+\beta}{3\alpha+\beta}\right)^2+\ldots].$$

Wird ferner $\alpha-\beta$ statt α gesetzt, so folgt

13) $$\int^{1} \frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta+\beta x^2-\alpha x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha-2\beta)}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha}{3\alpha-2\beta}\right)^2+\ldots\ldots\right].$$

III) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-\alpha-\beta x^2+\gamma x^4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+m^2x^2)(n^2x^2-1)}} = \frac{1}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(k^2z^2-1)}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-c^2}}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}.$$

Hier ist

$$z=\frac{1}{k\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}=c$$

gesetzt, also folgt:

$$\varphi=\operatorname{arc}\left(\cos=\frac{1}{kz}=\frac{1}{nx}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta-\beta}}\right).$$

Da nun für

$$\varphi=0 \quad \text{und} \quad \varphi=\frac{1}{2}\pi$$

respective

$$x=\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta-\beta}} \quad \text{und} \quad x=\infty$$

wird, so kommt aus (3) mit Beifügung des Factors $\sqrt{\frac{1-c^2}{m\sqrt{\alpha}}}$:

14) $$\int_{\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta-\beta}}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-\alpha-\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3\Delta+\beta}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\Delta-\beta}{3\Delta+\beta}\right)^2+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\Delta-\beta}{3\Delta+\beta}\right)^4+\ldots\ldots\right]$$

Für $\Delta = 2\alpha - \beta$ wird $\gamma = \alpha - \beta$, also

$$15)\quad \int_{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-\alpha - \beta x^2 + (\alpha-\beta)x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha-\beta)}}\left[1 + \frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha-\beta}{3\alpha-\beta}\right)^2 + \ldots\ldots\right].$$

Setzt man hierin $\alpha + \beta$ statt α, so kommt

$$16)\quad \int_{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-(\alpha+\beta) - \beta x^2 + \alpha x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha+2\beta)}}\left[1 + \frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha}{3\alpha+2\beta}\right)^2 + \ldots\right].$$

Substituirt man in (14) $2\alpha + \beta$ statt Δ, wodurch $\gamma = \alpha + \beta$ und $\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta - \beta}} = 1$ wird, so ergiebt sich:

$$17)\quad \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-\alpha - \beta x^2 + (\alpha+\beta)x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha+2\beta)}}\left[1 + \frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha}{3\alpha+2\beta}\right)^2 + \ldots\ldots\right].$$

Setzt man endlich hier $\alpha - \beta$ statt α, so kommt:

$$18)\quad \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-(\alpha-\beta) - \beta x^2 + \alpha x^4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha-\beta)}}\left[1 + \frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha-\beta}{3\alpha-\beta}\right)^2 + \ldots\right].$$

IV) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{dx}{\sqrt{(m^2x^2-1)(n^2x^2+1)}}=\frac{1}{m\sqrt{\alpha}}\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1+k^2z^2)}}$$

$$=\frac{c}{m\sqrt{\alpha}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}.$$

Es ist hier gesetzt

$$z=\frac{1}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}=c,$$

mithin, wegen

$$\cos\varphi=z=\frac{1}{mx}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta+\beta}},$$

ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi=\int_{\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta+\beta}}}^{\infty} d\varphi=\frac{1}{2}\pi,$$

u. s. f.; also geht, mit Berücksichtigung von $\frac{c}{m\sqrt{\alpha}}$, aus derselben Reihe (3) hervor:

19) $$\int_{\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta+\beta}}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3\Delta-\beta}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\Delta+\beta}{3\Delta-\beta}\right)^2+\frac{3.5.7}{4^2.8^2}\left(\frac{\Delta+\beta}{3\Delta-\beta}\right)^4+\ldots\ldots\right].$$

Setzt man $\Delta=2\alpha+\beta$, so wird $\gamma=\alpha+\beta$, also

20) $$\int_{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-\alpha+\beta x^2+(\alpha+\beta)x^4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha+\beta)}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha+\beta}{3\alpha+\beta}\right)^2+\ldots\right].$$

Substituirt man hierin $\alpha-\beta$ statt α, so kommt

Digitized by Google

21) $$\int_{\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-(\alpha-\beta)+\beta x^2+\alpha x^4}}$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha-2\beta)}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha}{3\alpha-2\beta}\right)^2+.....\right].$$

Setzt man in (19) $\Delta=2\alpha-\beta$, so folgt

22) $$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-\alpha+\beta x^2+(\alpha-\beta)x^4}}$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha-2\beta)}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha}{3\alpha-2\beta}\right)^2+......\right].$$

Schreibt man hierin $\alpha+\beta$ statt α, so ergiebt sich

23) $$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{-(\alpha+\beta)+\beta x^2+\alpha x^4}}$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2(3\alpha+\beta)}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\alpha+\beta}{3\alpha+\beta}\right)^2+.....\right].$$

V) $$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}=\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Erster Fall, wo $\beta^2-4\alpha\gamma$ positiv ist.

Man zerlege

$$1+\frac{\beta}{\alpha}x^2+\frac{\gamma}{\alpha}x^4$$

in die Factoren

$$(1+m^2x^2)(1+n^2x^2),$$

woraus man erhält:

$$m^2=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad n^2=\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Dann setze man

$$mx=z, \quad \frac{n}{m}=k, \quad z=\operatorname{tg}\varphi \text{ und } \sqrt{1-k^2}=c;$$

so kommt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+m^2x^2)(1+n^2x^2)}}$$

$$=\frac{1}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}}=\frac{1}{m\sqrt{\alpha}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}};$$

woraus sich wegen

$$\varphi=\text{arc}(\text{tg}=z=mx)$$

ergiebt:

$$x=0 \text{ und } x=\infty \text{ für } \varphi=0 \text{ und } \varphi=\frac{1}{2}\pi.$$

Nun ist, wenn man den diesseitigen Werth von c in die Reihe (3) substituirt:

$$\left(\frac{c^2}{2-c^2}\right)^2=\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2=\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\beta}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\beta^2};$$

mithin wird dieselbe mit Hinzusetzung des Factors $\frac{1}{m\sqrt{\alpha}}$:

24) $$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{\beta}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\beta^2}\right)+\frac{3.5.7}{4^2.8^2}\left(\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\beta^2}\right)^2+\ldots\right].$$

Zweiter Fall, wo $\beta^2-4\alpha\gamma$ negativ oder positiv ist.

Man setze

$$\frac{\gamma}{\alpha}x^4=z^2,\quad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}=\lambda \text{ und } z=\text{tg}\varphi;$$

so kommt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\gamma}}\int\frac{dz}{\sqrt{1+\lambda z^2+z^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\gamma}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(2-\lambda)\sin\varphi^2\cos\varphi^2}}.$$

man setze nun

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(2-\lambda)\sin\varphi^2\cos\varphi^2}}=[(1+p)-(p+(2-\lambda)\sin\varphi^2\cos\varphi^2)]^{-\frac{1}{2}}d\varphi$$

und führe alles wie in (2) aus, so erhält man, wenn $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}$ statt λ wieder eingeführt wird, nach gehöriger Reduction:

$$25)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}=$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{6\sqrt{\alpha\gamma}+\beta}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}-\beta}{6\sqrt{\alpha\gamma}+\beta}\right)^2+\frac{3.5.7}{4^2.8^2}\left(\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}-\beta}{6\sqrt{\alpha\gamma}+\beta}\right)^4+\ldots\right].$$

$$\text{VI)}\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2+\gamma x^4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{X}},\quad \beta^2-4\alpha\gamma \text{ negativ.}$$

Man nehme dieselbe Verwandlung wie mit vorigem Beispiel vor, so wird

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\gamma}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-\lambda z^2+z^4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\gamma}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(2+\lambda)\sin\varphi^2\cos\varphi^2}},$$

woraus auf demselben Wege folgt:

$$26)\qquad \int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2+\gamma x^4}}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{6\sqrt{\alpha\gamma}-\beta}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}+\beta}{6\sqrt{\alpha\gamma}-\beta}\right)^2+\frac{3.5.7}{4^2.8^2}\left(\frac{2\sqrt{\alpha\gamma}+\beta}{6\sqrt{\alpha\gamma}-\beta}\right)^4+\ldots\right].$$

Bemerkung. Die Entwickelung des Integrals

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2+\gamma x^4}}$$

für den Fall, wo $\beta^2-4\alpha\gamma$ positiv ist, werde ich, da sich keine wichtigen Folgerungen daraus ableiten lassen, übergehen.

Ueberblicken wir die bisherigen Reihen mit Rücksicht auf ihre Convergenz, so zeigt sich, dass die (4) und (14) für jeden Werth von α, β, γ, hingegen (9) und (19) nur dann schnell convergiren, wenn β gegen Δ klein ist.

Die Reihen (5) und (16) laufen desto schneller zusammen, je kleiner α, dann (6) und (15) je mehr sich β dem α nähert; doch darf im erstern Fall weder $\alpha=0$, noch im letztern $\beta=\alpha$ werden, weil man sonst unbestimmte Werthe erhält.

Die Reihen von (10) bis (13), dann die von (20) bis (23), imgleichem (26), convergiren desto stärker, je kleiner β gegen α ist und am stärksten, wenn $\beta=0$ ist; ebenso findet eine starke Convergenz statt, wenn α und γ gegen β sehr gross sind, nur dürfen beide nicht unendlich gross werden, wenn die Reihe nicht verschwinden soll.

Die Reihen (7) und (18) werden für $\beta=0$, dann die (8) und (17) für $\alpha=0$ dem directen Integral selbst gleich, nämlich

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x^4}}=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2},$$

indem auf beiden Seiten jeder Gleichung der Factor $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ weggefallen ist.

Die Reihe (24) giebt zu erkennen, dass sie nur dann schnell zusammenläuft, wenn $2\sqrt{\alpha\gamma}$ dem β sehr nahe ist; dagegen convergirt die (25) nicht nur in diesem Fall sehr stark, sondern auch für jeden Werth von α, β und γ, selbst dann noch, wenn β grösser als $2\sqrt{\alpha\gamma}$ ist; jedoch darf β gegen $2\sqrt{\alpha\gamma}$ nicht zu gross werden.

Uebrigens bleiben in diesem Fall wegen der geraden Exponenten alle Glieder positiv.

Für $\beta=2\sqrt{\alpha\gamma}$ wird jede der beiden Reihen dem wahren Integral selbst gleich, nämlich

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\alpha}+x^2\sqrt{\gamma}}=\frac{\pi}{2\sqrt[4]{\alpha\gamma}},$$

Setzt man in (5) bis (13) $\beta=0$, so werden alle diese Reihen einerlei, nämlich:

$$27)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{1}{9}\right)+\frac{3.5.7}{4^2.8^2}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\ldots\right].$$

Ebenso wird aus (14) bis (23) für $\beta=0$:

$$28)\qquad \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{1}{9}\right)+\frac{3.5.7}{4^2.8^2}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\ldots\right].$$

Setzt man endlich in (25) und (26) $\beta=0$ und $\alpha=\gamma=1$, so kommt:

$$29)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[1+\frac{3}{4^2}\left(\frac{1}{9}\right)+\frac{3.5.7}{4^2.8^2}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\ldots\right].$$

Eine nähere Betrachtung der bisher entwickelten Reihen zeigt eine merkwürdige Uebereinstimmung derselben: es sind nämlich (4) und (14); (9) und (19); (5), (16), (8) und (17); (6), (15), (7) und (18); (10), (21), (13) und (22); (11), (20), (12) und (23) einander gleich. Zur Uebersicht des Ganzen habe ich sie nach der Ordnung zusammengestellt. Es ist also

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta+\beta}}} \frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2+\gamma x^4}}=\int_{\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta-\beta}}}^\infty \frac{dx}{\sqrt{-\alpha-\beta x^2+\gamma x^4}},$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta-\beta}}} \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2-\gamma x^4}}=\int_{\sqrt{\frac{2\alpha}{\Delta+\beta}}}^\infty \frac{dx}{\sqrt{-\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}},$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} \frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2-(\alpha+\beta)x^4}}=\int_{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}}^\infty \frac{dx}{\sqrt{-(\alpha+\beta)-\beta x^2+\alpha x^4}}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta-\beta x^2-\alpha x^4}}=\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{-\alpha-\beta x^2+(\alpha+\beta)x^4}},$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta-\beta x^2-\alpha x^4}}=\int_{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{-\alpha-\beta x^2+(\alpha-\beta)x^4}}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2-(\alpha-\beta)x^4}}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{-(\alpha-\beta)-\beta x^2+\alpha x^4}},$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2-(\alpha-\beta)x^4}}=\int_{\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{-(\alpha-\beta)+\beta x^2+\alpha x^4}}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta+\beta x^2-\alpha x^4}}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{-\alpha+\beta x^2+(\alpha-\beta)x^4}},$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}}\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta+\beta x^2-\alpha x^4}}=\int_{\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{-\alpha+\beta x^2+(\alpha+\beta)x^4}}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2-(\alpha+\beta)x^4}}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{-(\alpha+\beta)+\beta x^2+\alpha x^4}}.$$

Da man in (24), (25), (26) die Grössen α und γ verwechseln kann, ohne dass sich der Werth der Reihe ändert, so folgt

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{\gamma+\beta x^2+\alpha x^4}},$$

$\beta^2-4\alpha\gamma$ mag positiv oder negativ sein.

Ferner

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-\beta x^2+\gamma x^4}}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{\gamma-\beta x^2+\alpha x^4}},$$

wenn $\beta^2-4\alpha\gamma$ negativ ist.

Endlich geht aus (27), (28) und (29) hervor:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Bemerkung 1. Die Richtigkeit der Uebereinstimmung obiger Integrale wird späterhin durch eine andere, von dieser wesentlich verschiedenen Methode nachgewiesen werden.

Bemerkung 2. Dass die obigen, aus der Form

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2}}$$

hergeleiteten Reihen auch noch durch ein anderes Verfahren, wie Herr Hoppe*) dargestellt hat, erhalten werden, darf ich wohl als bekannt voraussetzen.

---

*) Hier hatte der Herr Verfasser des obigen Aufsatzes einen Raum im Manuscript gelassen, zur Ergänzung des Citats durch den Herausgeber. Wahrscheinlich meint der Herr Verfasser den Aufsatz Nr. XXX. in Thl. III. S. 265. des Archivs von Herrn Hoppe. G.

XII.

Ueber die Bestimmung des Gewichts der nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, wenn Bedingungsgleichungen vorhanden sind.

Von

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

In der Abhandlung XIV. im achtzehnten Theile des Archivs habe ich im §. 10. derselben angegeben, in welcher Weise die Gewichte der gefundenen Werthe von x, y, z,.... bestimmt werden können. Ich will nun den Fall betrachten, da Bedingungsgleichungen gegeben sind, denen x, y, z,....... genügen müssen.

Aus dem in §. 7. und §. 16. Auseinandergesetzten wird man leicht schliessen, dass man in allen Fällen es nur mit Gleichungen des ersten Grades wird zu thun haben. Seien also x_1, x_2,....., x_n die nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmenden Unbekannten, zwischen denen die r Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n = \alpha, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots\ldots + \beta_n x_n = \beta, \\ \vdots \\ \varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \ldots\ldots + \varrho_n x_n = \varrho \end{array}\right\} \quad (1)$$

bestehen, wo natürlich $r<n$. Ferner habe man (§. 6.) durch Beobachtung die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\ldots=M_1 \text{ (Gewicht } g_1), \\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+\ldots.=M_2 \;(\quad,, \quad g_2), \\ \vdots \\ a_mx_1+b_mx_2+c_mx_3+\ldots=M_m\;(\quad,, \quad g_m) \end{array}\right\} \quad (2)$$

erhalten, wo wieder $m>n-r$, so muss, nach den dortigen Erörterungen, die Grösse

$$g_1(a_1x_1+b_1x_2+\ldots.-M_1)^2+g_2(a_2x_1+b_2x_2+\ldots-M_2)^2+\ldots.. \quad (3)$$

ein Minimum sein, während noch die Gleichungen (1) bestehen. Die Bestimmung der Werthe von x_1, x_2,.. kann nun auf doppelte Art geschehen. Sind nämlich K_1, K_2,........K_r noch zu bestimmende Koeffizienten, so multiplizirt man die (1) bezüglich mit K_1, ...K_r, addirt die so multiplizirten ersten Seiten derselben sämmtlich zu (3) und setzt nun die Differentialquotienten der so erhaltenen Summe nach x_1, x_2,..... Null. Dadurch erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} [ga^2]x_1+[gab]x_2+\ldots\ldots+\alpha_1K_1+\beta_1K_2+\ldots.+\varrho_1K_r=[gaM], \\ [gab]x_1+[gb^2]x_2+\ldots\ldots.+\alpha_2K_1+\beta_2K_2+\ldots.+\varrho_2K_r=[gbM], \\ \vdots \end{array}\right\} (4)$$

welche Gleichungen, in Verbindung mit (1), die Werthe von x_1, x_2,....., x_r, K_1, ..., K_r geben.

Oder aber auch, man kann vermöge der Gleichungen (1) zuerst r der Grössen x_1, x_2, ... durch die übrigen ausdrücken, deren Werthe sodann in (3) setzen und die Differentialquotienten des so erhaltenen Ausdrucks nach den noch bleibenden Unbekannten Null setzen. Dadurch erhält man die Werthe dieser letztern; die der erstern ergeben sich daraus nach (1). Dass man auf beiden Wegen zu demselben Ziele gelangt, ist bekannt.

Angenommen nun, es folge aus (1):

$$\left.\begin{array}{l} x_1=A_{r+1}x_{r+1}+A_{r+2}x_{r+2}+\ldots..+A_nx_n+a, \\ x_2=B_{r+1}x_{r+1}+B_{r+2}x_{r+2}+\ldots\ldots+B_nx_n+b, \\ \vdots \\ x_r=R_{r+1}x_{r+1}+R_{r+2}x_{r+2}+\ldots\ldots+R_nx_n+r, \end{array}\right\} \quad (5)$$

und man bezeichne mit $(r+1)_1$, $(r+2)_1$,.... die Koeffizienten von x_{r+1}, x_{r+2},..... in der ersten Gleichung (2), u. s. f., so sind die Gleichungen (2):

$$\left.\begin{array}{ll} \{(r+1)_1+a_1A_{r+1}+b_1B_{r+1}+\ldots+r_1R_{r+1}\}x_{r+1} & \\ +\{(r+2)_1+a_1A_{r+2}+b_1B_{r+2}+\ldots+r_1R_{r+2}\}x_{r+2} & =M_1-aa_1-bb_1-\ldots-rr_1, \\ +\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \\ \{(r+1)_2+a_2A_{r+1}+b_2B_{r+1}+\ldots+r_2R^r{}_{+1}\}x_{r+1} & \\ +\{(r+2)_2+a_2A_{r+2}+b_2B_{r+2}+\ldots+r_2R^r{}_{+2}\}x_{r+2} & =M_2-aa_2-bb_2-\ldots-rr_2, \\ +\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \\ \vdots & \end{array}\right\}$$

Bezeichnet man diese Gleichungen, der Kürze halber, mit

$$I_1 x_{r+1} + II_1 x_{r+2} + \ldots\ldots = M_1,$$
$$I_2 x_{r+1} + II_2 x_{r+2} + \ldots\ldots = M_2,$$
$$\vdots$$

so erhält man zur Bestimmung von x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots\ldots$ (§. 6.):

$$\left.\begin{array}{l} [gI^2]x_{r+1} + [gI\,II]x_{r+2} + \ldots\ldots = [gMI], \\ [gI\,II]x_{r+2} + [gII^2]x_{r+2} + \ldots\ldots = [gMII], \\ \vdots \end{array}\right\} \quad (7)$$

wornach dann $x_1, \ldots\ldots, x_r$ sich aus (5) ergeben.

Gesetzt nun, aus (7) folge:

$$\left.\begin{array}{l} x_{r+1} = A'[gIM] + A''[gIIM] + \ldots\ldots, \\ x_{r+2} = B'[gIM] + B''[gIIM] + \ldots\ldots \\ \vdots \end{array}\right\} \quad (8)$$

so sind die Gewichte von x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots\ldots$ bezüglich gleich $\frac{1}{A'}$, $\frac{1}{B''}, \ldots\ldots$ (§. 10.).

Da

$$x_1 = A_{r+1}x_{r+1} + A_{r+2}x_{r+2} + \ldots\ldots + a,$$

so ist, wenn die dortige Bezeichnung (S. 175.) beibehalten wird:

$$Q = x_1, \quad q_0 = A_{r+1}, \quad q_1 = A_{r+2}, \ldots\ldots,$$

demnach das Gewicht von x_1:

$$\frac{1}{A_{r+1}(A'A_{r+1} + A''A_{r+2} + \ldots\ldots) + A_{r+2}(B'A_{r+1} + B''A_{r+2} + \ldots\ldots) + \ldots\ldots}, \quad (9)$$

und ähnlich für $x_2, x_3, \ldots\ldots x_r$.

Das so eben Abgeleitete unterliegt keinerlei Anstand. Nun behaupte ich aber, dass, wenn aus den Gleichungen (4), in Verbindung mit (1) folgt:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = E_1[gaM] + F_1[gbM] + \ldots\ldots + e_1\alpha + f_1\beta + \ldots\ldots, \\ x_2 = E_2[gaM] + F_2[gbM] + \ldots\ldots + e_2\alpha + f_2\beta + \ldots\ldots, \\ \vdots \end{array}\right\} \quad (10)$$

die Gewichte von x_1, x_2, ... seien $\frac{1}{E_1}$, $\frac{1}{F_2}$, ..., also geradezu, wie es in §. 10. angegeben ist.

Da, wie bereits gesagt, der Werth von x_1 derselbe ist, ob man ihn aus (1) und (4), oder aus (5) und (7) erhält, so muss

$$E_1[gaM]+F_1[gbM]+....+e_1\alpha+f_1\beta+.....$$
$$=(A_{r+1}A'+A_{r+2}B'+...)[gIM]+(A_{r+1}A''+A_{r+2}B''+..)[gIIM]+..+a$$

sein, was auch immer die Werthe von g_1, a, b, ..., M, α, β, ... sein mögen. Suchen wir also die Koeffizienten von $[gaM]$ auf beiden Seiten, so erhält man eine identische Gleichung, wenn man diese Koeffizienten gleich setzt.

Nun ist aber

$$[gIM]=g_1I_1M_1+g_2I_2M_2+.....$$
$$=g_1\{(r+1)_1+a_1A_{r+1}+b_1B_{r+1}+...+r_1R_{r+1}\}\{M_1-aa_1-bb_1-...-rr_1\}$$
$$+g_2\{(r+1)_2+a_2A_{r+1}+b_2B_{r+1}+...+r_2R_{r+1}\}\{M_2-aa_2-bb_2-...-rr_2\}$$
$$+........$$

Daraus folgt, dass der Koeffizient von $g_1a_1M_1$ ist A_{r+1}, desgleichen der von $g_2a_2M_2 : A_{r+1}$ u. s. f. Ganz eben so findet man aus $[gIIM]$, dass die Koeffizienten von $g_1a_1M_1$, $g_2a_2M_2$,.. sämmtlich gleich A_{r+2}, u. s. w. sind.

Daraus folgt, dass auf der zweiten Seite obiger Gleichung der Koeffizient von $g_1a_1M_1$ ist:

$$A_{r+1}\{A'A_{r+1}+A''A_{r+2}+...\}+A_{r+2}\{B'A_{r+1}+B''A_{r+2}+...\}+....;$$

dessgleichen der von $g_2a_2M_2$ u. s. w., so dass mithin diese Grösse der Koeffizient von $[gaM]$ ist, d. h. dass sie gleich E_1 ist, was, verglichen mit (9), unsere Behauptung rechtfertigt.

Hinsichtlich der Gewichte von x_{r+1} u. s. w., die aus (10) geschlossen werden, ergiebt sich Dasselbe.

Ist nämlich

$$x_{r+1}=E_{r+1}[gaM]+....+(R+1)_{r+1}[g(r+1)M]+...+e_{r+1}\alpha+.....,$$

so behaupte ich, dass

$$(R+1)_{r+1}=A'$$

sei. Denn setzt man diesen Werth von x_{r+1} und den in (8) einander identisch gleich, und bemerkt, dass in $[gIM]$ der Koeffizient von $[g(r+1)M]$ ist 1, der von $[g(r+1)M]$ in $[gIIM]$ Null, ebenso in $[gIIIM]$, so ergiebt sich unmittelbar

$$(R+1)_{r+1}=A'.$$

Damit ist denn der Satz allgemein bewiesen.

Wollen wir ihn nun auf die Bestimmung der Gewichte von x_1, x_2, ... in §. 16. der oben angeführten Abhandlung anwenden, so müssen wir dabei in folgender Weise verfahren.

Man ersetze auf den zweiten Seiten der Gleichungen (42) die 0 durch A_1, A_2, ...; ziehe sodann aus diesen Gleichungen die Werthe von x_1, x_2,...., um sie in (39) zu setzen, so erhält man anstatt der Gleichungen (43) ein System, dessen erste Seiten dieselben sind, während die zweiten bezüglich sind:

$$n_1-\frac{a_1}{g_1}A_1-\frac{a_2}{g_2}A_2-....,$$

$$n_2-\frac{b_1}{g_1}A_1-\frac{b_2}{g_2}A_2-.....,$$

$$\vdots$$

Sucht man sodann die Werthe von K_1, K_2,..... hieraus und setzt sie in (42), so wird man die Koeffizienten von A_1, A_2, ... in den Werthen von x_1, x_2,..... leicht bestimmen können. Der reziproke Werth des Koeffizienten von A_1 in dem Werthe von x_1 ist das Gewicht dieser Grösse; der des Koeffizienten von A_2 in dem Werthe von x_2 das Gewicht von x_2 u. s. w.

Als Beispiel hiezu wollen wir folgendes wählen:

Man hat für die vier Winkel eines ebenen Vierecks die Werthe w_1, w_2, w_3, w_4 mit den Gewichten g_1, g_2, g_3, g_4 gefunden. Man verlangt die wahrscheinlichsten Werthe der Winkel und die Gewichte dieser letztern.

Sei

$$w_1+w_2+w_3+w_4=360^0+e,$$

so ist

$$x_1+x_2+x_3+x_4=e,$$

also die (42):

$$g_1x_1+K=A_1,$$

$$g_2x_2+K=A_2,$$

$$g_3x_3+K=A_3,$$

$$g_4x_4+K=A_4;$$

woraus nun:

$$x_1 = \frac{(A_1-A_2)g_3g_4+(A_1-A_3)g_2g_4+(A_1-A_4)g_2g_3+eg_2g_3g_4}{g_1g_2g_3+g_1g_2g_4+g_1g_3g_4+g_2g_3g_4},$$

$$x_2 = \frac{(A_2-A_1)g_3g_4+(A_2-A_3)g_1g_4+(A_2-A_4)g_1g_3+eg_1g_3g_4}{g_1g_2g_3+g_1g_2g_4+g_1g_3g_4+g_2g_3g_4},$$

$$x_3 = \frac{(A_3-A_1)g_2g_4+(A_3-A_2)g_1g_4+(A_3-A_4)g_1g_2+eg_1g_2g_4}{g_1g_2g_3+g_1g_2g_4+g_1g_3g_4+g_2g_3g_4},$$

$$x_4 = \frac{(A_4-A_1)g_2g_3+(A_4-A_2)g_1g_3+(A_4-A_3)g_1g_2+eg_1g_2g_3}{g_1g_2g_3+g_1g_2g_4+g_1g_3g_4+g_2g_3g_4}.$$

Die eigentlichen wahrscheinlichsten Werthe von x_1, x_2, x_3, x_4 ergeben sich hieraus, wenn man A_1, A_2, A_3, A_4 Null setzt. Für die Gewichte folgt daraus:

$$\text{für } x_1: \frac{g_1g_2g_3+g_1g_2g_4+g_1g_3g_4+g_2g_3g_4}{g_3g_4+g_2g_4+g_2g_3},$$

$$\text{„ } x_2: \frac{g_1g_2g_3+g_1g_2g_4+g_1g_3g_4+g_2g_3g_4}{g_3g_4+g_1g_4+g_1g_3},$$

$$\text{„ } x_3: \frac{g_1g_2g_3+g_1g_2g_4+g_1g_3g_4+g_2g_3g_4}{g_2g_4+g_1g_4+g_1g_2},$$

$$\text{„ } x_4: \frac{g_1g_2g_3+g_1g_2g_4+g_1g_3g_4+g_2g_3g_4}{g_2g_3+g_1g_3+g_1g_2}.$$

Für den speziellen Fall, dass $g_1=g_2=g_3=g_4$, erhält man für jedes dieser Gewichte $\frac{4g_1}{3}$, so dass also der Werth des Winkels vom $\frac{4}{3}$fachen Gewichte der Beobachtung ist.

(In der „Beschreibung der zur Ermittlung des Höhenunterschiedes zwischen dem schwarzen und kaspischen Meere etc. Petersburg 1849.“ wendet Struve, Einleitung S. X. diesen Satz an, wobei jedoch zu bemerken ist, dass dort nur $g_1=g_3$, $g_2=g_4$ sein kann, so dass die gemachte Anwendung unrichtig ist. In diesem Falle sind die Gewichte von x_1 und x_3: $\frac{2g_1(g_1+g_2)}{2g_1+g_2}$, von x_2 und x_4: $\frac{2g_2(g_1+g_2)}{g_1+2g_2}$.).

XIII.

Zur Theorie der Zapfen-Reibung.

Von

Herrn Professor G. Decher

in Augsburg.

In meinem Programm: „Ueber die Reibung an cylindrischen Zapfen", Augsburg 1851., habe ich ausgesprochen, dass die Voraussetzung, von welcher Herr Professor Weisbach bei der Berechnung der Reibung an einem cylindrischen Zapfen in einem anschliessenden cylindrischen Lager ausgeht, und nach welcher sich der auf den Zapfen übertragene Druck Q auf die zu seiner Richtung senkrechte Projection des Berührungsbogens gleichförmig vertheilen soll, nicht zugelassen werden kann, weil diese Voraussetzung darauf hinführt, den Normaldruck in allen Punkten des Berührungsbogens als gleich und eben so gross anzunehmen, wie in der Mitte desselben, während auf der Hand liegt, dass dieser Normaldruck in den Endpunkten eines halbkreisförmigen Bogens, wo die Tangente parallel zur Richtung der Kraft Q ist, nur Null sein kann.

Dagegen hat Herr Weisbach in Nro. 4. des polytechnischen Centralblattes vom laufenden Jahre in einer Mittheilung unter dem Titel: „Ueber die Zapfenreibung etc., seine Stimme erhoben, um seine Ansicht zu rechtfertigen und meine Theorie als irrig darzustellen, wobei er selbst des unschuldigen Referates nicht schont, welches im Archiv Th. XVII. Heft. 4. (Lit. Ber. Nr. LXVIII. S. 877.) über meine Abhandlung erschienen ist. Dieser Artikel des Hrn. W. enthält aber so viele irrige Ansichten, dass ich es, abgesehen von meiner eigenen Rechtfertigung, der

Wissenschaft schuldig zu sein glaube, dieselben näher zu beleuchten.

I.) In Bezug auf die von Herrn W. versuchte Rechtfertigung seiner oben besprochenen Hypothese erlaube ich mir Folgendes zu erwidern.

1) Da in den mathematischen Disciplinen Autoritäten keine Beweiskraft haben, so beweist Herr W. mit der Bemerkung, er habe jene Hypothese, dem Beispiele von Poncelet folgend, angenommen, gar Nichts für die Richtigkeit derselben.

2) Herr W. findet den von mir gebrauchten Ausdruck: „während es auf der Hand liegt", am unrechten Orte, aber mit Unrecht; denn es liegt wirklich für jeden Unbefangenen auf der Hand, dass ein Zapfen, welcher in einem oder mehreren Punkten so unterstützt ist, dass er vermöge dieser Unterstützung im Gleichgewicht bleiben muss, sei es durch eine oder mehrere Ebenen oder durch eine Cylinderfläche, wie in Taf. V. Fig. 4. bis 7. dargestellt ist, an den Endpunkten seines zur Richtung der Kraft Q senkrechten Durchmessers AB, wo die Tangente zur Richtung dieser Kraft parallel ist, keinen Druck mehr ausüben kann.

3) Herr W. meint, ich habe darin einen Fehlschluss begangen, dass ich das Product $0.\infty$ gleich 0 genommen habe, während es eben so gut jede andere Zahl sein könne. Dieses Product, absolut hingestellt, hat gar keinen Sinn, und es ist eine Absurdität, eine Kraft $=0$ in zwei Componenten zerlegen zu wollen, von denen die eine unendlich gross ist. Das Product $0.\infty$ hat nur dann einen Sinn, wenn es als besonderer Werth einer Function für einen besonderen Werth ihrer Veränderlichen erscheint. Eine solche Function wäre nach der auf die Lehre vom Keile sich stützenden Meinung des Herrn W.

$$n=\frac{p}{\cos\vartheta};$$

in diesem Ausdruck sind aber p und ϑ durchaus unabhängige Grössen, und man hat für jeden Werth von ϑ, also auch für $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$, $n=0$, wenn $p=0$ ist. Wird dagegen p von ϑ abhängig gemacht, und setzt man nach der Annahme des Herrn W. $p=p_1\cos\vartheta$, so wird $n=p_1$ für jeden Werth von ϑ, während nach meiner Theorie für einen sich nicht drehenden Zapfen $p=p_1\cos^2\vartheta$ ist und daraus $n=p_1\cos\vartheta$ folgt, n also $=0$ wird, wenn man $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$ nimmt, und von einem $0.\infty$ gar keine Rede ist.

4) Die von Herrn W. gemachte Anwendung der gewöhnlichen Lehre vom Keile und der bei einem cylindrischen Zapfen, welcher nur auf zwei Ebenen ruht, stattfindenden Verhältnisse auf den obigen Fall ist eine gänzlich verfehlte. Herr W. hat

dabei den wesentlichen Punkt übersehen, dass der Zapfen, also auch, nach seiner Analogie, der Keil in seiner untern Grundfläche *BA* (Taf. V. Fig. 8.) unterstützt ist, und er wird doch nicht behaupten wollen, dass ein so unterstützter Keil mit beinahe parallelen Seitenflächen seitwärts noch einen merklichen, wie viel weniger einen unendlichen Druck ausüben kann? Eine solche Behauptung würde durch die Erfahrung eines jeden Holzmachers, dass ein Keil nicht mehr zieht, wenn er auf einen Ast kommt, wenn also vor der Schneide desselben sich keine Spalte mehr öffnet, widerlegt werden.

5) Diesen Unterschied zwischen dem Druck eines unten freien Keiles und dem eines aufsitzenden hat Herr W. auch bei der Untersuchung der Reibung an stehenden konischen Zapfen unbeachtet gelassen; es darf ihn daher gar nicht wundern, dass auch die von ihm im polytechnischen Centralblatt von 1840, so wie in seinem Lehrbuche der Ingen. und Maschinen-Mechanik, Bd. I. §. 172., aufgestellte Formel für die Reibung an einem abgestumpften konischen Zapfen, von welchem vorausgesetzt wird, dass er sowohl an der Grundfläche als an der konischen Mantelfläche mit seinem Lager in Berührung steht, ganz unrichtig ist. Davon kann sich Herr W. leicht überzeugen, wenn er seinen konischen Zapfen in einen cylindrischen übergehen lässt, und demnach in seiner Formel:

$$M=\frac{2}{3}f\frac{Q}{r_1^2}(r_0^3+\frac{r_1^3-r_0^3}{\sin\alpha}),$$

in welcher M das Moment der Reibung in Bezug auf die Achse des Zapfens, Q den zu derselben parallelen Gesammtdruck, f den Reibungscoeffizienten, r_1 den Halbmesser der oberen, r_0 den der unteren Grundfläche, und α den Winkel zwischen einer Erzeugenden des Zapfenkegels mit der Achse bezeichnet (Taf. V. Fig. 9.), die beiden Halbmesser r_1 und r_0 gleich setzt. Dadurch wird aber auch $\sin\alpha=0$, und M erscheint so unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; diese wird indessen leicht beseitigt, wenn man für $\sin\alpha$ seinen Werth:

$$\sin\alpha=\frac{r_1-r_0}{\sqrt{h^2+(r_1-r_0)^2}},$$

worin h die Höhe des Zapfenkegels bedeutet, einführt, und M auf die Form bringt:

$$M=\frac{2}{3}fQ\left(\frac{r_0^3}{r_1^2}+\sqrt{h^2+(r_1-r_0)^2}\,\frac{r_1^2+r_1r_0+r_0^2}{r_1^2}\right).$$

Man findet dadurch für $r_1=r_0$, also für den cylindrischen Zapfen:

$$M = \frac{2}{3} fQr_0 + 2fQh,$$

während es wieder auf der Hand liegt, dass ein solcher Zapfen auf die cylindrische Mantelfläche keinen Druck ausüben, dass folglich das Moment der Reibung, wie bei einem ebenen Zapfen, nur $\frac{2}{3} fQr_0$. sein kann, und dass das obige Glied $2fQh$ überhaupt keinen Sinn hat, sondern eben zeigt, dass der allgemeine Werth von M unrichtig ist.

Herr W. wird mir erlauben, daraus den Schluss zu ziehen, dass auch die Voraussetzung, es vertheile sich bei stehenden Zapfen der Druck gleichförmig auf die zur Achse senkrechte Projection der Berührungsfläche unzulässig ist, von wem sie auch herrühren mag, und dass demnach auch die Formeln, welche Herr W. für die Reibung an kugelförmig abgerundeten Zapfen gegeben hat, und die sich auf dieselbe Voraussetzung stützen, unrichtig sind.

II.) Nach der, wie oben gezeigt, gänzlich misslungenen Rechtfertigung seiner Hypothese, kommt Herr W. auf meine Voraussetzung zu sprechen, und macht mir vorerst den lächerlichen Vorwurf, ich habe nicht erwähnt oder nicht gewusst, dass der Grundgedanke meiner Hypothese nicht neu sei. Auf diese Neuheit mache ich wirklich eben so wenig Anspruch, als auf die Erfindung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, welche ich mir demohngeachtet anzuwenden erlaubt habe. Jenes Mittel, den Druck eines Körpers auf einen andern, mit dem er in mehr als drei Punkten in Berührung steht, für die einzelnen Berührungspunkte dadurch zu bestimmen, dass man diese Körper oder wenigstens einen derselben als elastisch betrachtet, ist ein in der Natur der Körper begründetes, da diese nicht unveränderliche Systeme von materiellen Punkten sind, wie man sie in der angewandten Mechanik meistens so obenhin annimmt, sondern veränderliche Systeme; jenes Mittel ist daher ein so naheliegendes und so vielfach angewendetes*), dass ich es nicht für nothwendig gefunden habe, Autoritäten dafür anzuführen, da diese überhaupt für mich nur Werth haben, wo es sich um Beobachtungen und Erfahrungen handelt. Jenes Mittel ist endlich selbst das einzige, welches zu dem erreichten Zwecke angewendet werden kann; man müsste denn die allgemeinsten Gleichgewichtsbedingungen veränderlicher Systeme von materiellen Punkten zu Hülfe nehmen und in dieselben dann auch die zwischen diesen Punkten wirksamen Kräfte einführen, um den gegenseitigen Druck der einzelnen Berührungspunkte zu bestimmen!

---

*) Herr W. selbst hat es in seinem Lehrbuche der Ing.- und Masch.-Mechanik Bd. I., §. 173., wenn auch in anderer Weise, zur Bestimmung der Reibung auf Spitzen und Schneiden angewendet, ohne dabei zu erwähnen, dass es nicht seine Erfindung ist.

Aber Herr W. findet, dass die von mir gemachte Anwendung jenes Mittels, welches nach dem Vorhergehenden wohl etwas mehr als eine blosse Hypothese sein dürfte, eine verfehlte sei, und zwar desshalb, weil nicht bloss die Lagerflächen Eindrücke erhalten oder nachgeben, sondern auch der Zapfen selbst und dieser seine cylindrische Form verliere*). Nun handelt es sich aber einmal gar nicht um die Untersuchung jener Eindrücke an und für sich, sondern nur um die Vertheilung des Druckes, und dann wird auch nur ein solcher Gesammtdruck vorausgesetzt, dass jene Eindrücke unwahrnehmbar klein bleiben und von einer eigentlichen Aenderung in der Gestalt des Zapfens keine Rede sein kann. Denn wenn der Druck, welchen der Zapfen auf das Lager ausübt, eine solche Grösse erreichen sollte, dass eine wahrnehmbare Aenderung in der Gestalt des Zapfen's eintreten würde, so wären die Verhältnisse freilich ganz andere, und es wären ganz andere Kräfte für die Bewegung des Zapfens in Rechnung zu bringen, als die Reibung, abgesehen davon, dass der Zapfen wohl eher abbrechen, oder Lager und Zapfen sich bald zerstören würden. Nehmen wir also davon Umgang, da dieser Fall für die Anwendung keinen Werth hat, so fragt es sich, ist die Vertheilung des Druckes eine andere, wenn bloss das Lager, und eine andere, wenn Zapfen und Lager als elastisch betrachtet werden? Wird und kann die Vertheilung des Druckes in einem Lager, das aus drei Ebenen besteht, welche durch Federn so an den Zapfen angedrückt werden, dass diese keine Spannung besitzen, wenn der Zapfen keinen Druck ausübt, eine andere sein, als wenn diese Ebenen und der Zapfen elastisch sind, die absolute Elastizität beider aber sehr gross ist gegen den Druck, den dieser auf jene ausübt?

Herr W. gibt ja selbst zu, dass die gegenseitigen Eindrücke zweier Körper unter gleichen Verhältnissen dem Druck proportional sind**); können nun die Verhältnisse gleicher werden, als sie in unserm Falle an den drei Berührungspunkten stattfinden, wo immer eine Ebene einen Cylinder längs einer Erzeugenden berührt? Gewiss nicht! Ist nun a_1 die unwahrnehmbare Tiefe des Eindrucks am Cylinder, b_1 an der Ebene für den einen Berührungspunkt, wo der Druck N_1 ist, so hat man

$$a_1 = \lambda N_1, \qquad b_1 = \mu N_1$$

---

*) Ich kann mir indessen nicht recht erklären, was Herr W. in Bezug auf diese Formänderung mit der Bemerkung am Ende der ersten Columne auf Seite 199.: „und da ohnedies der Zapfen der schwächere Theil ist“, sagen will.

**) Doch wohl mit der Beschränkung, dass der eine Körper nicht mit einer Spitze oder Schneide gegen den andern drückt? In dieser Hinsicht geht Herr W. übrigens viel weiter als ich; denn er lässt (Lehrb. d. Ing.- und Masch.-Mech. I. §. 173.) Spitzen und Schneiden durch darauf ruhende Prismen flach drücken, ohne sich im Geringsten um die Eindrücke zu bekümmern, welche die Prismen erhalten!

und daher für die ganze Verschiebung der Achse des Cylinders in dieser Richtung:

$$e_1 = a_1 + b_1 = (\lambda + \mu)N_1 = \varepsilon N_1 .$$

An dem zweiten und dritten Berührungspunkte ist ebenso

$$e_2 = a_2 + b_2 = (\lambda + \mu)N_2 = \varepsilon N_2 , \quad e_3 = \varepsilon N_3 ;$$

es ergeben sich also dadurch ganz dieselben Beziehungen zwischen den drei Kräften N_1, N_2, N_3, wie ich sie in meinem Programm erhalten habe, wo angenommen ist, dass jede Ebene allein so viel nachgibt, als nach der vorhergehenden Betrachtung der Zapfen und diese Ebene zusammen nachgeben.

Meine Annahme beruht übrigens auf der einfachen Betrachtung, dass es, um eine vollkommene Berührung des Zapfens und des Lagers in mehr als zwei Punkten zu erhalten, und die Vertheilung des Druckes für diesen Fall zu finden, genügt, das Lager allein als elastisch anzunehmen, und zwar um so mehr, als bei der stattfindenden drehenden Bewegung des Zapfens von jeder Aenderung seiner cylindrischen Form Umgang genommen werden muss, wenn man nicht von der ursprünglichen Voraussetzung, dass nur die Reibung an dem Zapfen zu überwinden sei, ganz abkommen und in eine nichts bezweckende Haarspalterei verfallen will.

Ferner kann ich Herrn W. auch einen rationellen Grund anführen, der für die Richtigkeit meiner Ansicht spricht. Dieser besteht darin, dass sich meine Methode eben so wohl für den Fall anwenden lässt, wo der Zapfen nur auf zwei Ebenen aufruht und die Vertheilung des Druckes unzweifelhaft bestimmt ist, wie auf jeden andern. Denn setzt man in den allgemeinen Gleichungen am Ende der Seite 7. meines Programms, welche sich auf drei Berührungspunkte beziehen, den Widerstand N_1 gleich Null, nimmt also die Ebene AB (Fig. 3. daselbst) als nicht vorhanden an, und macht auch $\vartheta = 0$, damit die Winkel α und β dieselbe Bedeutung erhalten, wie in dem Falle, wo die Verhältnisse für zwei Berührungspunkte untersucht wurden, so werden diese Gleichungen mit den für den letztern Fall am Ende der Seite 5. abgeleiteten identisch*).

Endlich muss ich Herrn W. bemerken, dass meine Voraussetzung mit den in der Wirklichkeit stattfindenden Verhältnissen viel mehr übereinstimmt, als derselbe einzusehen scheint. Denn hier ist der Zapfen nicht in unmittelbarer Berührung mit dem Lager; es befindet sich vielmehr zwischen beiden eine Fettschichte, welche gewiss ebenso dick, wenn nicht viel dicker ist,

---

*) Nach der obigen Voraussetzung des Herrn W. müsste der normale Druck auch bei zwei oder drei Unterstützungspunkten in allen diesen Punkten und für jede Neigung der unterstützenden Ebenen gleich sein. Dass dem so sein könne, glaubt Herr W. doch wohl selbst nicht!?

als jene gegenseitigen Eindrücke des Zapfens und Lagers bei unmittelbarer Berührung sein würden. Diese elastische Fettschichte bildet also eigentlich die Lagerfläche, sie nimmt die Eindrücke auf, und ist daher da am dünnsten, wo der Druck am grössten ist. Es zeigt sich desswegen auch eine wesentliche Verschiedenheit in der Zapfen-Reibung, wenn der Druck so gross und der Zapfen so dünn wird, dass er das Fett in der Mitte des Berührungsbogens verdrängt und mit dem Bogen in unmittelbare Berührung kommt.

Diese Erörterungen werden genügen, um zu zeigen, dass Herr W. auch gar Nichts für sich hat, um eine gleiche Berechtigung für seine Hypothese mit der meinigen ansprechen zu können, und dass sich derselbe vergeblich bemüht hat, meine Bestimmung des Druckes (die in ihrer Anwendung auf den vorliegenden Fall doch wohl neu ist?) als unrichtig darzustellen.

III.) Zuletzt glaubt Herr W. mir noch den besonderen Vorwurf machen zu müssen, dass ich seine (im polytechn. Centralbl. von 1840) angedeutete Methode, die Vertheilung des Druckes an einem cylindrischen Zapfen aus der Biegung zu bestimmen, mit Stillschweigen übergangen habe.

Meine Absicht bei Abfassung meines Programms war gar nicht eine Kritik aller verschiedenen Theorien über die Zapfenreibung zu liefern, sondern zu zeigen, wie in der angewandten Mechanik, namentlich bei Untersuchungen über die Reibung, jene populär sein sollende, im Grunde aber nur handwerksmässige Kräftezerlegerei nach allerlei Richtungen, welche schon so oft, und namentlich Herrn W. selbst, zu falschen Schlüssen geführt hat, durch die Anwendungen der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zu beseitigen sei. Jener Vorwurf wäre daher viel eher bei dem Werke des Herrn Brix: „Ueber die Reibung“ am Platze gewesen, wenn es diesem in Betreff der erwähnten Methode des Herrn W. nicht auch wie mir ergangen ist. Denn ich muss dem Herrn W. offen gestehen, dass ich über seine Meinung durch jene kurze Andeutung seiner Methode und die daselbst hingeworfene Formel nicht klar geworden bin, und dass ich der Meinung war, derselbe habe diese Ansicht selbst wieder aufgegeben, weil er in seinem Lehrbuche der Ing.- und Masch.-Mechanik Nichts mehr davon erwähnt. Da nun aber Herr W. in seinem Aufsatze wieder auf diese Methode zurückkommt, dieselbe verständlicher darlegt und meint, dieselbe sei allen andern vorzuziehen, so kann ich es nicht mehr umgehen, Herrn W. zu zeigen, dass er hierin in einem noch viel grössern Irrthum befangen ist, als bei seiner andern Voraussetzung, und dass es unbegreiflich erscheint, wie Herr W. auf einer solchen verkehrten Ansicht beharren kann.

Herr W. denkt sich nämlich den cylindrischen Zapfen, welcher sein Lager nach einem beliebig grossen Bogen *BDB*. (Taf. V. Fig. 10.) berührt, parallel zu seiner Achse und zur Richtung der Last in sehr schmale Balken, Schienen, Bretter, oder wie diese streng mathematischen Apparate heissen mögen, zer-

schnitten; er nimmt dann an, dass jedes dieser Bretter durch eine dem Druck, welchen es auf die Bogenfläche parallel zur Richtung der Last ausübt, gleiche und entgegengesetzte Kraft aufwärts gebogen werde, und regulirt nun diesen Druck so, dass jedes dieser Bretter eine gleiche Biegung erhält. Er nimmt also zur Biegung aller unmittelbar unterstützten Bretter den ganzen Zapfendruck *R*, und natürlich nur das Biegungsmoment *W* dieses unterstützten Theiles *BGGB* in Anspruch. Durch welche Kraft soll denn nun die Biegung der beiden nicht unterstützten und auch nicht „unendlich dünnen" *Schwarten BEG* bewirkt werden, da diese doch auch mit gebogen werden, ein Biegungsmoment haben, und eine Kraft zur Biegung in Anspruch nehmen?! Und wie wird es erst, wenn der Zapfen sein Lager nur nach einer Geraden berührt? Da ist nur das mittlere „unendlich dünne Brett" unterstützt, dessen Biegungsmoment ist unendlich klein, und da der ganze Zapfendruck auf seine Biegung verwendet wird, so muss es ohne weiteres abbrechen und mit ihm alle übrigen nicht unterstützten Bretter, da diese nur so nebenher laufen und keine Kraft zur Biegung erfordern!!?

Der ganze Zapfendruck *R* wird immer zur Biegung des ganzen Zapfens verwendet, also auch dessen ganzes Biegungsmoment in Anspruch genommen, und dessen Biegung ist immer dieselbe, ob er nur in einem Punkt aufliegt oder in beliebig vielen; es ist daher eine gänzlich verfehlte Speculation, aus der Biegung die Vertheilung des Zapfendruckes auf die Unterstützungspunkte bestimmen zu wollen. Denn der Zapfen besteht nicht aus Schienen, welche nur an der Wurzel vereinigt, sonst aber unabhängig sind; es müssen sich alle Bretter des Herrn W. miteinander biegen, und es ist daher ganz gleich, wie man den Druck *R* in parallele Componenten zerlegt und auf die einzelnen Bretter vertheilt; jede einzelne dieser Componenten wirkt wegen der Cohäsion dieser Bretter auf alle Bretter zugleich, und es kommt als Gesammtwirkung nichts anderes heraus, als auf der einen Seite der Gesammtdruck und auf der anderen das ganze Biegungsmoment.

Und eine solche Absurdität glaubt Herr W. der zwölfjährigen Vergessenheit entreissen zu müssen, um sie als eine Methode anzupreisen, welche allen andern vorzuziehen sei?

Auf das, was Herr W. am Schlusse seines Artikels sagt, finde ich mich zu keiner weiteren Entgegnung veranlasst, so wie ich es auch dem Herrn Referenten im Archiv überlasse, sein Referat über meine Abhandlung, durch welches sich, wie es scheint, Herr W. getroffen gefühlt hat, gegen dessen unberechtigte Angriffe in Schutz zu nehmen, wenn es derselbe überhaupt der Mühe werth findet, darauf zu antworten*).

---

*) Herrn Weisbach gegenüber, vorzüglich nach den Proben, welche derselbe von seinen Ansichten über mathematische Strenge und Evidenz in seinen Grundlehren der höheren Analysis. Braunschweig. 1849. gegeben hat, findet der Referent dazu nicht die mindeste Veranlassung.

Bemerkung der Redaction. Der Abdruck des obigen, schon ziemlich lange in unsern Händen befindlichen Aufsatzes ist zu unserm Bedauern durch zufällige Umstände verspätet worden.

XIV.

Zur Abhandlung Nr. XIV. im achtzehnten Theil des Archivs. (Ueber die Ausgleichung der Beobachtungsfehler.)

Von

Herrn Professor Dr. J. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Bei einer nochmaligen Bearbeitung obiger Abhandlung habe ich einige der angewandten Betrachtungen nicht scharf genug gefunden, und will desshalb versuchen, dieselben hier in genauerer Weise darzustellen, indem ich zugleich einige andere Bemerkungen beifüge.

I.

Die in obiger Abhandlung zur Anwendung kommenden Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind folgende:

1) Können aus einer Gesammtzahl von möglichen Fällen verschiedene Ereignisse A, B, C,.... hervortreten, und man kennt die Wahrscheinlichkeiten a priori jedes dieser einzelnen Ereignisse, gleich a, b, c,..., so ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder das Ereigniss A oder das Ereigniss B eintreten werde, gleich $a+b$; dass entweder A, oder B, oder C eintrete: $a+b+c$, u. s. w.

Der Beweis dieses Satzes ist so einfach, dass wir darauf hier nicht eingehen. Zur Anwendung gelangt er in §. 3.

und §. 8., und zwar in letzterm unter Nr. 2. (S. 164.), worauf wir sogleich nochmals zurückkommen werden.

2) Ist m die Wahrscheinlichkeit a priori des Eintreffens eines Ereignisses, n die eines zweiten, so ist die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens beider gleich mn; und eben so hinsichtlich mehrerer Ereignisse.

Auch der Beweis dieses Satzes ist so einfach, dass wir ihn hier nicht geben. Er kommt ebenfalls mehrfach zur Anwendung, namentlich in den §§. 6., 8., 11., u. s. w.

Der wichtigste der vorkommenden Sätze ist aber folgender:

3) Wenn ein beobachtetes Ereigniss von verschiedenen, ursprünglich (a priori) gleich möglichen oder wahrscheinlichen Ursachen herrühren kann, und man ist im Stande, zum Voraus die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (abgesehen von seinem durch Beobachtung wahrgenommenen Eintreffen) zu berechnen unter der Annahme, irgend eine bestimmte dieser Ursachen bestehe, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese bestimmte Ursache beim wirklichen Eintreten bestanden habe, d. h. dass das beobachtete Ereigniss aus ihr hervorgegangen sei, ein Bruch, dessen Zähler eben die Wahrscheinlichkeit, die man zum Voraus für das Eintreffen des Ereignisses erhalten würde, wenn man diese Ursache als bestehend annähme, und dessen Nenner die Summe aller der ähnlichen Wahrscheinlichkeiten für alle ursprünglich gleich wahrscheinlichen Ursachen ist.

Es ist dies bekanntlich der erste Grundsatz der Wahrscheinlichkeit a posteriori, d. h. der Wahrscheinlichkeit der Ursachen, geschlossen aus dem Eintreten eines Ereignisses.

Bei der Wichtigkeit dieses Satzes für unsere Zwecke dürfte es nicht unangemessen sein, einen Beweis desselben zu geben, der dem von Poisson in den Recherches sur la probabilité des jugemens (pag. 81.) entspricht.

Denken wir uns auf einem Tische n gleiche Felder; auf jedem derselben befindet sich dieselbe Anzahl, μ, von Kugeln. Auf dem ersten sind m_1, auf dem zweiten $m_2, \ldots$, auf dem $n$ten m_n weisse Kugeln; der Rest bestehe jeweils aus schwarzen. Man lasse nun, ohne dass ein Besehen erlaubt ist, eine Kugel vom Tische wegnehmen, wobei wir voraussetzen, dass es dem Wegnehmenden gleich bequem ist, zu einem beliebigen der Felder zu gelangen, und man sehe eine weisse Kugel weggenommen. Die Frage ist nun nach der Wahrscheinlichkeit, dass dieselbe gerade vom $r$ten Felde komme.

Man sieht leicht, dass dieser Fall den allgemeinen darstellt. Die n Felder sind n Ursachen, die alle gleich wahrscheinlich a priori sind, indem sie alle gleich viel Kugeln enthalten: die weisse Kugel, die weggenommen wird, ist das eintretende Er-

eigniss. Die Schlüsse, die wir also aus diesem Beispiele ziehen, gelten zugleich allgemein.

Abgesehen nun von dem Eintreten des Ereignisses, wäre die Wahrscheinlichkeit, dass man eine weisse Kugel auf dem ersten Felde erhielte: $\frac{m_1}{\mu}$, auf dem zweiten: $\frac{m_2}{\mu}$, u. s. w.

Nun ist eine weisse Kugel erschienen, und man fragt bloss nach der Wahrscheinlichkeit, dass sie vom $r$ten Felde stamme. Auf diesem sind m_r weisse Kugeln, während im Ganzen $m_1+m_2+\ldots+m_n$ weisse Kugeln vorhanden sind. Dass also die erschienene gerade eine jener m_r sei, ist die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{m_r}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\frac{m_r}{\mu}}{\frac{m_1}{\mu}+\frac{m_2}{\mu}+\ldots+\frac{m_n}{\mu}},$$

welche Formel den Beweis des Satzes enthält.

Der Satz selbst wird nun vielfach in der angeführten Abhandlung angewendet, und es möchte nicht unnöthig sein, auf die einzelnen Fälle dieser Anwendungen zurückzukommen. Zunächst in §. 6. (S. 157.). Die Grösse

$$w_0'w_0''\ldots e^{-(h_1^2v_1^2+h_2^2v_2^2+h_3^2v_3^2+\ldots)}$$

giebt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Fehler v_1, v_2,..... zusammentreffen. Sie ist eine Funktion der Grössen x, y, z,...... und man wird also auch sagen können, dass, unter der Annahme von bestimmten Werthen für x, y, z,.., sie die Wahrscheinlichkeit a priori ausdrücke, dass die Fehler v_1, v_2,...... erscheinen, d. h. mit andern Worten, dass man für

$$a_1x+b_1y+\ldots,\quad a_2x+b_2y+\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots$$

durch Beobachtung die Werthe M_1, M_2,..... finden werde. Diese Grössen sind aber nun wirklich gefunden, also ist, rückwärts geschlossen, die Wahrscheinlichkeit des Bestehens jener angenommenen Werthe von x, y, z,.... die Grösse (10) auf S. 158.

Sodann in §. 8. (S. 162.). Die Betrachtungen dieses Paragraphen werden in Etwas geändert werden müssen, um sie genauer zu machen.

Ist zuerst $V=\alpha N$, und nehmen wir irgend einen Werth N dieser Grösse als den richtigen an, was theoretisch (vor aller Beobachtung) frei steht, so wird dadurch auch V bestimmt. Ist einmal N angenommen, so ist die Wahrscheinlichkeit a priori, durch Beobachtung den Werth n zu finden, also den Fehler $N-n$ zu begehen, nach §. 3.:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(N-n)^2} \partial N,$$

worin h noch unbestimmt ist. Da aber der Werth n durch Beobachtung wirklich erhalten, so ist, umgekehrt, die Wahrscheinlichkeit, dass der angenommene Werth N der richtige sei:

$$\frac{\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(N-n)^2} \partial N}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(N-n)^2} \partial N} = \frac{e^{-h^2(N-n)^2}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(N-n)^2}},$$

worin das Summenzeichen sich auf N bezieht. Daraus würde folgen, dass n der wahrscheinlichste Werth von N und $hr = \varrho$ ist (§. 5.), wodurch h gefunden ist.

Ist aber N richtig angenommen, so ist $V = \alpha N$ auch richtig gefunden, und obige Grösse drückt zugleich also auch die Wahrscheinlichkeit aus, dass V der richtige Werth dieser Grösse sei. Da aber $N = \frac{V}{\alpha}$, so ist also auch

$$\frac{e^{-h^2\left(\frac{V}{\alpha}-n\right)^2}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\left(\frac{V}{\alpha}-n\right)^2}} = \frac{e^{-\frac{h^2}{\alpha^2}(V-\alpha n)^2} \partial V}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2}{\alpha^2}(V-\alpha n)^2} \partial V}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass ein (beliebiger) Werth V gerade der rechte sei. Der Nenner dieser Grösse ist $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{h}$, sie selbst also

$$\frac{h}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h^2}{\alpha^2}(V-\alpha n)^2} \partial V,$$

woraus dann leicht die in 1) (S. 163.) aufgeführten Schlüsse sich ergeben.

Ist nun $V = N + N'$, so findet man, wie so eben, dass die theoretische Wahrscheinlichkeit, man werde durch Beobachtung n erhalten, wenn N der wahre Werth ist, sein wird:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(N-n)^2} \partial N,$$

und ähnlich

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2(N'-n')^2} \partial N$$

für die andere Grösse. Dass beides gleichzeitig geschehe:

$$\frac{hh'}{\pi} e^{-h^2(N-n)^2-h'^2(N'-n')^2} \partial N \partial N',$$

und da nun n und n' wirklich gefunden worden, so ist, rückwärts geschlossen, die Wahrscheinlichkeit der Annahme, N und N' seien richtig:

$$\frac{e^{-h^2(N-n)^2-h'^2(N'-n')^2}}{\Sigma \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(N-n)^2-h'^2(N'-n')^2}}$$

Sind aber N und N' richtig, so ist es auch $V(=N+N')$ und obige Grösse, wenn man in ihr $N'=V-N$ setzt, drückt die Wahrscheinlichkeit a posteriori aus, zwei (beliebig angenommene) Werthe von N und V seien die richtigen, wenn man n und n' gefunden hat. Darum aber handelt es sich nicht, sondern bloss um den richtigen Werth von V, was auch N sein möge, d. h. ob N entweder diesen, oder jenen Werth habe. Beachtet man dies, so wird man, nach dem ersten der oben angeführten Sätze, leicht das in S. 164. Aufgeführte schliessen, wenn man bemerkt, dass

$$\frac{e^{-h^2(N-n)^2-h'^2(N'-n')^2}}{\Sigma \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(N-n)^2-h'^2(N'-n')^2}}$$

$$= \frac{e^{-h^2(N-n)^2-h'^2(V-N-n')^2} \partial N \partial V}{\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(N-n)^2-h'^2(V-N-n')^2} \partial N \partial V}$$

$$= \frac{hh'}{\pi} e^{-h^2(N-n)^2-h'^2(V-N-n')^2} \partial N \partial V,$$

so dass man also in S. 163. nur ∂V an die Stelle von $\partial N'$ zu setzen hat.

Das Uebrige ergiebt sich sodann, wie in der angeführten Abhandlung.

Ferner in §. 11. Man wird die dortige Anwendung nun leicht ableiten. Zu bemerken ist nur, dass $v_1, v_2, ..$ die wahren Fehler sind, und dass die bestimmten Integrale dieses Paragraphen nur von 0 bis ∞, statt von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen sind, indem h bloss positive Werthe hat.

U. s. w. in den übrigen Fällen.

II.

Der §. 12. der angeführten Abhandlung muss durch folgende Betrachtungen ersetzt werden.

Es bleibt zunächst zu untersuchen übrig, welches der wahrscheinlichste Fehler sei, den man begeht, wenn man für h den durch die Formel (31) gegebenen Werth wählt. Sei also dieser Werth

$$=h' \left(=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2[gv^2]}}\right),$$

und sei allgemein $h=h'+z$, es habe K_1 die Bedeutung, wie in §. 11.

$$\left(=\frac{1}{\int_0^\infty h^m e^{-h^2[gv^2]}\partial h}\right);$$

so ist

$$K_1(h'+z)^m e^{-(h'+z)^2[gv^2]}\partial z = K_1 h'^m \left(1+\frac{z}{h'}\right)^m e^{-\left(1+\frac{z}{h'}\right)^2\cdot\frac{m}{2}}\partial z$$

die Wahrscheinlichkeit, dass $h'+z$ der richtige Werth von h sei, dass also, wenn man h' dafür angenommen, der Fehler z begangen worden sei. Setzt man

$$K_1 h'^n e^{-\frac{m}{2}}=K,$$

so ist obige Grösse gleich

$$K\left(1+\frac{z}{h'}\right)^m e^{-\frac{m}{2}\left(\frac{2z}{h'}+\frac{z^2}{h'^2}\right)}\partial z = Ke^{-\frac{mz}{h'}-\frac{z^2}{2h'^2}+m\,l\left(1+\frac{z}{h'}\right)}\partial z$$

$$=Ke^{-\frac{mz^2}{h'^2}\left(1-\frac{z}{3h'}+\frac{z^2}{4h'^2}-\dots\right)}\partial z,$$

wenn man $l\left(1+\frac{z}{h'}\right)$ in eine Reihe entwickelt. Die Grösse z (ihr wahrer Werth) wird nothwendig sehr klein sein müssen, indem h' der w a h r s c h e i n l i c h s t e Werth von h ist; für die zu beachtenden Werthe von z wird man also obige Grösse füglich gleich

$$Ke^{-\frac{mz^2}{h'^2}}\partial z$$

setzen dürfen, welche Grösse also die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass bei der Annahme $h=h'$ ein Fehler z begangen worden.

Was den Werth der Grösse K anbelangt, so ist er:

$$K=\frac{h'^m e^{-\frac{m}{2}}}{\int_0^\infty h^m e^{-h^2[\varepsilon v^2]}\partial h}=\frac{h'^m e^{-\frac{m}{2}}}{\int_0^\infty h^m e^{-\frac{m}{2}\frac{h^2}{h'^2}}\partial h}.$$

Was das hier vorkommende Integral anbelangt, so setze man

$$h=h'x\sqrt{\frac{2}{m}},$$

wodurch man erhält:

$$\int_0^\infty h^m e^{-\frac{m}{2}\frac{h^2}{h'^2}}\partial h=h'^{m+1}\sqrt{\left(\frac{2}{m}\right)^{m+1}}\int_0^\infty x^m e^{-x^2}\partial x.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\int_0^\infty x^{2r}e^{-x^2}\partial x=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2^r}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^\infty x^{2r+1}e^{-x^2}\partial x=\frac{1}{2}\cdot 1.2\ldots\ldots r.$$

Gesetzt nun m (also auch r) sei sehr gross, so ist (vergleiche z. B. Naviers Differential- und Integralrechnung, zweiter Band, Zusatz IV.):

$$1.3.5\ldots.(2r-1)=\sqrt{2}.(2r)^r e^{-r},$$

$$1.2\ldots\ldots r=\sqrt{2r\pi}.r^r e^{-r}.$$

Ist also $m=2r$, so ist

$$K=\frac{h'^{2r}e^{-r}.2^{r+1}}{h'^{2r+1}\sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^{2r+1}}1.3\ldots.(2r-1)\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{e^{-r}.2^{r+1}\sqrt{(r)^{2r+1}}}{h'.\sqrt{\pi}.\sqrt{2}.(2r)^r e^{-r}},$$

wenn r sehr gross; also

$$K = \frac{2r^{\frac{1}{2}}}{h'\sqrt{\pi}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2r}}{h'\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{m}}{h'\sqrt{\pi}}.$$

Ist dagegen $m = 2r + 1$, so findet man unter derselben Annahme:

$$K = \frac{h'^{2r+1} e^{-\frac{2r+1}{2}} 2\sqrt{(2r+1)^{2r+2}}}{h'^{2r+2}\sqrt{(2)^{2r+2}}\sqrt{2r\pi}\,.\, r^r e^{-r}}$$

$$= \frac{2e^{-(r+1)}(r+\frac{1}{2})^{r+1}}{h'\sqrt{2\pi} r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r}} = \frac{2e^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2r})^{r+1}\sqrt{r}}{h'\sqrt{2\pi}}.$$

Für ein grosses r wird man aber $(1+\frac{1}{2r})^{r+1} = e^{\frac{1}{2}}$ setzen können, so dass also dann

$$K = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2r}}{h'\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2r}}{h'\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{m}}{h'\sqrt{\pi}} \quad \text{nahezu.}$$

Man wird also für ein grosses m: $K = \frac{\sqrt{m}}{h'\sqrt{\pi}}$ setzen können, und demnach

$$\frac{\sqrt{m}}{h'\sqrt{\pi}} e^{-\frac{mz^2}{h'^2}} \partial z$$

für die Wahrscheinlichkeit erhalten, dass ein Fehler z begangen wurde, als man h' für den wahren Werth von h nahm. Daraus folgt, wie in §. 4., dass $\frac{\sqrt{m}}{h'}$ das Mass der Genauigkeit für diese Annahme ist, dass also $\frac{h'\varrho}{\sqrt{m}}$ den wahrscheinlichen Fehler derselben bedeutet, freilich immer unter der Voraussetzung eines grossen m. Daraus folgen nun die Resultate des §. 12., die auf S. 179. angegeben sind.

III.

Zu dem höchst wichtigen, in §. 17. bewiesenen Satze mögen gleichfalls einige Bemerkungen gestattet sein.

Die Gleichung (50) ist richtig, wenn man für w bloss Werthe anwendet, die den Bedingungsgleichungen (38) genügen. Denn es giebt nur in so ferne verschiedene Wege, zu u zu gelangen, als

eben diese Bedingungsgleichungen bestehen, die Grössen w (oder e) also nicht von einander unabhängig sind, so dass man diese oder jene derselben zur Berechnung von u anwenden kann. Wären diese Bedingungsgleichungen nicht vorhanden, so gäbe es offenbar einen einzigen Weg, da sonst die Gleichsetzung der Resultate, die auf verschiedenen Wegen erhalten wurden, geradezu solche Bedingungsgleichungen hervorbringen würde. Wendet man aber Werthe von w an, die den Bedingungsgleichungen (38) genügen, so ist es für diese Werthe offenbar gleich, ob die (38) bestehen oder nicht, was unsere Behauptung rechtfertigt. Die $e+x$ des §. 16. sind nun allerdings in diesem Falle, sie sind es aber nicht allein, da die x nicht bloss durch (38). bestimmt wurden. Wendet man sie aber an, so erhält man den wichtigen Vortheil, dass der mittelst dieser Werthe erhaltene Ausdruck von u der Art ist, dass er dasselbe Resultat für u giebt, welches die bestmögliche Verbindung der unausgeglichenen Beobachtungen hätte geben können, während gerade diese bestmögliche Verbindung so beschaffen ist, dass sie dasselbe Resultat giebt, ob man die unausgeglichenen, oder die ausgeglichenen Beobachtungen anwendet, da, wie man aus (56), (57) und der Gleichung $[lx] = [an]$ leicht schliesst:

$$\psi(e_1, e_2, \ldots) = \psi(e_1 + x_1, e_2 + x_2, \ldots).$$

Zur Ableitung der Gleichung (53) kann man noch bemerken, dass die Differenz

$$\psi(e_1, e_2, \ldots) - \varphi(e_1, e_2, \ldots)$$

verschwinden muss mit den Grössen $F_1, F_2, \ldots$, wenn man in letztere e an die Stelle von w geschrieben denkt. Sie wird also als Funktion dieser Grössen aufgefasst werden müssen u. s. w.

IV.

Was die Auflösung der nach der Methode der kleinsten Quadrate angesetzten Gleichungen betrifft, so wird die direkte Rechnung, namentlich wenn ziemlich viele Unbekante vorhanden sind, wohl weitläufig sein. Das Verfahren, dass Gauss zu diesem Ende vorgeschlagen, kommt so ziemlich auf die häufig gebrauchte Eliminationsmethode heraus, nämlich aus dem aufzulösenden Systeme von Gleichungen des ersten Grades ein neues zu bilden, das eine Unbekannte weniger enthält, u. s. w., bis man endlich auf eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten kömmt.

Das Gleichungssystem (18) in §. 6. wird die allgemeine Form der Gleichungen enthalten, welche bei den Anwendungen der Methode aufzulösen sind. Man bilde nun folgende Grössen:

$$\left.\begin{array}{ll}
[gb^2] - \dfrac{[gab]^2}{[ga^2]} = [gb^2.1], & [gd^2] - \dfrac{[gad]^2}{[ga^2]} = [gd^2.1], \\
[gbc] - \dfrac{[gab][gac]}{[ga^2]} = [gbc.1], & [gde] - \dfrac{[gad][gae]}{[ga^2]} = [gde.1], \\
\vdots & \vdots \\
[gc^2] - \dfrac{[gac]^2}{[ga^2]} = [gc^2.1], & [gbM] - \dfrac{[gab][gaM]}{[ga^2]} = [gbM.1], \\
[gcd] - \dfrac{[gac][gad]}{[ga^2]} = [gcd.1], & [gcM] - \dfrac{[gac][gaM]}{[ga^2]} = [gcM.1], \\
\vdots & \vdots
\end{array}\right\} \quad (k)$$

so erhält man aus (18):

$$\left.\begin{array}{l}
[gb^2.1]y + [gbc.1]z + [gbd.1]u + \ldots\ldots = [gbM.1], \\
[gbc.1]y + [gc^2.1]z + [gcd.1]u + \ldots\ldots = [gcM.1], \\
[gbd.1]y + [gcd.1]z + [gd^2.1]u + \ldots\ldots = [gdM.1], \\
\vdots
\end{array}\right\} \quad (l)$$

Bildet man sodann weiter:

$$
\left.\begin{aligned}
&[gc^2.1]-\frac{[gbc.1]^2}{[gb^2.1]}=[gc^2.2], \qquad [ge^2.1]-\frac{[gbe.1]^2}{[gb^2.1]}=[ge^2.2],\\
&[gcd.1]-\frac{[gbc.1][gbd.1]}{[gb^2.1]}=[gcd.2], \quad [gef.1]-\frac{[gbe.1][gbf.1]}{[gb^2.1]}=[gef.2],\\
&\qquad\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\\
&[gd^2.1]-\frac{[gbd.1]^2}{[gb^2.1]}=[gd^2.2], \qquad [gcM.1]-\frac{[gbc.1][gbM.1]}{[gb^2.1]}=[gcM.2],\\
&[gde.1]-\frac{[gbd.1][gbe.1]}{[gb^2.1]}=[gde.2], \quad [gdM.1]-\frac{[gbd.1][gbM.1]}{[gb^2.1]}=[gdM.2]\\
&\qquad\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (k')
$$

so erhält man aus (l):

$$
\left.\begin{aligned}
&[gc^2.2]z+[gcd.2]u+\ldots=[gcM.2],\\
&[gcd.2]z+[gd^2.2]u+\ldots=[gdM.2],\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (l')
$$

Bildet man nun eben so:

$$\left.\begin{array}{ll}
[gd^2.2]-\dfrac{[gcd.2]^2}{[gc^2.2]}=[gd^2.3], & \\
[gde.2]-\dfrac{[gcd.2]\,[gce.2]}{[gc^2.2]}=[gde.3], & \\
\ldots\ldots & \\
[ge^2.2]-\dfrac{[gce.2]^2}{[gc^2.2]}=[ge^2.3], & [gdM.2]-\dfrac{[gcd.2]\,[gcM.2]}{[gc^2.2]}=[gMd.3], \\
[gef.2]-\dfrac{[gce.2]\,[gcf.2]}{[gc^2.2]}=[gef.3], & [geM.2]-\dfrac{[gce.2]\,[gcM.2]}{[gc^2.2]}=[geM.3], \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right\}\quad (k')$$

so erhält man aus (l'):

$$\left.\begin{array}{l}
[gd^2.3]\,u+[gde.3]\,v+\ldots.=[gdM.3], \\
[gde.3]\,u+[ge^2.3]\,v+\ldots.=[geM.3], \\
\vdots
\end{array}\right\}\quad (l'')$$

In welcher Weise man hier weiter geht, ist klar. Hätte man z. B. sechs Unbekannte: x, y, z, u, v, w, so wäre die letzte Gleichung zur Bestimmung von w:

$$[gf^2.5]\,w=[gfM.5], \qquad (l_1)$$

während zur Bestimmung von v dann dienten:

$$[ge^2.4]v + [gef.4]w = [geM.4],$$

$$[gef.4]v + [gf^2.4]w = [gfM.4];$$

zur Bestimmung von u die (l''), zur Bestimmung von z, y, x die (l'), (l), (18).

Man sieht zugleich, dass die sämmtlichen Gleichungssysteme (l), (l'),...... die Eigenthümlichkeit beibehalten, welche die (18) hatten, dass nämlich die Koeffizienten der Unbekannten in horizontalen und vertikalen Richtungen einander gleich sind.

Wollte man das Gewicht von w kennen, so hätte man nach §. 10. den Koeffizienten von $[gfM]$ in dem Werthe $\frac{[gfM.5]}{[gf^2.5]}$ zu suchen. Zu dem Ende wollen wir die Grössen $[gaM]$, ..., $[geM]$ sämmtlich Null setzen, da dies offenbar an dem gesuchten Koeffizienten Nichts ändert; alsdann zieht man aus den Gleichungen (k), (k'), ...:

$$[gbM.1] = 0, \; ...., \; [geM.1] = 0, \quad [gfM.1] = [gfM],$$

$$[gcM.2] = 0, \; ...., \; [geM.2] = 0, \quad [gfM.2] = [gfM.1] = [gfM],$$

u. s. w., endlich:

$$[gfM.5] = [gfM],$$

so dass der gesuchte Koeffizient gleich $\frac{1}{[gf^2.5]}$ ist, mithin das Gewicht von w: $[gf^2.5]$. Macht man so nach und nach jedes Element zum letzten, so kann man die Gewichte derselben leicht erhalten.

Hätte man endlich noch folgende Grössen gebildet:

$$\left.\begin{aligned} [gM^2] - \frac{[gaM]^2}{[ga^2]} &= [gM^2.1], \\ [gM^2.1] - \frac{[gbM.1]^2}{[gb^2.1]} &= [gM^2.2], \\ [gM^2.2] - \frac{[gcM.2]^2}{[gc^2.2]} &= [gM^2.3], \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (K)$$

so wäre die letzte dieser Grössen die in §. 15. verlangte Summe $[gv_0^2]$. Dass die Grössen (K) gleich mit den Grössen (k), (k'),... gebildet werden können, versteht sich von selbst.

Der Beweis dieses Satzes ist ziemlich einfach. Man hat nach §. 15.:

$$[gv_0^2] = [g(ax_0 + by_0 + cz_0 + \ldots - M)^2]$$
$$= g_1(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + \ldots - M_1)^2$$
$$+ g_2(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + \ldots - M_2)^2$$
$$\vdots$$
$$= [ga^2]x_0^2 + 2[gab]x_0y_0 + [gb^2]y_0^2$$
$$+ 2[gac]x_0z_0 + 2[gbc]y_0z_0 + [gc^2]z_0^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$-2[gaM]x_0 - 2[gbM]y_0 - 2[gcM]z_0 - \ldots + [gM^2]$$
$$= \frac{1}{[ga^2]}\{[ga^2]x_0 + [gab]y_0 + [gac]z_0 + \ldots - [gaM]\}^2$$
$$- \frac{1}{[ga^2]}\{[gab]y_0 + [gac]z_0 + \ldots - [gaM]\}^2$$
$$+ [gb^2]y_0^2 + 2[gbc]y_0z_0 + [gc^2]z_0^2 + \ldots + [gM^2],$$

wenn man beachtet, dass

$$Ax_0^2 + 2Bx_0 + C = \frac{(Ax_0 + B)^2}{A} - \frac{B^2}{A} + C.$$

Nun ist, in Folge der Gleichungen (18), die erste Zeile Null; entwickelt man sodann das Uebrige und beachtet die Gleichungen (k) und (K), so erhält man:

$$[gv_0^2] = [gb^2.1]y_0^2 + 2[gbc.1]y_0z_0 + [gc^2.1]z_0^2$$
$$+ 2[gbd.1]y_0u_0 + 2[gcd.1]z_0u_0 + [gd^2.1]u_0^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$-2[gbM.1]y_0 - 2[gcM.1]u_0 - \ldots + [gM^2.1].$$

Beachtet man wieder, dass

$$Ay_0^2 + 2By_0 + C = \frac{(Ay_0 + B)^2}{A} - \frac{B^2}{A} + C,$$

ferner die Gleichungen (l), (k') und (K), so erhält man:

$$[gv_0^2] = [gc^2.2]z_0^2 + 2[gcd.2]z_0u_0 + [gd^2.2]u_0^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$-2[gcM.2]z_0 - 2[gdM.2]u_0 - \ldots + [gM^2.2].$$

Wie man hier weiter gehen kann, ist klar, so dass man endlich erhält:

$$[gv_0^2] = [gM^2.n],$$

worin n die Bedeutung, wie in §. 15. hat.

Da man $[gv_0^2]$ leicht direkt berechnen kann, so hat man hierdurch immer eine scharfe Kontrole der Rechnung, die bei Zahlenrechnungen ohnehin äusserst nothwendig ist.

V.

In der fraglichen Abhandlung ist der Beweis der Grundformel (3), von der Alles abhängt, auf Betrachtungen gestützt, die allerdings in Frage gestellt werden können. Schon im elften Theile des Archivs Nr. XXXVI. (S. 369. ff.) hat Herr Professor Matzka (jetzt in Prag) einen Beweis dieser Gleichung gegeben. Die folgenden Betrachtungen ruhen auf ähnlicher Grundlage und dürften als Nachweis jener Gleichung gelten können.

Die Häufigkeit der Fehler ist im umgekehrten Verhältniss ihrer Grösse; ein gewisser Fehler v wird desto häufiger vorkommen, oder besser gesagt, sein Vorkommen wird desto wahrscheinlicher sein, je kleiner, desto weniger wahrscheinlich, je grösser er ist. Allgemein werden wir sagen müssen, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers v, der bei einer Beobachtung soll begangen worden sein, sei eine Funktion $\varphi(v)$ dieses Fehlers. Hinsichtlich dieser Funktion wissen wir, dass $(\varphi(-v)=\varphi(v)$, so wie, dass sie rasch abnehmen muss, wenn v wächst, mithin ein einziges Maximum hat für $v=0$, und zu beiden Seiten dieses Maximums gleich verläuft. Jedenfalls ist ihr Werth Null für $v=\pm\infty$. Da ferner $\varphi(v)$ abnimmt mit wachsendem v, so muss $\frac{\partial\varphi(v)}{\partial v}$ immer negativ sein, in so ferne wir bloss positive Werthe von v ins Auge fassen. Um nun $\varphi(v)$ selbst bestimmen zu können, wollen wir zunächst nur eine Reihe von Beobachtungen einer einzigen Grösse A ins Auge fassen und zugleich annehmen, es seien diese Beobachtungen sämmtlich gleich gut. Ist n die Anzahl der Beobachtungen, sind ferner v_1, v_2, ..., v_n die (jedenfalls) begangenen Beobachtungsfehler, so werden diese (allerdings unbekannten) Fehler ihre Werthe ändern, je nachdem der wahre Werth der Grösse A sich ändert. Welches der wahre Werth von A sei, weiss man nicht; theoretisch sind alle möglichen Werthe von A zulässig, und jedem entspricht ein anderes System von Fehlern v_1, v_2, ...v_n. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler sind bezüglich $\varphi(v_1)$, ..., $\varphi(v_n)$; die Wahrscheinlichkeit somit, dass sie sämmtlich zugleich vorkommen:

$$\varphi(v_1).\varphi(v_2).....(\varphi(v_n)=\Phi.$$

Hat man nun irgend welchen Werth für A als den wahren angenommen, so erlangt auch Φ einen bestimmten Werth, und derjenige Werth von A wird zu wählen sein, für den Φ ein Maximum wird.

Man kann dies auch noch so betrachten. Sei z der wahre Werth von A; a_1, a_2, ..., a_n die durch die Beobachtungen gefundenen Werthe dieser Grösse, so sind die begangenen Fehler: $z-a_1$, $z-a_2$, ..., $z-a_n$ und die Grösse

$$\varphi(z-a_1)\varphi(z-a_2)\ldots\varphi(z-a_n)$$

drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass man statt des angenommenen Werthes z für A durch Beobachtung finden werde: a_1, ..., a_n. Daraus folgt nun, nach I., nachdem die Werthe a_1, ..., a_n erschienen sind, dass die Wahrscheinlichkeit, z sei wirklich der richtige Werth von A gewesen, ist

$$\frac{\varphi(z-a_1)\varphi(z-a_2)\ldots\varphi(z-a_n)}{\Sigma\varphi(z-a_1)\varphi(z-a_2)\ldots\varphi(z-a_n)},$$

worin Σ sich auf alle möglichen Werthe von z erstreckt. Jener Werth z ist der wahrscheinlichste, für den diese Grösse ein Maximum ist. Da der Nenner nicht von z abhängt, so wird man also zur Bestimmung von z haben:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi(v_1)\varphi(v_2)\ldots.\varphi(v_n)\right]=0,$$

d. h. wenn man bemerkt, dass $\frac{\partial v_1}{\partial z}=\frac{\partial v_2}{\partial z}=\ldots.=\frac{\partial v_n}{\partial z}=1$:

$$\frac{\varphi'(v_1)}{\varphi(v_1)}+\frac{\varphi'(v_2)}{\varphi(v_2)}+\ldots\ldots+\frac{\varphi'(v_n)}{\varphi(v_n)}=0. \qquad (\alpha)$$

Je grösser nun die Anzahl n der gemachten Beobachtungen ist, desto sicherer wird man darauf rechnen dürfen, dass unter den begangenen Fehlern gleich viel (und bezüglich gleich grosse) positive und negative Fehler vorkommen, mithin alsdann die Summe $v_1+v_2+\ldots+v_n$ sich desto mehr der Null nähert, je grösser n ist. Da wir die Fehler als rein zufällige annehmen, so wird diese Annahme wohl gerechtfertigt sein. Aber je grösser n ist, desto sicherer wird man darauf zählen dürfen, dass der wahrscheinlichste und der wahre Werth von A zusammenfallen, da wir uns dem wahren Werthe durch Vervielfältigung der Beobachtungen offenbar immer mehr nähern müssen. Demnach werden, je grösser n ist, die in (α) vorkommenden Fehler v_1, v_2, ..., v_n sich immer mehr den wahren nähern, zwischen denen die Gleichung

$$v_1+v_2+\ldots..+v_n=0 \qquad (\beta)$$

besteht. Eine Abhängigkeit darf zwischen den Grössen a_1, a_2, ..., a_n keineswegs bestehen, da wir voraussetzen, diese sämmtlichen Grössen seien direkt durch Beobachtung, also unabhängig von einander, gefunden. Würden nun die zugleich bestehenden Gleichungen (α) und (β) von einander verschieden sein, so könnte man z zwischen beiden eliminiren und man erhielte dann eine Gleichung zwischen a_1, a_2, ..., a_n, gegen das eben Gesagte. Damit aber diese beiden Gleichungen identisch seien, muss nothwendig

$$\frac{\varphi'(v_1)}{\varphi(v_1)} = kv_1, \quad \frac{\varphi'(v_2)}{\varphi(v_2)} = kv_2, \; ...., \; \frac{\varphi'(v_n)}{\varphi(v_n)} = kv_n,$$

allgemein also

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = kv$$

sein, wo k eine negative Konstante ist, indem $\varphi'(v)$ und v von verschiedenem Zeichen sein werden, während $\varphi(v)$ positiv ist. Setzt man also $k = -2h^2$, so ist

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = -2h^2 v, \quad \text{l}.\varphi(v) = -h^2 v^2 + \text{l}(c), \quad \varphi(v) = c.e^{-h^2 v^2},$$

wodurch die Gleichung (2) bewiesen ist. Von da an folgt alles Uebrige nun leicht.

XX.

De l'expression goniométrique des racines de l'équation du 3ième degré.

Par

M. E. J. Björling

à Westeras en Suède.

(Extrait de l'aperçu des Transactions de l'Acad. des sciences de Stockholm, Séance du 9. Oct. 1850.).

Il est bien connu que l'on a trouvé des démonstrations de la proposition que les racines de la générale équation algébrique d'un degré supérieur au 4ième ne peuvent s'exprimer au moyen de quelque fonction algébrique des coefficients de l'équation. Mais on n'est pas pourtant assuré que cela ne peut se faire au moyen d'une fonction de quelque autre classe, p. ex. d'une fonction goniométrique, logarithmique, elliptique etc. des coefficients. Peut-être une recherche dans ce champs-là ne manquerait pas d'intérêt.

Voici préalablement une spécialité de ce genre.

A ce que je sait, on n'a pas encore observé assez bien que la forme $y\cos z$ des racines de l'équation du 3ième degré dans le cas spécial que l'on a nommé le *casus irreductibilis*, s'adapte en effet nettement aux racines d'une équation quelconque de ce degré, pourvu toutefois que, la quantité z étant ou imaginaire ou réelle et numériquement >1, l'on applique aux notations

$$\cos z, \quad \operatorname{arccos}((z))$$

les définitions, par lesquelles on est convenu, il n'y a pas longtemps, de fixer dans ces cas le sens de ces mêmes notations*). Ces quelques lignes suivantes feront voir que cette assertion est bien fondée, et que l'on peut avoir, en effet, directement et avec la plus grande facilité, l'expression convenable, de la forme dont il s'agit, des racines.

1. Afin de résoudre l'équation du 3ième degré

$$(1) \qquad x^3 - ax + b = 0,$$

l'on peut, en posant $2y\cos z$ au lieu de x, chercher toutes les valeurs de $2y\cos z$ qui satisfont à l'équation

$$8y^3\cos^3 z - 2ay\cos z + b = 0,$$

ou à l'équation

$$2y^3(\cos 3z + 3\cos z) - 2ay\cos z + b = 0,$$

ou même à

$$(2) \qquad 2y^3\cos 3z + 2(3y^2 - a)y\cos z + b = 0,$$

ou bien, en posant

$$3y^2 - a = 0, \quad \text{ou plutôt} \quad y = \sqrt{\frac{a}{3}},$$

chercher toutes les valeurs correspondantes de $\cos z$, ou même de z, qui satisfont à l'équation

$$2y^3\cos 3z + b = 0,$$

c. à d. toutes les valeurs de z qui satisfont à l'équation

$$2\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\cos 3z + b = 0,$$

ou (en omettant à présent le cas de $a = 0$)**) à l'équation

$$\cos 3z = -\frac{{}^1\!/_2 b}{({}^1\!/_3 a)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, ce qui revient au même, à la suivante:

---

*) Voir p. ex. les Actes de l'Académie des sciences de Stockh. pour l'année 1847 pag. 275; Exercices d'Analyse et de Phys. mathém. (T. III.) de M. Cauchy.

**) Il est bien evident, en effet, que dans ce cas-là notre assertion ci-dessus ne se trouve pas nullement en défaut.

$$z = \tfrac{1}{3} \arccos\left(\left(-\frac{\tfrac{1}{2}b}{[\tfrac{1}{3}a]^{\frac{3}{2}}}\right)\right);$$

par conséquent toutes les racines de l'équation proposée se trouvent comprises dans le second membre de cette autre:

$$(3) \qquad x = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \cdot \cos\left\{\tfrac{1}{3} \arccos\left(\left(-\frac{\tfrac{1}{2}b}{[\tfrac{1}{3}a]^{\frac{3}{2}}}\right)\right)\right\}.$$

2. Pour ne laisser rien à désirer à cet égard. nous allons vérifier à présent qu'en effet dans tous les cas, les coefficients de l'équation proposée étant réels (a non $=0$), les valeurs de x que fournit cette formule (3) coïncident précisément avec les expressions ordinaires des racines de l'équation.

1.).

a étant positif, et $-\dfrac{\tfrac{1}{2}b}{(\tfrac{1}{3}a)^{\frac{3}{2}}}$ numér. $\overline{\overline{<}}\, 1$ (ou $\dfrac{b^2}{4} \overline{\overline{<}} \dfrac{a^3}{27}$),

(casus irreductibilis),

notre formule (3) donne immédiatement, comme à l'ordinaire,

$$(3') \qquad x = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \cdot \cos\frac{\theta \pm 2k\pi}{3},$$

θ désignant

$$\arccos\left(-\frac{\tfrac{1}{2}b}{[\tfrac{1}{3}a]^{\frac{3}{2}}}\right),$$

compris entre les limites 0 et π,

et

k un nombre pair quelconque (0 inclusive),

dont on obtient les diverses valeurs, au nombre de trois, comme on sait, en posant successivement $2k=0$ et $=2$.

2.).

a étant positif, et $-\dfrac{\tfrac{1}{2}b}{(\tfrac{1}{3}a)^{\frac{3}{2}}}$ numér. > 1 (ou $\dfrac{b^2}{4} > \dfrac{a^3}{27}$),

comme en général, α étant numériquement >1, l'expression arccos((α)) représente*)

$$\mathrm{Arccos}\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)\right)\pm i.\log(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}),$$

notre formule (3) donne, α désignant (pour abréger) $-\frac{{}^1\!/_2 b}{({}^1\!/_3 a)^{\frac{3}{2}}}$,

$$x=2\sqrt{\frac{a}{3}}\cdot\cos\{{}^1\!/_3\mathrm{arccos}((\pm1))\pm i.\log\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}}\},$$

à savoir, ±1, selon que b est négatif ou positif,

$$=2\sqrt{\frac{a}{3}}\cdot\cos\left\{\frac{m\pi}{3}\pm i.\log\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}}\right\},$$

le nombre entier m**) étant pair (0 inclus) ou impair, selon que b est nég. ou positif,

$$=\sqrt{\frac{a}{3}}\cdot\left\{\left(\cos\frac{m\pi}{3}\pm i.\sin\frac{m\pi}{3}\right)\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cos\frac{m\pi}{3}\pm i.\sin\frac{m\pi}{3}}\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\alpha^2-1}}\right\},$$

(savoir, le même signe avant la lettre i dans les deux termes);

c. à dire, dans le cas de b négatif [puisque alors

$$\cos\frac{m\pi}{3}\pm i.\sin\frac{m\pi}{3}\ \text{est}=((1)))^{\frac{1}{3}},$$

dont on obtient les trois valeurs en posant successivement $m=0$ et $=2$], les trois racines ordinaires:

(3″) $\qquad x_1=\mathrm{U}+\mathrm{V},\quad x_2=\beta\mathrm{U}+\beta^2\mathrm{V},\quad x_3=\beta^2\mathrm{U}+\beta\mathrm{V},$

---

*) Voir p. ex. les Actes de l'Acad. 1847., pag. 292.

**) On conçoit bien que l'on peut n'avoir égard ici aux valeurs négatives de m, vu qu'en effet les deux expressions doubles $\cos(a\pm b)$ et $\cos(-a\pm b)$ n'indiquent que le même, l'une et l'autre.

1, β, β^2 désignant les trois valeurs de l'expression $((1))^{\frac{1}{3}}$, et, de plus,

$$U=\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}},\qquad V=\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\alpha^2-1}},$$

$$\alpha=-\frac{\frac{1}{2}b}{\{(\frac{1}{3}a)^{\frac{3}{2}}},$$

et enfin, dans le cas de b positif [puisque alors

$$\cos\frac{m\pi}{3}\pm i.\sin\frac{m\pi}{3}\ \text{est}\ =((-1))^{\frac{1}{3}}$$

ou, ce qui revient au même, $=-((1))^{\frac{1}{3}}$], les mêmes racines affectées par le signe minus.

3.).

a étant négatif $(=-A)$,

comme on peut alors, pour plus de simplicité, présenter la formule (3) sous la forme

$$x=2i\sqrt{\frac{A}{3}}\cdot\cos\{\tfrac{1}{3}\arccos((\gamma i))\},$$

$$\gamma\ \text{désignant}\ -\frac{\frac{1}{2}b}{(\frac{1}{3}A)^{\frac{3}{2}}},$$

et que l'on a, en outre,

$$\arccos((\gamma i))=\arccos((1))\pm\left[\frac{\pi}{2}-i.\log(\gamma+\sqrt{\gamma^2+1})\right]^{*)},$$

il en résulte qu'en effet la formule (3) donne, dans ce cas,

$$x=2i\sqrt{\frac{A}{3}}\cdot\cos\left\{\frac{2k\pi}{3}\pm\left[\frac{\pi}{6}-i.\log\sqrt[3]{\gamma+\sqrt{\gamma^2+1}}\right]\right\}$$

$$=i\sqrt{\frac{A}{3}}\cdot\left\{(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})(\cos\frac{2k\pi}{3}\pm i\sin\frac{2k\pi}{3})\sqrt[3]{\gamma+\sqrt{\gamma^2+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})(\cos\frac{2k\pi}{3}\pm i\sin\frac{2k\pi}{3})}\sqrt[3]{-\gamma+\sqrt{\gamma^2+1}}\right\},$$

---

*) Voir p. ex. les Actes de l'Acad. 1847., pag. 293.

(savoir, le même signe avant la lettre i dans les deux termes),

ou **bien**, i étant $= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$:

$$x = \sqrt{\frac{A}{3}} \cdot \left\{ \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{3} \pm i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\sqrt[3]{\gamma + \sqrt{\gamma^2+1}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{3} \pm i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)}\sqrt[3]{-\gamma + \sqrt{\gamma^2+1}} \right\};$$

par **conséquent**, si l'on observe en outre qu'en effet

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

est une des valeurs de l'expression $((1))^{\frac{1}{3}}$ et, par suite,

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{3} \pm i\sin\frac{2k\pi}{3}\right) = ((1))^{\frac{1}{3}},$$

on retrouve, aussi dans ce dernier cas, les formes ordinaires (3'') des racines, y étant toutefois

$$U = \left(\frac{A}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\gamma + \sqrt{\gamma^2+1}}, \quad V = \left(\frac{A}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{-\gamma + \sqrt{\gamma^2+1}},$$

$$\gamma = -\frac{\frac{1}{2}b}{(\frac{1}{3}A)^{\frac{3}{2}}}.$$

XXI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Lehrsatz.

Von dem Herrn Prof. Dr. Schlömilch zu Dresden.

Es mögen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots\ldots$ wesentlich positive Grössen bezeichnen, die ins Unendliche abnehmen, so dass $\mathrm{Lim}\,\varrho_n = 0$ ist für $n = \infty$; dann gilt folgendes Theorem:

Wenn von den beiden unendlichen Reihen

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots\ldots$$

$$\varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 + \ldots\ldots$$

die erste divergirt, die zweite aber convergirt, so ist immer:

$$1 = \varrho_0 + (1-\varrho_0)\varrho_1 + (1-\varrho_0)(1-\varrho_1)\varrho_2 + (1-\varrho_0)(1-\varrho_1)(1-\varrho_2)\varrho_3 + \ldots\ldots$$

So findet man z. B. für

$$\varrho_0 = \frac{1}{2},\ \varrho_1 = \frac{1}{3},\ \varrho_2 = \frac{1}{4},\ \varrho_3 = \frac{1}{5},\ \ldots\ldots$$

womit die obigen Bedingungen erfüllt sind:

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots\ldots$$

was bekanntlich richtig ist.

Lehrsatz.

Von dem Herrn Prof. Dr. Schlömilch zu Dresden.

Die Summe der endlichen Reihe

$$1+\frac{m-1}{1}x+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}x^2+\frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3}x^3$$
$$+\frac{(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4}x^4+\ldots.$$

oder

$$1+(m-1)_1x+(m-2)_2x^2+(m-3)_3x^3+\ldots\ldots,$$

worin x eine völlig willkührliche Grösse und m eine ganze positive Zahl bezeichnet, ist:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1+4x}+1}{(\sqrt{1+4x}-1)^m}+(-1)^m\frac{\sqrt{1+4x}-1}{(\sqrt{1+4x}+1)^m}\right]\frac{(2x)^m}{\sqrt{1+4x}}.$$

XXII.

Miscellen.

In dem in vielen Beziehungen ausgezeichneten Werke des Herrn Professor **Doppler** in Wien: „**Versuch einer Erweiterung der analytischen Geometrie als Grundlage eines neu einzuführenden Algorithmus. Prag. 1843. 4.**", welches nicht so viele Verbreitung gefunden zu haben scheint, wie es jedenfalls sehr verdient, findet sich auf Seite 138. folgende gelegentliche Bemerkung, die ich zu weiterer Bekanntwerdung mir hier mitzutheilen erlaube. G.

Bekanntlich haben schon **Euler**, **Lagrange** und Andere allgemeine Vorschriften zur Auffindung rectificabler Curven gegeben. Da es mir aber scheint, als ob die nachfolgende von den bekannten wesentlich verschieden wäre, so wird man es entschuldigen, wenn ich sie hier in Kürze anführe. Ist $\varphi(x)$ eine solche Function, dass sowohl $\varphi(x)dx$ als auch $\frac{dx}{\varphi(x)}$, d. h. deren reziproker Werth, integrabel ist: so ist die Curve, deren Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}\int \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{\varphi(x)}$$

ist, jederzeit rectificabel, und die Länge eines beliebigen Stückes davon liefert der Ausdruck

$$\lambda = {}^1/_2 \int \varphi(x)\,dx + {}^1/_2 \int \frac{dx}{\varphi(x)}\,.$$

Ist z. B.

$$\varphi(x) = 3x - 5\,,$$

so hat man wegen

$$\int (3x-5)dx = {}^3/_2 x^2 - 5x + C$$

und

$$\int \frac{dx}{3x-5} = {}^1/_3\, \mathrm{l}\,(3x-5)$$

und daher

$$y = {}^3/_4 x^2 - {}^5/_2 x - {}^1/_6\, \mathrm{l}\,(3x-5) + C,$$

eine solche Curve und ihr allgemeines Integral des Bogens:

$$\lambda = {}^3/_4 x^2 - {}^5/_2 x + {}^1/_6\, \mathrm{l}\,(3x-5) + C.$$

Oder es sei

$$\varphi(x) = \sin x\,,$$

mithin

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

und

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \mathrm{l}\ \mathrm{tang}\ {}^1/_2 x\,;$$

daher ist die rectificable Curve

$$y = {}^1/_2 \mathrm{l}\,\mathrm{tang}\ {}^1/_2 x + \cos x + C.$$

und

$$\lambda = {}^1/_2 \mathrm{l}\,\mathrm{tang}\ {}^1/_2 x - \cos x + C.$$

Oder

$$\varphi(x) = \sqrt{px}\,,$$

also

$$\int dx \sqrt{px} = {}^2/_3 \sqrt{p}\,.\,x^{3/2}$$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt{px}} = 2\sqrt{\frac{x}{p}},$$

und somit die rectificable Curve

$$y = {}^2\!/_3 \sqrt{p} . x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\frac{x}{p}}$$

und

$$\lambda = {}^2\!/_3 \sqrt{p} . x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\frac{x}{p}}.$$

In Nr. 183. und Nr. 184. (S. 137.) der Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern theilt Herr R. Wolf Folgendes über Maupertuis und Voltaire mit, die bekanntlich gegen einander sehr feindlich gesinnt waren:

Maupertuis starb erst zwei Jahre nach Samuel König, nämlich am 27. Juli 1759, und zwar zu Basel in den Armen Johannes II. Bernoulli. Während er im Todeskampfe lag, kam auch Voltaire nach Basel, und liess Bernoulli bitten, ihn im Gasthofe zu besuchen. Dieser erzählte ihm von dem Zustande Maupertuis, und seinem sehnlichen Wunsche, sich noch mit Voltaire zu versöhnen; aber Voltaire entschuldigte sich mit seiner schwachen Gesundheit, und statt den Nagel zu bedauern, den er durch seinen Doctor Akakia Maupertuis früher in den Todtenbaum geschlagen, liess der giftige Mann als Antwort auf die Einladung zur Versöhnung einen zweiten folgen. Er fand nämlich in seinem Gasthofe ein Bildniss von Maupertuis mit den Versen:

Le globe mal connu, qu'il a sçu mesurer,
Devient un monument où sa gloire se fonde;
Son sort est de fixer la figure du monde,
De lui plaire et de l'éclairer;

welche er ihm selbst in den Zeiten ihrer Freundschaft zu diesem Zwecke geschrieben hatte. Diese Verse verdrossen ihn jetzt, und er schrieb auf die Rückseite des Bildes die neuen Verse:

Pierre Moreau veut toujours qu'on le loue,
Pierre Moreau ne s'est point démenti:

Par moi, dit-il, le monde est applati....
Rien n'est plus plat, tout le monde l'avoue.

Dieses so von Voltaire boshaft besudelte Bildniss soll noch jetzt auf der Basler Bibliothek aufbewahrt werden.

Ueber Euler's ungemein grosse Thätigkeit äussert Herr R. Wolf in den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern (Nro. 201. 202. S. 53.) sich folgendermassen:

„Wie Euler in 56 Jahren (auch mit aller Hülfe, welche ihm Fuss, Kraft, etc. während seiner 17jährigen Blindheit mit wahrer Aufopferung leisteten) 32 Quartbände und 13 Octavbände selbstständiger Werke, — daneben gegen 700 zum Theil sehr grosse, mit den tiefsinnigsten Speculationen und Rechnungen angefüllte, und alle Theile der reinen und angewandten Mathematik beschlagende Abhandlungen, welche in den verschiedenen academischen Sammlungen abgedruckt wurden, — und dann noch eine Menge erst gegenwärtig zur Publication geordnete Abhandlungen schreiben konnte, so dass der jüngere Fuss in seiner „Nachricht über eine Sammlung unedirter Handschriften Leonhard Eulers und über die begonnene Gesammtausgabe seiner kleineren Schriften" die Anzahl aller gedruckten und ungedruckten Schriften Eulers zu 809 Nummern angiebt, die in einer Gesammtausgabe in Quart mindestens 2000 Druckbogen einnehmen würden, ist bereits fast unbegreiflich. Wie aber Euler neben dieser schriftstellerischen Thätigkeit noch Zeit fand, als Lehrer und Erzieher zu wirken, — geographische Arbeiten, Nivellements etc. zu beaufsichtigen, Lotterien und Finanzprojecte zu prüfen, — Inschriften auf Medaillen auszudenken, — Unterhandlungen mit fremden Gelehrten zu führen etc., und doch weder eine grosse wissenschaftliche Correspondenz, noch die Lectur wissenschaftlicher und politischer Bücher und Blätter, noch Clavier- und Schachspiel, noch seine Familie und namentlich die Leitung einer allabendlichen Hausandacht im Mindesten zu vernachlässigen, ist wahrhaft erstaunenswerth, und man würde es nicht glauben, wenn nicht alle seine Biographien thatsächliche Belege dafür anführten. Und doch schloss sich Euler den vielen Besuchern, die oft aus weiter Ferne zuströmten, nicht ab, und fand immer Zeit Jedem zu dienen, der sich mündlich und schriftlich an ihn wandte, — obschon die Zeit für ihn so schnell ablief als für Andere. Möchte Eulers Beispiel Alle beschämen, welche sich immer über Mangel an Zeit beklagen, — namentlich wenn das Anliegen keine goldene Rückwand bietet."

Der berühmte Daniel Bernoulli fuhr einmal mit einem Herrn Trant, Académicien-botaniste de Paris, im Wagen, ohne dass beide sich kannten. In Folge eines gelehrten Gespräches, das sich zwischen ihnen entspann, fragte Hr. Trant seinen Gefährten, wie er heisse. „Daniel Bernoulli," war die Antwort. Herr Trant glaubte vexirt zu werden, und antwortete: „Und ich heisse Isaak Newton." Bernoulli bewies ihm nun durch Adressen von Briefen, die er bei sich trug, dass er nicht gescherzt habe, und nun gab sich auch Herr Trant als Herr Trant zu erkennen.

Druckfehler.

Theil XV. Seite III. (im Inhaltsverzeichniss) Z. 1. v. u. statt „Kegelsegment" s. m. „Kugelsegment."

Theil XVII. S. 221. Z. 3. v. u. in der Note statt „Summe" setze man „Differenz."

XXIII.

Ueber das katoptrische und dioptrische Beleuchtungssystem für Leuchtthürme.

Von
dem Herausgeber.

I.

Einleitung.

Die ältesten Leuchthürme wurden wahrscheinlich bloss durch freie Feuer erleuchtet, ohne Anwendung irgend eines besonderen optischen Apparats. Der berühmteste Leuchthurm des Alterthums auf der Halbinsel Pharos*) vor dem Hafen von Alexandrien, welcher im Jahre 283 v. Chr. G. von Sostratus erbaut wurde und 531 Fuss hoch war, wurde wahrscheinlich durch ein blosses Holzfeuer beleuchtet, das 14700 Rheinländische Ruthen weit sichtbar gewesen sein soll. Freilich hat man aus einer Stelle des Plinius, wo derselbe von der Verwechslung des entfernten Feuers mit dem Lichte eines Sterns spricht, schliessen wollen, dass schon damals Lampen gebraucht wurden, doch ist so wenig Zusammenhängendes und Zuverlässiges über dieses von den Alten für ein Weltwunder gehaltene Gebäude bekannt, dass sich darüber etwas Gewisses nicht sagen lässt. Der Thurm war aus einem weissen sehr harten Steine erbaut, und mag 1600 Jahre gestanden haben. Die französischen Gelehrten, welche Napoleon nach Aegypten begleiteten, berichten in der „Description de l'Egypte", dass noch einige Pfeiler des Thurms, vielleicht die Reste eines Theiles der Gründungen oder Vergrösserungen des Plateau's, auf welchem das Gebäude stand, bei ruhigem Meere unter dem Wasser sichtbar sind**).

---

*) Jetzt Faxillon.

**) Ich entlehne diese Notizen aus dem Werke: Ueber Leuchtthürme. Nach englischen, französischen und deutschen Quellen bearbeitet von A. Hess, Ingenieur in Göttingen. Berlin 1851. S. 11. Nach der Encyclopédie méthodique. Ma-

Wenn man einen besonderen optischen Apparat in Anwendung bringt, so muss dessen Einrichtung immer auf das Princip gegründet werden, dass er alle von einem leuchtenden Punkte, etwa von einer recht zweckmässig eingerichteten Lampe, ausgehende Lichtstrahlen entweder durch Reflexion oder durch Refraction in eine solche Lage bringt, dass dieselben sämmtlich nach parallelen Richtungen fortgehen, und natürlich durch eine geeignete Stellung des Apparats auf jeden beliebigen Punkt, der erleuchtet werden soll, gerichtet werden können.

Die katoptrischen Apparate bestehen allgemein aus parabolischen Hohlspiegeln, in deren Brennpunkte sich die Lampe befindet, und gründen sich auf den bekannten Satz von der Parabel, dass jeder von ihrem Brennpunkte ausgehende Radius vector gegen die Parabel unter demselben Winkel geneigt ist, wie die durch den Punkt, in welchem die Parabel von dem Radius vector getroffen wird, mit der Axe der Parabel gezogene Parallele, welcher Satz eigentlich nur ein besonderer Fall des bekannten Satzes von der Ellipse ist, dass alle aus dem einen der beiden Brennpunkte einer Ellipse ausgehende Vectoren von der Ellipse nach dem bekannten katoptrischen Grundgesetze so reflectirt werden, dass sie in dem anderen Brennpunkte der Ellipse sich sämmtlich wieder mit einander vereinigen. Wer zuerst parabolische Spiegel zur Beleuchtung der Leuchtthürme angewandt hat, ist nicht genau bekannt; nach William Hutchinson sollen sie schon im Jahre 1763 bei vier Leuchtfeuern zu Bidstone und Hoylake in Anwendung gebracht worden sein; in Frankreich soll sie Teulere zuerst im Jahre 1783 empfohlen haben, und von dem berühmten Borda wurden aus plattirtem Kupferblech verfertigte Reflectoren auf dem Leuchtthurme von Cordouan am Ausflusse der Garonne angeordnet. Es kann hier natürlich nicht meine Absicht sein, die oben erwähnten allgemein bekannten Sätze von den Kegelschnitten zu beweisen und näher zu erläutern. Es entsteht aber die in mathematischer Beziehung interessante Frage von allgemeiner Natur, ob die Ellipse die einzige Curve ist, welche die Eigenschaft hat, alle von einem Punkte ausgehende Strahlen durch Reflexion nach dem bekannten katoptrischen Grundgesetze wieder in einem und demselben Punkte zu vereinigen, oder ob es nicht noch andere diese Eigenschaft besitzende Curven giebt. Da mir nicht bekannt ist, dass diese Frage schon völlig genügend beantwortet worden sei, so werde ich im Folgenden ganz im Allgemeinen eine vollständige Beantwortung derselben zu geben versuchen, was in dieser Abhandlung mein einziger Zweck bei der Betrachtung des katoptrischen Beleuchtungssystems ist, da alles Uebrige, was über dieses System zu bemerken wäre, allgemein bekannt ist, und ich dergleichen bekannte Dinge hier nicht wiederholen will.

Dioptrische Beleuchtungsapparate sind zwar schon im Jahre 1773 von Condorcet, im Jahre 1811 von Brewster empfohlen worden, aber doch erst in Anwendung gekommen, als der berühmte Fresnel im Jahre 1822 seine sogenannten Polyzonal-

---

rine. T. III. Art. Phare. p. 83. soll dieser Leuchtthurm in dem Jahre der Welt 470 von dem Könige Ptolemäus von Aegypten erbauet worden sein.

Linsen erfand. Fresnel gab in diesem Jahre über sein neues Beleuchtungssystem eine jetzt selten gewordene besondere Schrift unter dem folgenden Titel heraus: Mémoire sur un nouveau système d'éclairage des phares; par M. A. Fresnel, Ingénieur au corps Royal des ponts et chaussées. Paris. 1822. 4. Diese Schrift enthält aber nicht das Geringste über die mathematische Theorie der Polyzonal-Linsen, so instructiv sie auch übrigens in anderer Rücksicht, namentlich in Bezug auf das eigentlich Praktische der Beleuchtung ist. Eine andere Abhandlung von Fresnel soll sich in den Schriften der Société philomatique. Année 1822. p. 123. befinden, welche wahrscheinlich mehr über die mathematische Theorie enthalten wird, die ich mir aber bis jetzt nicht habe verschaffen können. In den physikalischen Lehrbüchern, auch in dem Treatise on Optics by Brewster. New edition. London. 1831. p. 323., finden sich nur ganz oberflächliche Bemerkungen über die Polyzonal-Linsen, und selbst in der neuen Ausgabe des Gehler'schen physikalischen Wörterbuchs kommt über dieselben nichts weiter vor, als die ganz kurze und wenig genügende Notiz im Artikel Brennglas. Thl. I. S. 1209. Die neuerlich erschienene, schon oben erwähnte Schrift: Ueber Leuchtthürme von A. Hess. Berlin. 1851. 4. liefert allerdings die mathematische Theorie dieser Linsen mit der ausdrücklichen Bemerkung (S. 48.), dass die entwickelten Formeln von Fresnel herrühren. Die Schrift, aus welcher Herr Hess seine mathematische Theorie geschöpft hat, ist aber, wie es wenigstens scheint, das wichtige Werk: Account of the Skerryvore Lighthouse, with Notes on the illumination of Lighthouses. Edinburgh. 1848. von Alan Stevenson über den berühmten Leuchtthurm auf dem Skerryvore Felsen auf der Westseite von Schottland, welcher von dem berühmten Verfasser des Werks im Jahre 1838 erbauet wurde, nachdem schon früher Robert Stevenson den Skerryvore Rock mehrmals auf amtlichen Reisen besichtigt hatte. Die von Herrn Hess gegebene mathematische Theorie leidet aber an grosser Unklarheit, so viel sich urtheilen lässt, auch an Ungenauigkeit, so dass man in der That fast zweifelhaft wird, ob Herr Hess diese Theorie selbst vollständig verstanden hat; und, so gern ich auch das Verdienst der Schrift in praktischer Beziehung anerkenne, da in derselben Vieles gesammelt ist, was ohne dieselbe der Architekt in vielen anderen, oft schwer zu erhaltenden Werken mühsam zusammensuchen müsste, so glaube ich doch nicht, dass die gegebene mathematische Theorie irgend wie geeignet ist, ein wirklich klares Verständniss der Sache zu vermitteln. Hierdurch bin ich, für die Sache selbst mich lebhaft interessirend, veranlasst worden, zunächst eine strenge mathematische Theorie der Fresnel'schen Haupt-Polyzonal-Linsen mit aller mir möglichen Deutlichkeit im Folgenden zu entwickeln, um so mehr, da sich in den gangbaren physikalischen Werken gar nichts irgend wie Genügendes über diesen Gegenstand findet. Ausser der Theorie der Haupt-Polyzonal-Linsen, die übrigens auch, wie wir späterhin sehen werden, als secundärer Beleuchtungsapparat benutzt zu werden pflegen, werde ich auch noch die Theorie der secundären Beleuchtungsapparate entwickeln, die jetzt wohl den meisten Beifall gefunden haben.

II.

Das katoptrische Beleuchtungssystem.

Nach dem, was in der Einleitung gesagt worden ist, wollen wir also jetzt die folgende Aufgabe aufzulösen versuchen:

Die Curven zu bestimmen, welche die Eigenschaft besitzen, dass sie alle aus einem und demselben Punkte ausgehende Lichtstrahlen nach dem bekannten katoptrischen Gesetze so reflectiren, dass sich dieselben nach der Reflexion wieder sämmtlich in einem und demselben Punkte vereinigen.

Wir legen unserer Betrachtung ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xy zu Grunde, und nehmen die gerade Linie, welche durch den leuchtenden Punkt, von welchem die sämmtlichen Strahlen ausgehen, und durch den Punkt, in welchem sich dieselben nach der Reflexion an der gesuchten Curve wieder sämmtlich mit einander vereinigen, geht, als Axe der x an. Dies vorausgesetzt, seien $a,0$ die Coordinaten des Punktes, von dem die sämmtlichen Strahlen ausgehen, und $b,0$ seien die Coordinaten des Punktes, in welchem dieselben nach der Reflexion an der gesuchten Curve sich sämmtlich wieder mit einander vereinigen. Ferner seien x, y die Coordinaten irgend eines beliebigen Punktes in der gesuchten Curve. Die Gleichung der Normale der gesuchten Curve in dem Punkte (xy) ist, wenn wir die laufenden Coordinaten durch u, v bezeichnen, nach den Lehren der höheren Geometrie:

$$1)\qquad v-y=-\frac{\partial x}{\partial y}(u-x),$$

und die Gleichungen des die gesuchte Curve in dem Punkte (xy) treffenden einfallenden Strahls und des von derselben in diesem Punkte reflectirten Strahls sind:

$$2)\qquad \left\{\begin{array}{l} v-y=\dfrac{y}{x-a}(u-x), \\[2ex] v-y=\dfrac{y}{x-b}(u-x). \end{array}\right.$$

Also haben wir, da diese Strahlen nach dem katoptrischen Grundgesetze gegen die Normale in dem Punkte (xy) unter gleichen Winkeln geneigt sind, nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie die Gleichung:

$$\frac{\frac{y}{x-a}+\frac{\partial x}{\partial y}}{1-\frac{y}{x-a}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}}=\pm\frac{\frac{y}{x-b}+\frac{\partial x}{\partial y}}{1-\frac{y}{x-b}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}}.$$

Nimmt man in dieser Gleichung das obere Zeichen, so kommt:

$$\frac{y}{x-a}+\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x-b}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{y}{x-b}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2$$
$$=\frac{y}{x-b}+\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x-b}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{y}{x-a}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2,$$

woraus sich

$$\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x-b}=-\left(\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x-b}\right)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2,$$

also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2=-1$$

ergiebt, was offenbar ungereimt ist. Daher muss man in der obigen Gleichung das untere Zeichen nehmen, und erhält also die folgende Gleichung:

$$3)\qquad \frac{\frac{y}{x-a}+\frac{\partial x}{\partial y}}{1-\frac{y}{x-a}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}}=-\frac{\frac{y}{x-b}+\frac{\partial x}{\partial y}}{1-\frac{y}{x-b}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{y}{x-a}+\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x-b}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{y}{x-b}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2$$
$$=-\frac{y}{x-b}-\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x-b}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{y}{x-a}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2,$$

also, wie man leicht findet:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2-2\frac{1-\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x-b}}{\frac{y}{x-a}+\frac{y}{x-b}}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=1.$$

Löst man diese quadratische Gleichung in Bezug auf den in ihr vorkommenden Differentialquotienten als unbekannte Grösse auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man:

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{1-\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x-b}\pm\sqrt{\left\{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)\right\}^2}}{\frac{y}{x-a}+\frac{y}{x-b}}$$

oder

4)

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{y}{x-a}+\frac{y}{x-b}}{1-\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x-b}\pm\sqrt{\left\{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2\right\}}}$$

Man setze jetzt

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{y}{x-a},\quad \operatorname{tang}\psi=\frac{y}{x-b}$$

und nehme φ, ψ zwar positiv und negativ, absolut aber nicht grösser als 90°, was immer verstattet ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\psi}{1-\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi\pm\sec\varphi\sec\psi},$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi+\psi)\pm1}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial\operatorname{tang}\varphi}{\partial x}=\frac{(x-a)\frac{\partial y}{\partial x}-y}{(x-a)^2},\quad \frac{\partial\operatorname{tang}\psi}{\partial x}=\frac{(x-b)\frac{\partial y}{\partial x}-y}{(x-b)^2};$$

also

$$\frac{\partial\operatorname{tang}\varphi}{\partial\operatorname{tang}\psi}=\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^2\cdot\frac{(x-a)\frac{\partial y}{\partial x}-y}{(x-b)\frac{\partial y}{\partial x}-y}$$

oder

$$\frac{\partial \tang\varphi}{\partial \tang\psi}=\frac{x-b}{x-a}\cdot\frac{\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{y}{x-a}}{\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{y}{x-b}},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{\partial \tang\varphi}{\partial \tang\psi}=\frac{\tang\varphi}{\tang\psi}\cdot\frac{\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi+\psi)\pm 1}-\tang\varphi}{\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos(\varphi+\psi)\pm 1}-\tang\psi},$$

also

$$\frac{\partial \tang\varphi}{\partial \tang\psi}$$

$$=\frac{\tang\varphi}{\tang\psi}\cdot\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\cdot\frac{\sin(\varphi+\psi)\cos\varphi-\cos(\varphi+\psi)\sin\varphi\mp\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)\cos\psi-\cos(\varphi+\psi)\sin\psi\mp\sin\psi},$$

d. i.

$$\frac{\partial \tang\varphi}{\partial \tang\psi}=\frac{\sin\varphi\cos\psi^2}{\sin\psi\cos\varphi^2}\cdot\frac{\sin\psi\mp\sin\varphi}{\sin\varphi\mp\sin\psi};$$

also

$$\frac{\partial \tang\varphi}{\partial \tang\psi}=\mp\frac{\sin\varphi\cos\psi^2}{\sin\psi\cos\varphi^2}.$$

Aber

$$\partial \tang\varphi=\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2},\quad \partial \tang\psi=\frac{\partial\psi}{\cos\psi^2};$$

also

$$\frac{\partial \tang\varphi}{\partial \tang\psi}=\frac{\cos\psi^2}{\cos\varphi^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\psi},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=\mp\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

oder

$$\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi}=\mp\frac{\partial\psi}{\sin\psi}.$$

Integrirt man nun auf beiden Seiten, so ergiebt sich:

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi} = C \mp \int \frac{\partial\psi}{\sin\psi}.$$

Setzt man

$$C = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.c^2,$$

was verstattet ist, weil $\frac{1}{2}\mathrm{l}.c^2$ jeden reellen positiven und negativen Werth haben kann, $c=0$ jedoch offenbar ausgeschlossen werden muss, insofern C einen endlichen völlig bestimmten reellen Werth haben soll; so erhält man aus dem Obigen nach einer bekannten Formel der Integralrechnung:

$$\mathrm{l}.\tang\frac{1}{2}\varphi^2 = \mathrm{l}.c^2 \mp \mathrm{l}.\tang\frac{1}{2}\psi^2$$

oder

$$l.\tang\frac{1}{2}\varphi^2 = \begin{cases} \mathrm{l}.c^2\cot\frac{1}{2}\psi^2 \\ \mathrm{l}.c^2\tang\frac{1}{2}\psi^2 \end{cases}$$

folglich

$$\tang\frac{1}{2}\varphi^2 = \begin{cases} c^2\cot\frac{1}{2}\psi^2 \\ c^2\tang\frac{1}{2}\psi^2 \end{cases}$$

oder

$$\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \begin{cases} c^2\dfrac{1+\cos\psi}{1-\cos\psi} \\ c^2\dfrac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi} \end{cases}$$

d. i.

$$\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = c^2\frac{1\pm\cos\psi}{1\mp\cos\psi}$$

oder

$$\frac{\sqrt{1+\tang\varphi^2}-1}{\sqrt{1+\tang\varphi^2}+1} = c^2\frac{\sqrt{1+\tang\psi^2}\pm 1}{\sqrt{1+\tang\psi^2}\mp 1},$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}-1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}+1}=c^2\,\frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}\pm 1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}\mp 1},$$

oder:

$$c^2=\frac{\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}-1\right\}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}\mp 1\right\}}{\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}+1\right\}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}\pm 1\right\}}.$$

Legen wir nun den Anfang der Coordinaten in den Punkt, in welchem die Axe der x von der gesuchten Curve geschnitten wird*), so ist für $x=0$ auch $y=0$, und nähme man nun in der vorstehenden Gleichung die oberen Zeichen, so erhielte man $c^2=0$, also $c=0$, was nach dem Obigen nicht zulässig ist; daher muss man in der in Rede stehenden Gleichung die unteren Zeichen nehmen, wodurch man die Gleichung

$$5)\qquad c^2=\frac{\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}-1\right\}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}+1\right\}}{\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}+1\right\}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}-1\right\}}$$

erhält. Aus dieser Gleichung ergiebt sich, weil für $x=0$ auch $y=0$ ist:

$$c^2=\frac{0}{0}.$$

Nun ist aber nach dem Binomischen Lehrsatze für der Null sehr nahe kommende Werthe von $\frac{y}{x-a}$ und $\frac{y}{x-b}$:

*) Gäbe es keinen solchen Punkt, so würde sich dies von selbst als ein Ausnahmefall herausstellen.

$$c^2 = \frac{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{y}{x-a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{y}{x-a}\right)^4 + \ldots\right\}\left\{2 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{y}{x-b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{y}{x-b}\right)^4 + \ldots\right\}}{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{y}{x-b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{y}{x-b}\right)^4 + \ldots\right\}\left\{2 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{y}{x-a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{y}{x-a}\right)^4 + \ldots\right\}}$$

$$= \frac{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \frac{1}{(x-a)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \frac{y^2}{(x-a)^4} + \ldots\right\}\left\{2 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{y}{x-b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{y}{x-b}\right)^4 + \ldots\right\}}{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \frac{1}{(x-b)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \frac{y^2}{(x-b)^4} + \ldots\right\}\left\{2 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{y}{x-a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{y}{x-a}\right)^4 + \ldots\right\}},$$

also, weil gleichzeitig $x=0$, $y=0$ ist:

$$c^2=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Folglich ist nach 5)

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}-1\right\}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}+1\right\}}{\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}+1\right\}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}-1\right\}}$$

oder

6) $$a^2\frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}-1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}+1}=b^2\frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}-1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}+1},$$

welches die Gleichung der gesuchten Curve ist.

Man kann diese Gleichung auch auf folgende Art darstellen:

$$a^2\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}-1\right\}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}+1\right\}$$
$$=b^2\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}+1\right\}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}-1\right\}.$$

Führt man aber die Multiplicationen aus, so erhält man:

$$0=(a^2+b^2)\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}\right\}$$
$$-(a^2-b^2)\left\{1-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}\right\}$$

oder:

$$(a^2+b^2)\left\{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}\right\}$$
$$=(a^2-b^2)\left\{1-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2}\right\}.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhält man nach leichter Rechnung die Gleichung:

$$4a^2b^2\{2+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2\}-(a^2-b^2)^2\cdot\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\cdot\left(\frac{y}{x-b}\right)^2$$
$$=8a^2b^2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2};$$

und wenn man nun wieder auf beiden Seiten quadrirt, so ergiebt sich nach leichter Rechnung die Gleichung:

$$0=\quad 16a^4b^4\left\{\left(\frac{y}{x-a}\right)^4\left[1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2\right]+\left(\frac{y}{x-b}\right)^4\left[1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\right]\right\}$$
$$-8a^2b^2(a^4+b^4)\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\left(\frac{y}{x-b}\right)^2\left\{\left[1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\right]+\left[1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2\right]\right\}$$
$$+(a^2-b^2)^4\cdot\left(\frac{y}{x-a}\right)^4\left(\frac{y}{x-b}\right)^4$$

oder

$$0=\quad 8a^2b^2\left(\frac{y}{x-b}\right)^2\{(a^4+b^4)\left(\frac{y}{x-a}\right)^2-2a^2b^2\left(\frac{y}{x-b}\right)^2\}\{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\}$$
$$+8a^2b^2\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\{(a^4+b^4)\left(\frac{y}{x-b}\right)^2-2a^2b^2\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\}\{1+\left(\frac{y}{x-b}\right)^2\}$$
$$-(a^2-b^2)^4\cdot\left(\frac{y}{x-a}\right)^4\left(\frac{y}{x-b}\right)^4,$$

oder

$$(a^2-b^2)^4y^4$$
$$=\quad 8a^2b^2\{(a^4+b^4)(x-b)^2-2a^2b^2(x-a)^2\}\{(x-a)^2+y^2\}$$
$$+8a^2b^2\{(a^4+b^4)(x-a)^2-2a^2b^2(x-b)^2\}\{(x-b)^2+y^2\},$$

welche Gleichung man leicht auf die folgende Form bringt:

$$y^4-\frac{8a^2b^2\{(x-a)^2+(x-b)^2\}}{(a^2-b^2)^2}y^2$$
$$=\frac{16a^2b^2\{a^2(x-a)^2-b^2(x-b)^2\}\{a^2(x-b)^2-b^2(x-a)^2\}}{(a^2-b^2)^4}.$$

Löst man nun diese Gleichung wie eine gewöhnliche quadratische Gleichung auf, so ergiebt sich:

$$y^2=\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\{ab[(x-a)^2+(x-b)^2]\pm(a^2+b^2)(x-a)(x-b)\}.$$

Für $x=0$ erhält man hieraus

$$y^2=\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\{ab(a^2+b^2)\pm ab(a^2+b^2)\},$$

und da nun für $x=0$ auch $y=0$ sein soll, so kann man offenbar bloss das untere Zeichen nehmen, d. h. es ist

$$y^2=\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\{ab[(x-a)^2+(x-b)^2]-(a^2+b^2)(x-a)(x-b)\},$$

oder, wie man leicht findet:

$$7)\qquad y^2=\frac{4ab\{a(x-a)-b(x-b)\}\{b(x-a)-a(x-b)\}}{(a^2-b^2)^2},$$

welches jetzt die Gleichung unserer gesuchten Curve in der einfachsten Gestalt ist.

Man kann diese Gleichung auch auf folgende Art darstellen:

$$8)\quad y^2=\frac{4a}{\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)^2}\left\{\frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\right)-\left(\frac{x}{b}-1\right)\right\}\left\{(x-a)-a\left(\frac{x}{b}-1\right)\right\}.$$

Sollen nun die reflectirten Strahlen sämmtlich der Axe der x parallel sein, so muss b unendlich gross angenommen werden, welches die Gleichung

$$9)\qquad y^2=4ax$$

giebt, und zeigt, dass die Curve eine Parabel mit dem Parameter $4a$ ist, in deren Brennpunkte sich also der leuchtende Punkt befindet, welcher die Strahlen aussendet.

Nimmt man den durch die Coordinaten $\frac{1}{2}(a+b),0$ bestimmten Punkt, welcher in der Axe der x in der Mitte zwischen den beiden durch die Coordinaten $a,0$ und $b,0$ bestimmten Punkten liegt, als Anfang eines neuen dem primitiven parallelen Coordinatensystems an, in welchem wir die Coordinaten auch durch x, y bezeichnen wollen, so muss man in der Gleichung 7) für

$$\left.\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right\}\text{ setzen: }\left\{\begin{matrix}x+\frac{1}{2}(a+b)\\ y\end{matrix}\right.$$

Also muss man für

$$\left.\begin{matrix}x-a\\ x-b\end{matrix}\right\}\text{ setzen: }\left\{\begin{matrix}x-\frac{1}{2}(a-b)\\ x+\frac{1}{2}(a-b)\end{matrix}\right.$$

und für

$$a(x-a)-b(x-b),$$
$$b(x-a)-a(x-b)$$

muss man beziehungsweise setzen:

$$(a-b)\{x-\frac{1}{2}(a+b)\},$$

$$-(a-b)\{x+\frac{1}{2}(a+b)\}.$$

Dadurch wird die Gleichung 7):

$$y^2=-\frac{4ab(a-b)^2\{x-\frac{1}{2}(a+b)\}\{x+\frac{1}{2}(a+b)\}}{(a^2-b^2)^2},$$

d. i.

$$y^2=-\frac{4ab\{x^2-\frac{1}{4}(a+b)^2\}}{(a+b)^2},$$

also

$$10)\qquad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(a+b)^2}+\frac{y^2}{ab}=1.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass die Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, jenachdem a und b gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Nun übersieht man aber auf der Stelle, dass von einer Reflexion im eigentlichen Sinne, so dass nämlich die von dem im ersten Coordinatensysteme durch die Coordinaten a,0 bestimmten Punkte ausgehenden Strahlen nach der Reflexion an der Curve in dem im ersten Coordinatensysteme durch die Co-

ordinaten $b, 0$ bestimmten Punkte wieder zusammenkommen, nur dann die Rede sein kann, wenn a und b gleiche Vorzeichen haben. Daher bleibt uns, ausser der Parabel in dem obigen besonderen Falle, von allen unserer Aufgabe genügenden Curven nur die Ellipse übrig, deren Gleichung nach dem Obigen

$$11)\qquad \left\{\frac{x}{\frac{1}{2}(a+b)}\right\}^2+\left\{\frac{y}{\sqrt{ab}}\right\}^2=1$$

ist. Nehmen wir, was offenbar verstattet ist, der Kürze wegen a und b beide als positiv, so sind $\frac{1}{2}(a+b)$ und $\sqrt{ab}$ die beiden Halbaxen dieser Ellipse, und der Ausgangspunkt und Vereinigungspunkt der Strahlen sind offenbar die beiden Brennpunkte derselben in der Axe $a+b$, weil die Coordinaten des Ausgangspunktes und Vereinigungspunktes im zweiten Systeme nach dem Obigen

$$a-\frac{1}{2}(a+b) \quad \text{und} \quad b-\frac{1}{2}(a+b),$$

d. h.

$$+\frac{1}{2}(a-b) \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}(a-b),$$

also

$$+\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(a+b)\}^2-\{\sqrt{ab}\}^2} \quad \text{und} \quad -\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(a+b)\}^2-\{\sqrt{ab}\}^2}$$

sind.

Unserer Aufgabe genügen also wirklich keine anderen Curven als die Parabel und die Ellipse, erstere in dem aus dem Obigen bekannten besonderen Falle.

III.

Das dioptrische Beleuchtungssystem. Hauptlinsen.

Schon Descartes hat in seiner Dioptrik*) gezeigt, wie elliptisch oder hyperbolisch gekrümmte Linsen zu construiren sind,

---

*) Renati Des Cartes specimina Philosophiae: seu Dissertatio de methodo recte regendae rationis, et veritatis in scientiis investigandae:

welche alle aus einem und demselben Punkte ausgehenden Strahlen so brechen, dass die gebrochenen Strahlen sämmtlich unter einander parallel sind. Haben auch diese Linsen, wahrscheinlich wegen der Schwierigkeit ihrer praktischen Ausführung, eine wirkliche Anwendung nie gefunden, so scheint doch eine kurze Notiz über ihre Construction an diesem Orte nicht ganz unzweckmässig zu sein, welche ich daher jetzt geben will.

In Fig. 1. sei über der Hauptaxe AB mit den Brennpunkten F und f eine Ellipse beschrieben, welche zwei brechende Media, ein äusseres und ein inneres, von einander trennt. Das Brechungsverhältniss für das äussere und das innere Medium sei $n:1$. Diesem Brechungsverhältnisse sei das Verhältniss $AB:Ff$ gleich, so dass, wenn wir die halbe Hauptaxe der Ellipse durch a, ihre Excentricität durch e bezeichnen,

$$a:e=n:1$$

ist. Ist nun MN ein parallel mit der Axe AB einfallender, die Ellipse in N treffender Strahl, so behaupte ich, dass derselbe in N so gebrochen wird, dass der gebrochene Strahl NF durch den Brennpunkt F der Ellipse geht. Um dies zu beweisen, denke man sich die Normale KNL der Ellipse in dem Punkte N gezogen, so halbirt diese Normale nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse den Winkel FNf, und nach einem bekannten geometrischen Satze haben wir also die Proportion

$$NF:Nf=FK:fK,$$

woraus sich

$$NF+Nf:FK+fK=NF:FK,$$

also nach den Eigenschaften der Ellipse

$$2a:2e=a:e=NF:FK,$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$NF:FK=n:1$$

ergiebt. Bezeichnen wir nun den Winkel MNL durch ω, den Winkel FNK durch θ, so ist, weil MN mit AB parallel ist, $\omega=\angle AKN$, also im Dreieck FNK nach einem bekannten trigonometrischem Satze:

$$NF:FK=\sin\omega:\sin\theta,$$

folglich nach dem Obigen

$$\sin\omega:\sin\theta=n:1.$$

Dioptrice et Meteora. Amstelodami. 1672. 4°. Caput octavum. pag. 107.

Ist also ω der Einfallswinkel, so ist θ der Brechungswinkel, woraus mittelst des Vorhergehenden der zu beweisende Satz unmittelbar folgt. Umgekehrt wird also auch jeder aus F ausgehende Strahl FN in N so gebrochen werden, dass der gebrochene Strahl MN der Axe AB der Ellipse parallel ist.

In Fig. 2. sei Alles wie in Fig. 1., nur habe jetzt der einfallende Strahl MN eine solche Lage, dass er, über N hinaus verlängert gedacht, durch den Brennpunkt F der Ellipse geht. Dann ist ganz wie vorher

$$NF:FK=n:1.$$

Bezeichnen wir den Winkel MNL wieder durch ω, und, indem wir uns durch N mit AB die Parallele NF_1 gezogen denken, den Winkel F_1NK durch θ, so ist $\theta=\angle AKN$, also im Dreieck FNK nach einem bekannten trigonometrischen Satze

$$NF:FK=\sin\theta:\sin\omega,$$

folglich nach dem Obigen:

$$\sin\omega:\sin\theta=1:n.$$

Denken wir uns jetzt aber die beiden brechenden Media mit einander verwechselt, so dass das innere und äussere respective das äussere und innere wird, so ist offenbar, wenn ω der Einfallswinkel ist, θ der Brechungswinkel, und der Strahl MN wird also in N nach NF_1 gebrochen, welche letztere Linie nach dem Obigen bekanntlich der Axe AB der Ellipse parallel ist.

Fügt man nun zu dem Vorhergehenden noch die Bemerkung, dass Strahlen, die aus dem Mittelpunkte eines zwei beliebige brechende Media von einander trennenden Kreises auf diesen Kreis fallen, an demselben gar keine Brechung erleiden, weil alle Halbmesser eines Kreises auf demselben senkrecht stehen, so wird ohne weitere Erläuterung unmittelbar die Wirkung der folgenden von Descartes angegebenen Linsen verständlich sein.

In Fig. 3. sei über AB als Hauptaxe die aus Fig. 1. bekannte Ellipse beschrieben. Wird nun aus dem Brennpunkte F als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser, der nur kleiner als FA ist, ein Kreisbogen GH beschrieben, so entsteht durch Umdrehung der Figur um AB eine Linse GAH, welche so beschaffen ist, dass von ihr alle von F ausgehende Strahlen so gebrochen werden, dass alle gebrochenen Strahlen mit AB parallel sind.

Ferner sei in Fig. 4. über AB die aus Fig. 2. bekannte Ellipse, und aus dem Brennpunkte F als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser, der nur grösser als FA ist, ein Kreisbogen GH beschrieben, so entsteht durch Umdrehung der Figur um AB eine Linse GAH, welche so beschaffen ist, dass alle nach F hin convergirenden Strahlen von ihr so gebrochen werden, dass die gebrochenen Strahlen sämmtlich mit AB parallel sind.

In Fig. 5. sei PQ der eine Zweig einer Hyperbel, welcher zwei brechende Media, ein äusseres und ein inneres, deren Brechungsverhältniss $n:1$ ist, von einander trennt. Die Hauptaxe dieser Hyperbel sei AB, und F und f seien ihre beiden Brennpunkte. Dem Verhältnisse $n:1$ sei das Verhältniss $Ff:AB$ gleich, so dass also, wenn wir die halbe Hauptaxe durch a, die Excentricität durch e bezeichnen,

$$e:a=n:1$$

ist. Ist nun FN ein von F ausgehender, die Hyperbel in N treffender Strahl, so behaupte ich, dass derselbe in N so gebrochen wird, dass der gebrochene Strahl NM der Axe AB parallel ist. Ist nämlich KNL die Normale der Hyperbel in N, so ist bekanntlich, wenn NF' die Verlängerung von FN über N hinaus ist, $\angle F'NK=\angle fNK$, also, da NK den Aussenwinkel fNF' des Dreiecks FNf halbirt, nach einem bekannten geometrischen Satze:

$$NF:Nf=FK:fK,$$

folglich

$$NF-Nf:FK-fK=NF:FK,$$

d. i.

$$2a:2e=a:e=NF:FK,$$

und folglich nach dem Obigen

$$NF:FK=1:n.$$

Bezeichnen wir nun den Winkel FNL durch ω, den Winkel MNK durch θ, so ist $\theta=\angle FKN$, und folglich im Dreieck FNK nach einem bekannten trigonometrischen Satze:

$$NF:FK=\sin\theta:\sin\omega,$$

also nach dem Obigen

$$\sin\omega:\sin\theta=n:1.$$

Ist daher ω der Einfallswinkel, so ist θ der Brechungswinkel, womit die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Ist in Fig. 6. nun PQ die aus Fig. 5. bekannte Hyperbel, und steht die gerade Linie GH auf AB senkrecht, so entsteht nach dem Vorhergehenden durch Umdrehung der Figur um AB eine plan-convexe Linse GAH, welche alle von F ausgehenden Strahlen so bricht, dass die gebrochenen Strahlen sämmtlich mit AB parallel sind.

Descartes stellt a. a. O. noch manche andere hierher gehörende Betrachtungen an, die aber zu weit von unserem eigent-

lichen Zwecke entfernt liegen, als dass wir uns hier auf dieselben weiter einlassen sollten, da dergleichen Linsen doch schwerlich jemals praktische Anwendung finden werden.

Wir wollen daher jetzt zu der Theorie der Fresnel'schen Linsen, welche den Hauptgegenstand dieser Abhandlung ausmachen sollen, übergehen, wobei wir wohl als allgemein bekannt voraussetzen dürfen, dass diese Linsen aus einer Linse von der in Fig. 7. im Allgemeinen dargestellten Form in der Mitte, und mehreren dieselbe concentrisch umgebenden kreisförmigen Glasringen bestehen, so dass also ihre Theorie nothwendig in zwei Theile zerfallen muss, nämlich in die Theorie jener Linse in der Mitte und in die Theorie der dieselbe umgebenden Glasringe. Die Theorie der Linse in der Mitte kommt aber wesentlich auf die folgende Aufgabe zurück.

Erste Aufgabe.

In Fig. 8. seien die Linie MM' und die beiden in der auf MM' in G senkrecht stehenden Linie FH liegenden Punkte F und N gegeben; man soll aus einem in der Linie FH liegenden Punkte als Mittelpunkt einen durch den gegebenen Punkt N gehenden Kreisbogen BB' von solcher Beschaffenheit beschreiben, dass ein von F ausgehender, unter dem gegebenen spitzen Winkel i gegen FH geneigter Strahl zuerst bei MM' und dann ein zweites Mal bei BB' so gebrochen wird, dass der bei BB' ausfahrende Strahl der Linie FH parallel ist, wobei wir natürlich voraussetzen, dass ausserhalb der beiden Linien MM' und BB', und zwischen denselben, zwei verschiedene brechende Media, etwa Luft und Glas, liegen.

Auflösung.

Man nehme den gegebenen Punkt F als den Anfang und die gegebene Linie FH als den positiven Theil der Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an. Die positiven y wollen wir auf derselben Seite der Axe der x annehmen, als auf welcher der Winkel i liegend angenommen wird. Dies vorausgesetzt, wollen wir, wenn die Linie MM' von dem aus dem Punkte F ausgehenden Strahle in E getroffen wird,

$$FG=p, \quad GE=q$$

setzen, wo p nach der Voraussetzung gegeben ist, und auch q aus p und dem gegebenen Winkel i leicht mittelst der Formel

$$1) \quad q=p\tan g i$$

berechnet werden kann, so dass wir im Folgenden also auch q als bekannt zu betrachten berechtigt sind. Die erste Coordinate des in der Linie FH, d. h. in der Axe der x, liegen sollenden Mittelpunkts des gesuchten Kreises oder Kreisbogens sei $\mathfrak{r}$, und r sei der Halbmesser desselben, wo r positiv oder negativ sein soll, jenachdem der auf diesen Kreisbogen fallende Strahl dessen concave oder convexe Seite trifft. Denken wir uns nun in E auf MM' das Einfallsloth errichtet, und bezeichnen den Brechungswinkel in E durch α, den reciproken Brechungsexponenten für Luft und Glas aber durch μ, so ist

$$\frac{\sin i}{\sin\alpha}=\frac{1}{\mu},\quad \frac{\sin\alpha}{\sin i}=\mu;$$

also

$$2)\quad \sin\alpha=\mu\sin i,$$

so dass auch α aus den gegebenen Grössen i und μ*) leicht berechnet, und daher im Folgenden als bekannt angenommen werden kann.

Wenn nun der Kreisbogen BB', dessen Bestimmung unsere Aufgabe ist, von dem bei E in MM' gebrochenen Strahle in dem Punkte A getroffen wird, und die Coordinaten dieses Punktes in dem angenommenen Systeme durch p_1, q_1 bezeichnet werden; so ist, eben weil der Punkt dem aus dem Mittelpunkte ($\mathfrak{r}0$) mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreisbogen BB' angehören soll:

$$3)\quad (p_1-\mathfrak{r})^2+q_1{}^2=r^2,$$

und ausserdem hat man offenbar die Gleichung:

$$4)\quad q_1-q=(p_1-p)\tang\alpha.$$

Setzen wir nun

$$5)\quad \sin\theta=\frac{(\mathfrak{r}-p)\sin\alpha+q\cos\alpha}{r},$$

wo der absolute Werth von θ nie grösser als 90° zu nehmen ist, so haben wir, weil der bei A ausfahrende Strahl nach den Bedingungen der Aufgabe mit der Linie FH, d. h. mit der Axe der x, parallel sein soll, nach den von mir früher entwickelten allgemeinen optischen Grundformeln, die für alle optische Untersuchungen die geeignetste Grundlage bilden, wegen welcher ich jedoch hier auf meine „Optischen Untersuchungen. Thl. II. Leipzig. 1847. S. 12." verweisen muss, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\mu=\cos\alpha-\cos(\alpha+\theta)(\cos\theta-\mu\sqrt{1-\frac{\sin\theta^2}{\mu^2}}),$$

---

*) Hess a. a. O. S. 48. setzt $\frac{1}{\mu}=1{,}5$.

$$0=\sin\alpha-\sin(\alpha+\theta)(\cos\theta-\mu\sqrt{1-\frac{\sin\theta^2}{\mu^2}});$$

oder

$$6)\quad\begin{cases}\cos\alpha-\mu=\cos(\alpha+\theta)\,(\cos\theta-\mu\sqrt{1-\frac{\sin\theta^2}{\mu^2}}),\\ \sin\alpha=\sin(\alpha+\theta)\,(\cos\theta-\mu\sqrt{1-\frac{\sin\theta^2}{\mu^2}});\end{cases}$$

also durch Division

$$7)\quad \tang(\alpha+\theta)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\mu}=-\frac{\frac{1}{\mu}\sin\alpha}{1-\frac{1}{\mu}\cos\alpha},$$

mittelst welcher Formel der Winkel θ gefunden werden kann, wenn man bei der Berechnung dieses Winkels nur das Folgende berücksichtigt.

Weil nach dem Obigen bekanntlich

$$-90^0<\theta<+90^0$$

ist, so ist

$$\alpha-90^0<\alpha+\theta<\alpha+90^0,$$

d. i., weil hier offenbar $\alpha<i$, also jedenfalls $\alpha<90^0$ ist:

$$-90^0<\alpha+\theta<+180^0.$$

Daher ist $\alpha+\theta$ immer zwischen -90^0 und $+180^0$ zu nehmen. Ist nun $\tang(\alpha+\theta)$ in 7) positiv, so lässt diese Formel keine Zweideutigkeit bei der Bestimmung von $\alpha+\theta$, und demzufolge auch von θ, zu, weil dann $\alpha+\theta$ nur zwischen 0 und $+90^0$ genommen werden kann. Ist aber $\tang(\alpha+\theta)$ in 7) negativ, so kann $\alpha+\theta$ zwei um 180^0 von einander verschiedene Werthe zwischen -90^0 und $+180^0$ haben, die wir durch

$$\alpha+\theta=\begin{cases}u\\ u+180^0\end{cases}$$

bezeichnen wollen. Der erste Werth giebt $\theta=u-\alpha$, und folglich nach der zweiten der Gleichungen 6):

$$\sin\alpha=\sin u\{\cos(u-\alpha)-\mu\sqrt{1-\frac{\sin(u-\alpha)^2}{\mu^2}}\};$$

der zweite Werth giebt $\theta = 180^0 + (u - \alpha)$, also nach der zweiten der Gleichungen 6):

$$\sin\alpha = -\sin u \{ -\cos(u-\alpha) - \mu \sqrt{1 - \frac{\sin(u-\alpha)^2}{\mu^2}} \},$$

d. i.

$$\sin\alpha = \sin u \{ \cos(u-\alpha) + \mu \sqrt{1 - \frac{\sin(u-\alpha)^2}{\mu^2}} \}.$$

Die beiden Gleichungen

$$\sin\alpha = \sin u \{ \cos(u-\alpha) - \mu \sqrt{1 - \frac{\sin(u-\alpha)^2}{\mu^2}} \},$$

$$\sin\alpha = \sin u \{ \cos(u-\alpha) + \mu \sqrt{1 - \frac{\sin(u-\alpha)^2}{\mu^2}} \}$$

können aber offenbar nicht zugleich erfüllt sein, und man muss also im vorliegenden Falle den zwischen -90^0 und $+180^0$ liegenden Werth von $\alpha + \theta$ nehmen, durch welchen die Gleichung

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + \theta) (\cos\theta - \mu \sqrt{1 - \frac{\sin\theta^2}{\mu^2}})$$

erfüllt wird, so dass folglich bei der Bestimmung des Winkels $\alpha + \theta$, und also auch des Winkels θ, mittelst der Gleichung 7) nie eine Zweideutigkeit bleiben kann, wenn man die vorhergehenden Regeln befolgt.

Aus der Gleichung 7) erhält man auch:

$$\frac{1 - \tang(\alpha + \theta)}{1 + \tang(\alpha + \theta)} = \frac{1 - \frac{1}{\mu}(\cos\alpha - \sin\alpha)}{1 - \frac{1}{\mu}(\cos\alpha + \sin\alpha)},$$

d. i.

$$8) \quad \tang\{45^0 - (\alpha + \theta)\} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{\mu}\sin(45^0 - \alpha)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{\mu}\cos(45^0 - \alpha)}.$$

Auch ist

$$\frac{\tang\alpha + \tang\theta}{1 - \tang\alpha \tang\theta} = -\frac{\frac{1}{\mu}\sin\alpha}{1 - \frac{1}{\mu}\cos\alpha},$$

also

$$9)\quad \tang\theta = \frac{\mu\sin\alpha}{1-\mu\cos\alpha},$$

welche Gleichung gar keine Zweideutigkeit bei der Bestimmung des zwischen -90^0 und $+90^0$ liegenden Winkels θ zulässt, und daher den Vorzug vor allen übrigen verdient.

Da μ der reciproke Brechungsexponent für Luft und Glas ist, so ist $\mu < 1$, weshalb man den Hülfswinkel φ mittelst der Formel

$$10)\quad \cos\varphi = \mu\cos\alpha$$

berechnen kann. Dann ist nach 9):

$$11)\quad \tang\theta = \frac{\mu\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2},$$

woraus zugleich erhellet, dass $\tang\theta$ immer positiv ist, also θ zwischen 0 und $+90^0$ liegt.

Auch ist

$$\sin\theta^2 = \frac{\tang\theta^2}{1+\tang\theta^2} = \frac{\mu^2\sin\alpha^2}{\mu^2\sin\alpha^2 + (1-\mu\cos\alpha)^2}$$
$$= \frac{\mu^2\sin\alpha^2}{1-2\mu\cos\alpha+\mu^2},$$

folglich, indem man zugleich berücksichtigt, dass $\cos\theta = \sin\theta : \tang\theta$ ist:

$$12)\quad \left\{ \begin{aligned} \sin\theta &= \frac{\mu\sin\alpha}{\sqrt{1-2\mu\cos\alpha+\mu^2}}, \\ \cos\theta &= \frac{1-\mu\cos\alpha}{\sqrt{1-2\mu\cos\alpha+\mu^2}}. \end{aligned} \right.$$

Hat man θ mittelst der vorhergehenden Formeln gefunden, so lassen sich ferner $\mathfrak{r}$ und r auf folgende Art bestimmen.

In 5) haben wir schon die Formel

$$\sin\theta = \frac{(\mathfrak{r}-p)\sin\alpha + q\cos\alpha}{r}$$

gefunden. Da nun aber nach der Voraussetzung auch der Punkt N, durch welchen der gesuchte Kreisbogen gehen soll, gegeben ist, so ist die Linie GN eine gegebene Grösse, die wir durch $\bar{\omega}$ bezeichnen wollen. Dann haben wir offenbar die Gleichungen

$$FN=p+\overline{\omega},\quad FN=\mathfrak{r}+r;$$

aus denen sich die Gleichung

$$p+\overline{\omega}=\mathfrak{r}+r$$

ergiebt. Also ist $\mathfrak{r}-p=\overline{\omega}-r$, und folglich nach dem Obigen

$$\sin\theta=\frac{(\overline{\omega}-r)\sin\alpha+q\cos\alpha}{r},$$

woraus sich zur Bestimmung von r die Formel

$$13)\quad r=\frac{\overline{\omega}\sin\alpha+q\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\theta},$$

oder

$$14)\quad r=\frac{\overline{\omega}\sin\alpha+q\cos\alpha}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\theta)},$$

oder nach 1) auch

$$15)\quad r=\frac{\overline{\omega}\sin\alpha+p\cos\alpha\operatorname{tang}i}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}$$

ergiebt. Zur Bestimmung von $\mathfrak{r}$ hat man nach dem Obigen die Formel

$$\mathfrak{r}=p+\overline{\omega}-r=p+\overline{\omega}-\frac{\overline{\omega}\sin\alpha+q\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\theta},$$

d. i.

$$16)\quad \mathfrak{r}=p+\frac{\overline{\omega}\sin\theta-q\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\theta},$$

oder

$$17)\quad \mathfrak{r}=p+\frac{\overline{\omega}\sin\theta-q\cos\alpha}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\theta)},$$

oder auch:

$$18)\quad \mathfrak{r}=p+\frac{\overline{\omega}\sin\theta-p\cos\alpha\operatorname{tang}i}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}.$$

Zur Bestimmung von p_1, q_1 hat man endlich nach dem Obigen die Gleichungen:

$$(p_1-\mathfrak{r})^2+q_1{}^2=r^2,\quad q_1-q=(p_1-p)\tang\alpha.$$

Weil

$$p_1-p=(q_1-q)\cot\alpha$$

ist, so ist

$$\{(q_1-q)\cot\alpha-(\mathfrak{r}-p)\}^2+\{(q_1-q)+q\}^2=r^2,$$

also

$$(q_1-q)^2\operatorname{cosec}\alpha^2-2\{(\mathfrak{r}-p)\cot\alpha-q\}(q_1-q)$$
$$=r^2-(\mathfrak{r}-p)^2-q^2,$$

oder

$$(q_1-q)^2-2\{(\mathfrak{r}-p)\cos\alpha-q\sin\alpha\}(q_1-q)\sin\alpha$$
$$=\{r^2-(\mathfrak{r}-p)^2-q^2\}\sin\alpha^2.$$

Bestimmt man nun aus dieser quadratischen Gleichung q_1-q, und berücksichtigt, dass

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

ist, so erhält man

$$19)\quad \frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

$$=(\mathfrak{r}-p)\cos\alpha-q\sin\alpha\pm\sqrt{r^2-\{(\mathfrak{r}-p)\sin\alpha+q\cos\alpha\}^2}.$$

Weil aber nach 16)

$$\mathfrak{r}-p=\frac{\overline{\omega}\sin\theta-q\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\theta}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$(\mathfrak{r}-p)\cos\alpha-q\sin\alpha=\frac{(\overline{\omega}\cos\alpha-q\sin\alpha)\sin\theta-q}{\sin\alpha+\sin\theta},$$

$$(\mathfrak{r}-p)\sin\alpha+q\cos\alpha=\frac{(\overline{\omega}\sin\alpha+q\cos\alpha)\sin\theta}{\sin\alpha+\sin\theta};$$

und weil nun nach 13)

$$r=\frac{\bar{\omega}\sin\alpha+q\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\theta}$$

ist, so ist

$$r^2-\{(r-p)\sin\alpha+q\cos\alpha\}^2=\frac{(\bar{\omega}\sin\alpha+q\cos\alpha)^2\cos\theta^2}{(\sin\alpha+\sin\theta)^2},$$

also nach 19):

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{(\bar{\omega}\cos\alpha-q\sin\alpha)\sin\theta-q\pm(\bar{\omega}\sin\alpha+q\cos\alpha)\cos\theta}{\sin\alpha+\sin\theta},$$

d. i.

$$20)\quad \frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}=\frac{\bar{\omega}\sin(\theta\pm\alpha)-q\{1\mp\cos(\theta\pm\alpha)\}}{\sin\alpha+\sin\theta},$$

also

$$21)\quad \frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\bar{\omega}\sin(\theta+\alpha)-2q\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)^2}{2\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha)}\\[2ex]\dfrac{\bar{\omega}\sin(\theta-\alpha)-2q\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha)^2}{2\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha)}\end{cases}$$

oder

$$22)\quad \frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\bar{\omega}\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha)-q\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha)}\\[2ex]\dfrac{\bar{\omega}\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)-q\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)}\end{cases}$$

wo es sich nur noch frägt, welchen der beiden Werthe von

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

man zu nehmen hat.

Weil nach 13)

$$r=\frac{\overline{\omega}\sin\alpha+q\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\theta}$$

ist, und $\overline{\omega}$, q, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\theta$ positiv sind, da α, θ zwischen 0 und 90^0 liegen, so ist r positiv, und der einfallende Strahl trifft also jederzeit die concave Seite des Bogens.

Das Product der beiden Werthe von

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

ist nach 19):

$$\{(\mathfrak{r}-p)\cos\alpha-q\sin\alpha\}^2+\{(\mathfrak{r}-p)\sin\alpha+q\cos\alpha\}^2-r^2$$
$$=(\mathfrak{r}-p)^2+q^2-r^2.$$

Wenn nun

$$(\mathfrak{r}-p)^2+q^2-r^2<0$$

ist, so liegt der Punkt (pq) innerhalb des gesuchten Kreises und das obige Product ist negativ. Also haben die beiden Werthe von

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

entgegengesetzte Vorzeichen, und man muss in diesem Falle für

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

offenbar denjenigen der beiden Werthe dieser Grösse nehmen, welcher positiv ist.

Wenn ferner

$$(\mathfrak{r}-p)^2+q^2-r^2>0$$

ist, so liegt der Punkt (pq) ausserhalb des gesuchten Kreises und das obige Product ist positiv. Also haben die beiden Werthe von

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

gleiche Vorzeichen. Die Natur unserer Aufgabe fordert aber in diesem Falle offenbar, dass die Werthe von

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

beide positiv sind, und der grösste dieser beiden Werthe wird augenscheinlich immer der richtige sein.

Im Allgemeinen kann man daher sagen, dass man für

$$\frac{p_1-p}{\cos\alpha}=\frac{q_1-q}{\sin\alpha}$$

immer den grössten der beiden obigen Werthe dieser Grösse nehmen muss.

Denkt man sich durch Umdrehung der Figur um GN eine plan-convexe Linse beschrieben, deren Dicke in der Mitte durch die gegebene Grösse $\overline{\omega}$ bestimmt wird, so bestimmt p_1-p ihre Dicke und q_1 ihre halbe Breite bei dem Punkte A.

Weil

$$r=\frac{\overline{\omega}\sin\alpha+q\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\theta},\quad \sin\alpha=\mu\sin i,\quad q=p\tang i$$

ist, so ist

$$r=\frac{\mu\overline{\omega}\sin i+p\tang i\sqrt{1-\mu^2\sin i^2}}{\mu\sin i+\sin\theta}$$

oder

$$r=\frac{\mu\overline{\omega}\cos i+p\sqrt{1-\mu^2\sin i^2}}{\mu\cos i+\sin\theta\cot i}.$$

Aber

$$\cot i=\frac{\cos i}{\sin i}=\frac{\sqrt{1-\frac{\sin\alpha^2}{\mu^2}}}{\frac{\sin\alpha}{\mu}}=\frac{\sqrt{\mu^2-\sin\alpha^2}}{\sin\alpha},$$

also

$$\sin\theta\cot i=\frac{\mu\sin\alpha}{\sqrt{1-2\mu\cos\alpha+\mu^2}}\cdot\frac{\sqrt{\mu^2-\sin\alpha^2}}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\mu\sqrt{\mu^2-\sin\alpha^2}}{\sqrt{1-2\mu\cos\alpha+\mu^2}}.$$

Lässt man nun i sich der Null nähern, so nähern

$$\cos i \text{ und } \sqrt{1-\mu^2 \sin i^2}$$

sich beide der Einheit als Gränze. Weil aber $\sin\alpha = \mu \sin i$ ist, so nähert auch α sich der Null, und $\sin\theta \cot i$ nähert sich folglich nach dem Obigen der Gränze

$$\frac{\mu^2}{\sqrt{1-2\mu+\mu^2}} = \frac{\mu^2}{1-\mu},$$

wobei man zu beachten hat, dass $\mu < 1$ ist. Bezeichnen wir nun die Gränze, welcher r sich nähert, wenn i sich der Null nähert, durch ϱ, so ist nach dem Vorstehenden offenbar

$$\varrho = \frac{\mu\overline{\omega} + p}{\mu + \frac{\mu^2}{1-\mu}} = \frac{(1-\mu)(\mu\overline{\omega} + p)}{\mu},$$

also

$$23) \quad \varrho = (1-\mu)(\overline{\omega} + \frac{p}{\mu}),$$

oder, wenn wir

$$24) \quad \mu = \frac{1}{\mu'}$$

setzen:

$$25) \quad \varrho = (1 - \frac{1}{\mu'})(\overline{\omega} + \mu' p) = (\mu' - 1)(p + \frac{\overline{\omega}}{\mu'}).$$

Weil $\mathfrak{r} = p + \overline{\omega} - r$ ist, so ist im vorhergehenden Falle

$$\mathfrak{r} = p + \overline{\omega} - (1-\mu)(\overline{\omega} + \frac{p}{\mu}),$$

also

$$26) \quad \mathfrak{r} = \mu\overline{\omega} + (2 - \frac{1}{\mu})p$$

oder

$$27) \quad \mathfrak{r} = \frac{\overline{\omega}}{\mu'} + (2-\mu')p.$$

Diese letzteren Formeln gelten für Linsen von obiger Form, wenn nur die ganz nahe bei FH einfallenden Strahlen nach ihrem Austritte aus der Linse mit FH parallel werden sollen.

Die leichteste Berechnung der Grössen r, $\mathfrak{r}$, p_1, q_1 scheinen die folgenden Formeln zu gestatten:

28)

$$\sin\alpha = \mu\sin i;$$

$$\cos\varphi = \mu\cos\alpha,\quad \mathrm{tang}\,\theta = \frac{\mu\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}\ (0 < \theta < 90^0);$$

$$r = \frac{\bar{\omega}\sin\alpha + p\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,i}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\theta)},$$

$$\mathfrak{r} = p + \bar{\omega} - r = p + \frac{\bar{\omega}\sin\theta - p\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,i}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\theta)};$$

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = \frac{q_1 - q}{\sin\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\bar{\omega}\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha) - p\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)\,\mathrm{tang}\,i}{\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha)} \\[2ex] \dfrac{\bar{\omega}\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha) - p\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\,\mathrm{tang}\,i}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)} \end{cases};$$

indem man für

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = \frac{q_1 - q}{\sin\alpha}$$

immer den grössten Werth nimmt.

Man kann auch noch einen Hülfswinkel ω berechnen, durch welchen die vorstehenden Formeln auf folgende noch einfachere Form gebracht werden:

29)

$\sin\alpha = \mu \sin i$;

$$\cos\varphi = \mu\cos\alpha,\ \tang\theta = \frac{\mu\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}\ (0 < \theta < 90^0);$$

$$\tang\omega = \frac{p}{\overline{\omega}}\tang i;$$

$$r = \frac{\overline{\omega}\sin(\alpha+\omega)}{2\cos\omega\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\theta)},$$

$$\mathfrak{r} = p + \overline{\omega} - r;$$

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = \frac{q_1 - q}{\sin\alpha} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\overline{\omega}\cos\left\{\frac{1}{2}(\theta+\alpha)+\omega\right\}}{\cos\omega\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha)} \\ \dfrac{\overline{\omega}\sin\left\{\frac{1}{2}(\theta-\alpha)-\omega\right\}}{\cos\omega\sin\frac{1}{2}(\theta+\alpha)} \end{array}\right.;$$

für

$$\frac{p_1 - p}{\cos\alpha} = \frac{q_1 - q}{\sin\alpha}$$

immer den grössten Werth genommen.

Nach Fresnel wird man, um die Aberration der Strahlen möglichst zu beseitigen, am besten r und $\mathfrak{r}$ für $i = 0$ nach den Formeln 23) und 26) oder 25) und 27), und für den äussersten Gränzwerth, welchen man dem Winkel i zu geben beabsichtigt, nach den Formeln 29) suchen, worauf man zwischen den beiden auf diese Weise gefundenen Werthen von r und ebenso zwischen den beiden auf diese Weise gefundenen Werthen von $\mathfrak{r}$ das arithmetische Mittel nimmt. Dicke und Breite der Linse am Rande wird durch p_1 und q_1 bestimmt, welche Grössen nach den in 29) sich findenden Formeln berechnet werden.

Wir wollen nun auch noch die ersten Glieder der Reihe bestimmen, in welche sich

$$r = \frac{\mu\overline{\omega}\cos i + p\sqrt{1-\mu^2\sin i^2}}{\mu\cos i + \sin\theta\cot i}.$$

entwickeln lässt.

Weil

$$\sin\alpha = \mu \sin i, \quad \sin\theta \cot i = \frac{\mu\sqrt{\mu^2 - \sin\alpha^2}}{\sqrt{1 - 2\mu\cos\alpha + \mu^2}}$$

ist, so ist für $i=0$ in einer bekannten Bezeichnung, wie wir auch schon aus dem Obigen wissen:

$$(r) = \frac{(1-\mu)(\mu\bar{\omega} + p)}{\mu}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$P = \mu\bar{\omega}\cos i + p\sqrt{1 - \mu^2 \sin i^2},$$

$$Q = \mu\cos i + \sin\theta\cot i;$$

also

$$r = \frac{P}{Q},$$

so ist

$$\frac{\partial r}{\partial i} = \frac{Q\frac{\partial P}{\partial i} - \frac{\partial Q}{\partial i}}{Q^2}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial P}{\partial i} = -\mu \sin i \frac{\mu p \cos i + \bar{\omega}\sqrt{1 - \mu^2 \sin i^2}}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin i^2}},$$

und

$$\frac{\partial . \sin\theta\cot i}{\partial i}$$

$$= -\mu\sin\alpha \frac{\mu(\mu^2 - \sin\alpha^2) + (1 - 2\mu\cos\alpha + \mu^2)\cos\alpha}{(1 - 2\mu\cos\alpha + \mu^2)\sqrt{(\mu^2 - \sin\alpha^2)(1 - 2\mu\cos\alpha + \mu^2)}} \cdot \frac{\partial\alpha}{\partial i},$$

also, weil nach dem Obigen

$$\cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial i} = \mu\cos i, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial i} = \mu\frac{\cos i}{\cos\alpha}$$

ist:

$$\frac{\partial.\sin\theta\cot i}{\partial i}$$

$$=-\mu^2\tang\alpha\cos i\frac{\cos\alpha-\mu(1+\cos\alpha^2)+\mu^2\cos\alpha+\mu^3}{(1-2\mu\cos\alpha+\mu^2)\sqrt{(\mu^2-\sin\alpha^2)(1-2\mu\cos\alpha+\mu^2)}};$$

ferner ist

$$\frac{\partial Q}{\partial i}=-\mu\sin i+\frac{\partial.\sin\theta\cot i}{\partial i}.$$

Für $i=0$ ist

$$(P)=\mu\overline{\omega}+p,\ (\sin\theta\cot i)=\frac{\mu^2}{1-\mu},\quad (Q)=\frac{\mu}{1-\mu};$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial i}\right)=0,\ \left(\frac{\partial.\sin\theta\cot i}{\partial i}\right)=0,\ \left(\frac{\partial Q}{\partial i}\right)=0;$$

also nach dem Obigen

$$\left(\frac{\partial r}{\partial i}\right)=0.$$

Weil

$$\left(\frac{\partial P}{\partial i}\right)=0,\quad \left(\frac{\partial Q}{\partial i}\right)=0$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial i^2}\right)=\frac{(Q)\left(\frac{\partial^2 P}{\partial i^2}\right)-(P)\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial i^2}\right)}{(Q)^2}.$$

Nun erhält man aus dem Obigen sogleich:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial i^2}=-\mu\cos i\,\frac{\mu p\cos i+\overline{\omega}\sqrt{1-\mu^2\sin i^2}}{\sqrt{1-\mu^2\sin i^2}}$$

$$-\mu\sin i\,\frac{\partial}{\partial i}\left\{\frac{\mu p\cos i+\overline{\omega}\sqrt{1-\mu^2\sin i^2}}{\sqrt{1-\mu^2\sin i^2}}\right\},$$

woraus sich auf der Stelle

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial i^2}\right)=-\mu(\mu p+\overline{\omega})$$

ergiebt.

Setzen wir ferner

$$P' = \sqrt{\mu^2 - \sin\alpha^2},$$

$$Q' = \sqrt{1 - 2\mu\cos\alpha + \mu^2};$$

also

$$\sin\theta \cot i = \mu \frac{P'}{Q'};$$

so ist

$$\frac{\partial P'}{\partial i} = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\mu^2 - \sin\alpha^2}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial i},$$

$$\frac{\partial Q'}{\partial i} = \frac{\mu\sin\alpha}{\sqrt{1 - 2\mu\cos\alpha + \mu^2}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial i};$$

also

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial i}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial Q'}{\partial i}\right) = 0$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial^2 . \sin\theta \cot i}{\partial i^2}\right) = \mu \frac{(Q')\left(\frac{\partial^2 P'}{\partial i^2}\right) - (P')\left(\frac{\partial^2 Q'}{\partial i^2}\right)}{(Q')^2},$$

d. i. nach dem Obigen:

$$\left(\frac{\partial^2 . \sin\theta \cot i}{\partial i^2}\right) = \mu \frac{(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 P'}{\partial i^2}\right) - \mu \left(\frac{\partial^2 Q'}{\partial i^2}\right)}{(1-\mu)^2}.$$

Leicht erhält man aber aus dem Obigen:

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial i^2} = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\mu^2 - \sin\alpha^2}} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial i^2} - \frac{\mu^2 \cos 2\alpha + \sin\alpha^4}{(\mu^2 - \sin\alpha^2)\sqrt{\mu^2 - \sin\alpha^2}} \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial i}\right),$$

also

$$\left(\frac{\partial^2 P'}{\partial i^2}\right) = -\frac{1}{\mu} \cdot \mu^2 = -\mu.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$\frac{\partial^2 Q'}{\partial i^2} = \frac{\mu \sin\alpha}{\sqrt{1-2\mu\cos\alpha+\mu^2}} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial i^2}$$

$$+\mu \frac{(1-2\mu\cos\alpha+\mu^2)\cos\alpha-\mu\sin\alpha^2}{(1-2\mu\cos\alpha+\mu^2)\sqrt{1-2\mu\cos\alpha+\mu^2}} \cdot \left(\frac{\partial\alpha}{\partial i}\right)^2$$

$$= \frac{\mu\sin\alpha}{\sqrt{1-2\mu\cos\alpha+\mu^2}} \cdot \frac{\partial^2\alpha}{\partial i^2}$$

$$+\mu \frac{(1+\mu^2)\cos\alpha-\mu(1+\cos\alpha^2)}{(1-2\mu\cos\alpha+\mu^2)\sqrt{1-2\mu\cos\alpha+\mu^2}} \cdot \left(\frac{\partial\alpha}{\partial i}\right)^2,$$

also

$$\left(\frac{\partial^2 Q'}{\partial i^2}\right) = \frac{\mu^3}{1-\mu}.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\left(\frac{\partial^2 . \sin\theta\cot i}{\partial i^2}\right) = -\mu^2 \frac{(1-\mu)^2+\mu^3}{(1-\mu)^3},$$

und weil nun

$$Q = \mu\cos i + \sin\theta\cot i$$

ist, so ist

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial i^2} = -\mu\cos i + \frac{\partial^2 . \sin\theta\cot i}{\partial i^2},$$

also

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial i^2}\right) = -\mu - \mu^2 \frac{(1-\mu)^2+\mu^3}{(1-\mu)^3},$$

d. i.

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial i^2}\right) = -\mu \frac{(1-\mu)^3+\mu(1-\mu)^2+\mu^4}{(1-\mu)^3}.$$

oder

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial i^2}\right) = -\mu \frac{(1-\mu)^2+\mu^4}{(1-\mu)^3}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial i^2}\right) = \frac{\{(1-\mu)^2+\mu^4\}(\mu\varpi+p)-\mu(1-\mu)^2(\mu p+\varpi)}{\mu(1-\mu)},$$

oder

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial i^2}\right)=\frac{\mu^5\overline{\omega}+\{\mu^4+(1-\mu)^3(1+\mu)\}p}{\mu(1-\mu)},$$

oder auch

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial i^2}\right)=\frac{\mu^5\overline{\omega}+\{1-2\mu(1-\mu)(1+\mu)\}p}{\mu(1-\mu)}.$$

Nach dem Maclaurin'schen Theorem ist also

$$r=\frac{(1-\mu)(\mu\overline{\omega}+p)}{\mu}+\frac{\{(1-\mu)^2+\mu^4\}(\mu\overline{\omega}+p)-\mu(1-\mu)^2(\mu p+\overline{\omega})}{2\mu(1-\mu)}i^2$$

oder

$$r=\frac{(1-\mu)(\mu\overline{\omega}+p)}{\mu}+\frac{\mu^5\overline{\omega}+\{1-2\mu(1-\mu)(1+\mu)\}p}{2\mu(1-\mu)}i^2.$$

Wenn man also

$$r=\frac{(1-\mu)(\mu\overline{\omega}+p)}{\mu}$$

setzt, so vernachlässigt man erst Glieder, die in Bezug auf i von der zweiten Ordnung sind.

Wir wollen nun zu der Bestimmung der Glasringe übergehen, welche die vorher bestimmte mittlere Linse concentrisch umgeben sollen, und schicken der Aufgabe, auf deren Auflösung es hierbei vorzüglich ankommen wird, die folgenden allgemeinen Erläuterungen voraus.

In Fig. 9. sei $LANA'L'$ die vorher vollkommen bestimmte mittlere Linse, und F wie vorher der leuchtende Punkt, welcher die Strahlen aussendet. Diese mittlere Linse soll nun von einem Glasringe concentrisch umgeben werden, der folgenden Bedingungen genügen soll. Seine Höhe CL soll eine bestimmte, etwa der Dicke GN der mittleren Linse gleich sein, wodurch uns also der Punkt C gegeben wird. Ferner soll auch der Punkt B, in gleicher Höhe mit A oder A' über MM', durch die Linien GM und BM gegeben sein, wo die Linie LM, die natürlich auch gegeben ist, da GL und GM gegeben sind, die Dicke des Rings bestimmt. Durch die beiden gegebenen Punkte B und C soll nun ein Kreisbogen beschrieben werden, welcher so beschaffen ist,

dass ein von dem gegebenen leuchtenden Punkte F ausgehender, gegen die Linie FH unter einem gegebenen spitzen Winkel i geneigter Strahl bei LM zum ersten Male, und dann bei BC zum zweiten Male so gebrochen wird, dass der bei BC ausfahrende Strahl der Linie FH parallel ist. Da der von F ausgehende, unter dem spitzen Winkel i gegen FH geneigte Strahl die Linie LM nothwendig selbst treffen muss, so ist der Winkel i offenbar nicht ganz willkührlich, indem, wenn wir

$$\angle GFL = i_1, \quad \angle GFM = i_2$$

setzen, jedenfalls

$$i_1 < i < i_2$$

sein muss, wo die Winkel i_1 und i_2 mittelst der Formeln

$$\tang i_1 = \frac{GL}{FG}, \quad \tang i_2 = \frac{GM}{FG}$$

leicht bestimmt werden können. Damit aber von dem bei LM gebrochenen Strahle, was offenbar nöthig ist, der Kreisbogen BC wirklich getroffen werde, ist es erforderlich, dass von dem bei LM gebrochenen Strahle die Linie AB wirklich getroffen werde. Nun hat man aber, wenn α den Brechungswinkel bei LM bezeichnet, wie in der Ersten Aufgabe die Gleichung

$$\sin\alpha = \mu \sin i,$$

mittelst welcher Gleichung α, wenn i gegeben ist, leicht gefunden werden kann. Die Entfernung des Punktes, in welchem die Linie AB von dem bei LM gebrochenen Strahle getroffen wird, von der Linie FH ist

$$FG.\tang i + BM.\tang\alpha,$$

und der Winkel i also der Bedingung

$$FG.\tang i + BM.\tang\alpha < GM$$

unterworfen, oder der grösste Werth, welchen i haben kann, den wir durch i', den entsprechenden Brechungswinkel durch α' bezeichnen wollen, muss aus der Gleichung

$$FG.\tang i' + BM.\tang\alpha' = GM,$$

d. i., weil

$$\sin\alpha' = \mu \sin i', \quad \cos\alpha' = \sqrt{1 - \mu^2 \sin i'^2}$$

ist, aus der Gleichung

$$FG.\mathrm{tang}i' + \frac{\mu.BM.\sin i'}{\sqrt{1-\mu^2\sin i'^2}} = GM$$

bestimmt werden, eine Gleichung, die sich durch einige Näherungen leicht auflösen lässt. Hat man auf diese Weise i' bestimmt, so ist i der Bedingung

$$i_1 < i < i'$$

unterworfen, und man wird nun am besten

$$i = \frac{i_1 + i'}{2}$$

setzen. Haben wir allen vorhergehenden Bedingungen gehörig entsprochen, so wird der zu construirende Glasring von der Figur $BCML$ beschrieben, indem man sich die ganze Fig. 9. um die Linie FH herumdrehen lässt, und so wie man auf die vorhergehende Weise zu der mittleren Linse einen concentrischen Glasring construiren kann, kann man natürlich zu jedem Glasringe einen neuen, denselben concentrisch umgebenden Glasring erhalten, was einer weiteren Erläuterung nicht bedarf. Ueberhaupt aber werden wir nun durch diese vorläufigen Betrachtungen unmittelbar zu der folgenden Aufgabe geführt:

Zweite Aufgabe.

In Fig. 9. seien der Punkt F und die beiden Punkte B und C gegeben; man soll durch die Punkte B und C einen Kreisbogen BC von solcher Beschaffenheit beschreiben, dass ein von F ausgehender, gegen die Linie FH unter dem gegebenen spitzen Winkel i geneigter Strahl zuerst bei LM und dann bei BC so gebrochen wird, dass der letzte gebrochene, bei BC ausfahrende Strahl der Linie FH parallel ist.

Auflösung.

Wir wollen den Punkt F als den Anfang, die Linie FH als den positiven Theil der Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy annehmen, in welchem die positiven y auf derselben Seite der Axe der x liegen sollen, auf welcher der Winkel i liegt. Die gegebene Linie FG wollen wir durch p, und die gleichfalls gegebenen Coordinaten der Punkte B und C durch f, g und f_1, g_1 *) bezeichnen. Sind dann ferner p_1, q_1 die

*) Diese Coordinaten können an sich ganz willkührlich angenommen werden.

Coordinaten des Punktes, in welchem die Linie LM von dem von F ausgehenden, unter dem Winkel i gegen die Linie FH geneigten Strahle getroffen wird, so ist

$$1)\quad p_1 = p,\quad q_1 = p\tang i$$

und p_1, q_1 sind daher auch bekannte Grössen. Ist α der Brechungswinkel bei LM, so ist

$$2)\quad \sin\alpha = \mu\sin i,$$

und wenn nun r den Halbmesser, so wie $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$ die Coordinaten des Mittelpunkts des gesuchten Kreisbogens bezeichnen, den Halbmesser r als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die concave oder convexe Seite des gesuchten Kreisbogens von dem bei LM gebrochenen Strahle getroffen wird; so liefern uns auf ganz ähnliche Weise wie in der Ersten Aufgabe die Bedingungen unserer jetzigen Aufgabe die folgenden Gleichungen:

$$3)\quad \sin\theta = \frac{(\mathfrak{r}-p_1)\sin\alpha - (\mathfrak{y}-q_1)\cos\alpha}{r},$$

den Winkel θ absolut nie grösser als 90^0 genommen; und

$$4)\quad \begin{cases} \mu = \cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)\left(\cos\theta - \mu\sqrt{1-\frac{\sin\theta^2}{\mu^2}}\right), \\ 0 = \sin\alpha - \sin(\alpha+\theta)\left(\cos\theta - \mu\sqrt{1-\frac{\sin\theta^2}{\mu^2}}\right). \end{cases}$$

Aus diesen beiden letztern Gleichungen erhalten wir ganz auf dieselbe Art wie in der Ersten Aufgabe zur Bestimmung des zwischen -90^0 und $+90^0$ liegenden Winkels θ die Formel

$$5)\quad \tang\theta = \frac{\mu\sin\alpha}{1-\mu\cos\alpha},$$

oder, wenn wir

$$6)\quad \cos\varphi = \mu\cos\alpha$$

setzen, die Formel

$$7)\quad \tang\theta = \frac{\mu\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2},$$

mittelst welcher θ ohne alle Zweideutigkeit bestimmt werden kann. Weil nun aber der gesuchte Kreisbogen durch die beiden Punkte B und C oder (fg) und (f_1g_1) gehen soll, so haben wir noch die beiden Gleichungen:

$$8)\quad \begin{cases} (\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2=r^2, \\ (\mathfrak{x}-f_1)^2+(\mathfrak{y}-g_1)^2=r^2; \end{cases}$$

welche, in Verbindung mit der Gleichung 3), zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen r, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ hinreichen.

Durch Subtraction der Gleichungen 8) von einander erhalten wir zuvörderst die Gleichung

$$f^2+g^2-f_1{}^2-g_1{}^2-2(f-f_1)\mathfrak{x}-2(g-g_1)\mathfrak{y}=0$$

oder

$$9)\quad (f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}=\frac{f^2+g^2-f_1{}^2-g_1{}^2}{2},$$

welche man auch, wie leicht erhellet, auf die beiden folgenden Ausdrücke bringen kann:

$$10)\quad \begin{cases} (f-f_1)(\mathfrak{x}-f)+(g-g_1)(\mathfrak{y}-g)=-\dfrac{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2}{2}, \\ (f-f_1)(\mathfrak{x}-f_1)+(g-g_1)(\mathfrak{y}-g_1)=\dfrac{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2}{2}. \end{cases}$$

Ferner lässt sich die Gleichung 3) auf eine der beiden folgenden Arten ausdrücken:

$$11)\quad \begin{cases} (\mathfrak{x}-f)\sin\alpha-(\mathfrak{y}-g)\cos\alpha=(p_1-f)\sin\alpha-(q_1-g)\cos\alpha+r\sin\theta, \\ (\mathfrak{x}-f_1)\sin\alpha-(\mathfrak{y}-g_1)\cos\alpha=(p_1-f_1)\sin\alpha-(q_1-g_1)\cos\alpha+r\sin\theta. \end{cases}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$12)\quad \begin{cases} A=-\dfrac{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2}{2\{(f-f_1)\cos\alpha+(g-g_1)\sin\alpha\}}\cos\alpha, \\ A_1=-\dfrac{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2}{2\{(f-f_1)\cos\alpha+(g-g_1)\sin\alpha\}}\sin\alpha; \end{cases}$$

und

$$13)\quad \begin{cases} B=\quad (g-g_1)\dfrac{(p_1-f)\sin\alpha-(q_1-g)\cos\alpha}{(f-f_1)\cos\alpha+(g-g_1)\sin\alpha}, \\ B_1=-(f-f_1)\dfrac{(p_1-f)\sin\alpha-(q_1-g)\cos\alpha}{(f-f_1)\cos\alpha+(g-g_1)\sin\alpha}; \end{cases}$$

ferner

$$14)\quad \begin{cases} F=A+B, \\ F_1=A_1+B_1; \end{cases}$$

und

$$15)\quad \begin{cases} G= \quad (g-g_1)\dfrac{\sin\theta}{(f-f_1)\cos\alpha+(g-g_1)\sin\alpha}, \\ G_1=-(f-f_1)\dfrac{\sin\theta}{(f-f_1)\cos\alpha+(g-g_1)\sin\alpha}; \end{cases}$$

so erhalten wir aus den beiden ersten Gleichungen in 10) und 11) durch Elimination leicht:

$$16)\quad \begin{cases} \mathfrak{r}-f=F+Gr, \\ \mathfrak{y}-g=F_1+G_1r; \end{cases}$$

und daher zur Bestimmung von r nach 8) die Gleichung:

$$17)\quad (F+Gr)^2+(F_1+G_1r)^2=r^2.$$

Berechnen wir die Hülfswinkel ω und $\overline{\omega}$ mittelst der Formeln:

$$18)\quad \tang\omega=\frac{g-g_1}{f-f_1},\quad \tang\overline{\omega}=\frac{q_1-g}{p_1-f};$$

so erhalten wir ohne Schwierigkeit:

$$19)\quad \begin{cases} A=-\dfrac{(f-f_1)\cos\alpha}{2\cos(\alpha-\omega)\cos\omega}, \\ A_1=-\dfrac{(f-f_1)\sin\alpha}{2\cos(\alpha-\omega)\cos\omega}; \end{cases}$$

ferner

$$20)\quad \begin{cases} B= \quad (p_1-f)\dfrac{\sin(\alpha-\overline{\omega})\sin\omega}{\cos(\alpha-\omega)\cos\overline{\omega}}, \\ B_1=-(p_1-f)\dfrac{\sin(\alpha-\overline{\omega})\cos\omega}{\cos(\alpha-\omega)\cos\overline{\omega}}; \end{cases}$$

und

$$21)\quad \begin{cases} G= \quad \dfrac{\sin\theta\sin\omega}{\cos(\alpha-\omega)}, \\ G_1=-\dfrac{\sin\theta\cos\omega}{\cos(\alpha-\omega)}. \end{cases}$$

Die Gleichung 17) giebt nach gehöriger Entwickelung:

$$(1-GG-G_1G_1)r^2-2(FG+F_1G_1)r=FF+F_1F_1,$$

aus welcher quadratischen Gleichung man leicht

$$22)\quad r=\frac{FG+F_1G_1\pm\sqrt{FF+F_1F_1-(FG_1-F_1G)^2}}{1-GG-G_1G_1}$$

erhält.

Hat man r mittelst dieser Formel bestimmt, so ergeben sich $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ mittelst der Gleichungen 16), nämlich mittelst der Formeln

$$23)\quad \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{x}=f+F+Gr,\\ \mathfrak{y}=g+F_1+G_1r;\end{array}\right.$$

und unsere Aufgabe ist daher jetzt vollständig aufgelöst.

Im Allgemeinen giebt es zwei Auflösungen; welche man zu wählen hat, muss in jedem Falle besonders bestimmt werden. Soll die concave Seite des Bogens BC von dem bei LM gebrochenen Strahle getroffen werden, so muss r positiv sein.

Der Werth von r lässt sich auch auf folgende Art ausdrücken:

$$24)\quad r=\frac{FG+F_1G_1\pm\sqrt{(FG+F_1G_1)^2+(FF+F_1F_1)(1-GG-G_1G_1)}}{1-GG-G_1G_1}.$$

Das Product der beiden in dieser Formel enthaltenen Werthe von r ist

$$-\frac{FF+F_1F_1}{1-GG-G_1G_1},$$

und diese beiden Werthe von r haben daher gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem

$$1-GG-G_1G_1=1-\frac{\sin\theta^2}{\cos(\alpha-\omega)^2}$$

negativ oder positiv, d. h. jenachdem der absolute Werth von

$$\frac{\sin\theta}{\cos(\alpha-\omega)}$$

grösser oder kleiner als die Einheit ist.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes in dem Bogen

BC, wo der mit *FH* parallele Strahl ausführt, durch *P*, *Q*, und setzen der Kürze wegen

$$25)\quad K=(\mathfrak{x}-p_1)\cos\alpha+(\mathfrak{y}-q_1)\sin\alpha;$$

so ist*):

$$26)\quad \begin{cases} P=p_1+(K+r\cos\theta)\cos\alpha, \\ Q=q_1+(K+r\cos\theta)\sin\alpha. \end{cases}$$

Es ist nun noch nöthig, die Natur der krummen Fläche genauer kennen zu lernen, welche von dem Kreisbogen *BC* in Fig. 9. beschrieben wird, wenn sich diese ganze Figur um die Linie *FH* herumdreht, was uns zu der folgenden, diese Frage genügend beantwortenden Aufgabe führt:

Dritte Aufgabe.

In Fig. 10. sei *ABCD* ein dem aus dem Mittelpunkte *O* mit dem Halbmesser $OC=r$ beschriebenen Kreise angehörendes Kreissegment; die Linie *MN* stehe auf der Linie *AB* senkrecht, und die ganze Figur drehe sich um die Linie *MN* herum: man soll die Gleichung der Fläche finden. welche bei dieser Drehung von dem Kreisbogen *AN* beschrieben wird.

Auflösung.

In einem rechtwinkligen Coordinatensysteme der xyz, dessen Anfang der Punkt *M* ist, sei die von der Linie *AB* bei der in Rede stehenden Drehung beschriebene Ebene die Ebene der xy; *MA* sei der positive Theil der Axe der x, und der positive Theil der Axe der y werde so angenommen, dass die Richtung, welche man verfolgt, wenn man sich von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin bewegt, mit der Richtung der Drehung, die übrigens an sich ganz willkührlich ist, übereinstimmt; der positive Theil der Axe der z sei die Linie *MN*. Die Coordinaten des Mittelpunkts *O* des Kreises, welchem das Segment *ABCD* angehört, in dem vorhergehenden Coordinatensysteme seien a, b. Sind nun x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der krummen

---

*) M. s. meine Optischen Untersuchungen. Thl. II. S. 12.

Fläche, deren Gleichung wir suchen, so können wir uns nach der Art der Entstehung dieser Fläche durch den in Rede stehenden Punkt (xyz) und die Linie MN offenbar einen dem Kreise $ACBE$ gleichen Kreis gelegt denken, welchen wir durch $A'C'B'E'$, seinen Mittelpunkt durch O', den dem Punkte D in dem Kreise $ACBE$ entsprechenden Punkt in dem Kreise $A'C'B'E'$ durch D' bezeichnen wollen. Sind nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten des Punktes O', so haben wir offenbar die Gleichung

$$1)\quad (x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2+(z-\mathfrak{z})^2=r^2.$$

Bezeichnen wir jetzt den von der Linie MA' mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach der Richtung der Drehung hin von 0 bis 360° zählen, durch ω, die von M nach der Projection des Punktes (xyz) auf der Ebene der xy gezogene gerade Linie aber durch ϱ, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$2)\quad x=\varrho\cos\omega,\quad y=\sin\omega.$$

Eben so leicht erhellet, dass für ein negatives a mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$\mathfrak{x}=-a\cos(\omega\pm180^0),\quad \mathfrak{y}=-a\sin(\omega\pm180^0);$$

für ein positives a dagegen

$$\mathfrak{x}=a\cos\omega,\quad \mathfrak{y}=a\sin\omega$$

ist, woraus sich ergiebt, dass in völliger Allgemeinheit

$$3)\quad \mathfrak{x}=a\cos\omega,\quad \mathfrak{y}=a\sin\omega$$

ist. Weil nun offenbar

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$$

ist, so ist nach 2):

$$x=\sqrt{x^2+y^2}.\cos\omega,\quad y=\sqrt{x^2+y^2}.\sin\omega;$$

also nach 3) durch Division:

$$4)\quad \frac{\mathfrak{x}}{x}=\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\mathfrak{y}}{y}=\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

oder

$$5)\quad \mathfrak{x}=\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \mathfrak{y}=\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Folglich ist

$$x-\mathfrak{x}=x(1-\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}),\quad y-\mathfrak{y}=y(1-\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}});$$

also

$$(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2=(x^2+y^2)(1-\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}})^2;$$

und weil nun offenbar $\mathfrak{z}=b$ ist, so ist nach 1) die gesuchte Gleichung unserer krummen Fläche:

$$6)\quad (x^2+y^2)(1-\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(z-b)^2=r^2$$

oder

$$7)\quad (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+(z-b)^2=r^2$$

oder

$$8)\quad x^2+y^2+(z-b)^2+a^2-r^2=2a\sqrt{x^2+y^2},$$

welche Gleichung, wenn man sie rational machen wollte, auf eine Gleichung des vierten Grades führen würde.

Bezeichnen wir den von dem Anfange M der Coordinaten nach dem Punkte (xyz) gezogenen Vector durch R, und dessen spitzen Neigungswinkel gegen die Ebene der xy, indem man diesen Neigungswinkel als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem R auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy liegt, durch $\overline{\omega}$; so ist in völliger Allgemeinheit

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}=R\cos\overline{\omega},\quad z=R\sin\overline{\omega}.$$

Also hat man nach 7) zwischen R und $\overline{\omega}$ die Gleichung:

$$(R\cos\overline{\omega}-a)^2+(R\sin\overline{\omega}-b)^2=r^2$$

oder

$$9)\quad (a-R\cos\overline{\omega})^2+(b-R\sin\overline{\omega})^2=r^2.$$

Diese Gleichung giebt nach gehöriger Entwickelung:

$$R^2-2(a\cos\overline{\omega}+b\sin\overline{\omega})R=r^2-a^2-b^2,$$

und wenn man nun diese quadratische Gleichung in Bezug auf R als unbekannte Grösse auflöst, so erhält man:

$$10)\quad R=a\cos\overline{\omega}+b\sin\overline{\omega}\pm\sqrt{r^2-(a\sin\overline{\omega}-b\cos\overline{\omega})^2}.$$

Das Product der beiden in dieser Formel enthaltenen Werthe von R ist

$$(a\cos\varpi+b\sin\varpi)^2+(a\sin\varpi-b\cos\varpi)^2-r^2=a^2+b^2-r^2,$$

und dieses Product ist, weil

$$MO^2=a^2+b^2$$

und

$$MO<AO,\ \text{d. i.}\ MO<r$$

ist, offenbar negativ, so dass also die beiden obigen Werthe von R stets entgegengesetzte Vorzeichen haben. Setzen wir nun

$$R'=a\cos\varpi+b\sin\varpi+\sqrt{r^2-(a\sin\varpi-b\cos\varpi)^2},$$

$$R''=a\cos\varpi+b\sin\varpi-\sqrt{r^2-(a\sin\varpi-b\cos\varpi)^2};$$

so ist

$$R'-R''=2\sqrt{r^2-(a\sin\varpi-b\cos\varpi)^2},$$

also

$$R'>R'',$$

und daher, weil nach dem Vorhergehenden R' und R'' entgegengesetzte Vorzeichen haben, R' positiv und R'' negativ. Weil nun R seiner Natur nach nur positiv sein kann, so muss man in der Gleichung 10) das obere Zeichen nehmen, also

$$11)\quad R=a\cos\varpi+b\sin\varpi+\sqrt{r^2-(a\sin\varpi-b\cos\varpi)^2}$$

setzen.

Es kann hier natürlich nicht meine Absicht sein, mich auf das Praktische oder Technische bei dem Bau der Leuchtthürme, oder auch nur bei der mechanischen Einrichtung der Beleuchtungsapparate, der besten Construction der Lampen, u. s. w. einzulassen. Weil aber das schon oben erwähnte Mémoire sur un nouveau système d'éclairage des phares par Fresnel. Paris. 1822. jetzt selten, wenigstens schwer zu erhalten ist, so dass selbst Herr Hess dasselbe bei der Ausarbeitung seiner oben angeführten Schrift gar nicht gekannt zu haben scheint*), so will ich aus diesem trefflichen Memoire in Fig. I. und Fig. II. die sehr deutliche Zeichnung des Beleuchtungsapparats von Fresnel mittheilen, indem ich bemerke, dass die Copie eine ganz genaue, nur der Maassstab verkleinert ist, so dass die hier gegebene Zeichnung $^1/_{50}$ der wirklichen Grösse ist. Wegen der grossen Deutlichkeit dieser Zeichnung wird eine ausführliche Erläuterung hier nicht nöthig sein, und ich begnüge mich daher mit den folgenden

*) Wenigstens wird desselben in der Schrift des Herrn Hess keine Erwähnung gethan.

wenigen Bemerkungen über dieselbe. Der Apparat ist ein Drehfeuer, er ist achteckig, und enthält demzufolge acht grössere und acht kleinere Linsen; die ersteren sind durch L, die letzteren über den ersteren befindlichen, gegen dieselben unter einem gewissen Winkel geneigten Linsen sind durch l bezeichnet. Der leuchtende Punkt für alle Linsen ist die Flamme F, und M sind spiegelnde Flächen, welche, gegen die kleineren Linsen unter einem gewissen leicht zu bestimmenden Winkel geneigt, die von den kleineren Linsen ausgehenden Strahlen nach horizontalen Richtungen reflectiren. Die von den grösseren Linsen ausgehenden Strahlen sind durch R, die von den kleineren Linsen ausgehenden Strahlen durch r bezeichnet. Zur Herstellung der Flamme dient die Lampe FVH. Da das Feuer ein Drehfeuer ist, so sind noch verschiedene, aus der Zeichnung ersichtliche, Vorrichtungen zur Umdrehung angebracht, deren genauere Beschreibung nicht hierher gehört, da uns hier vorzugsweise nur das Optische interessirt. Das angeführte Memoire von Fresnel wird, wenn es auch über die optische Theorie der Linsen gar nichts enthält, doch immer rücksichtlich des Praktischen oder Technischen, namentlich auch in Beziehung auf die Einrichtung der Lampen, wenn dieselbe auch neuerlich wohl noch mehrfach verbessert worden ist, eine Hauptquelle bleiben, und darf von Keinem, wer für diesen in so vielen Beziehungen höchst wichtigen Gegenstand sich interessirt, unbeachtet gelassen werden.

IV.

Das dioptrische Beleuchtungssystem. Secundärer Beleuchtungsapparat.

Bei dem vorher kurz beschriebenen Fresnel'schen Beleuchtungsapparate bilden die gegen die acht grösseren Polyzonal-Linsen geneigten acht kleineren Polyzonal-Linsen nebst den dazu gehörenden Spiegeln den secundären Beleuchtungsapparat, und sind, wie ein Jeder von selbst übersehen haben wird, dazu bestimmt, diejenigen Strahlen, welche von den grösseren Linsen nicht mehr aufgenommen werden, aufzunehmen und zur Beleuchtung zweckmässig zu verwenden, also alles von der Lampe ausgehende Licht möglichst zu benutzen. Statt dieser Einrichtung bedient man sich als secundäres Beleuchtungssystem zu demselben Zwecke jetzt vielfach gläserner Ringe, welche durch Umdrehung gewisser krummliniger Dreiecke um eine bestimmte Axe entstanden sind, und nach bestimmten optischen Principien construirt werden müssen. Ich will daher jetzt die Theorie dieser Ringe in möglichster Kürze entwickeln, und zu dem Ende zuerst die folgende Aufgabe auflösen.

Erste Aufgabe.

In Fig. 11. sei MN eine gegebene gerade Linie und F ein leuchtender Punkt in derselben. Wenn nun FG ein von F ausgehender, gegen MN unter dem Winkel i geneigter Strahl ist, so soll man das geradlinige Dreieck ABC der Gestalt und Lage nach so bestimmen, dass, wenn der Strahl FG bei AB in G nach GH gebrochen, bei BC in H nach HJ reflectirt, und bei CA in J nach JK gebrochen wird, die Strahlen GH, HJ, JK respective den Linien AC, AB, MN parallel sind.

Auflösung.

Den Einfallswinkel und den Brechungswinkel bei G wollen wir durch ω und ω_1 bezeichnen, der Einfallswinkel und der Brechungswinkel bei J sollen durch $\overline{\omega}_1$ und $\overline{\omega}$ bezeichnet werden, wie in der Figur näher angedeutet worden ist. Dann haben wir, indem μ seine frühere Bedeutung behält, die Gleichungen:

$$\sin\omega_1 = \mu\sin\omega\,, \quad \sin\overline{\omega}_1 = \mu\sin\overline{\omega}\,.$$

Weil nach den Bedingungen der Aufgabe $AGHJ$ ein Parallelogramm ist, so ist

$$\angle BAC = 90^0 + \omega_1 = 90^0 + \overline{\omega}_1\,,$$

also $\omega_1 = \overline{\omega}_1$, und folglich wegen der obigen Gleichungen auch $\omega = \overline{\omega}$, woraus sich ferner

$$\angle BGF = \angle CJK$$

ergiebt. Nun ist

$$\varphi = 90^0 + \omega + i, \quad 90^0 - \omega_1 = 180^0 - \varphi + \psi;$$

also

$$\omega = \varphi - i - 90^0, \quad \omega_1 = \varphi - \psi - 90^0$$

und folglich

$$\sin\omega = -\cos(\varphi - i), \quad \sin\omega_1 = -\cos(\varphi - \psi)\,.$$

Wegen der Gleichung

$$\sin\omega_1 = \mu\sin\omega$$

ist also

$$\cos(\varphi - \psi) = \mu\cos(\varphi - i)\,.$$

Weil aber nach den Bedingungen der Aufgabe JK mit MN parallel sein soll, so ist

$$\angle CJK=\psi,$$

und ferner ist

$$\angle BGF=i-\varphi+180^{\circ};$$

also ist, weil nach dem Obigen $\angle BGF=\angle CJK$ ist:

$$\psi=i-\varphi+180^{\circ},$$

folglich

$$\varphi-\psi=2\varphi-i-180^{\circ},$$

also

$$\cos(\varphi-\psi)=-\cos(2\varphi-i),$$

und daher nach dem Obigen:

$$\cos(2\varphi-i)=-\mu\cos(\varphi-i),$$

mittelst welcher Gleichung φ bestimmt werden kann. Jedoch wird diese Gleichung etwas einfacher, wenn man statt des Winkels φ den Winkel ω als unbekannte Grösse einführt. Weil nämlich nach dem Obigen

$$\varphi=90^{\circ}+\omega+i$$

ist, so ist

$$\varphi-i=90^{\circ}+\omega,\quad 2\varphi-i=2\omega+i+180^{\circ};$$

also

$$\cos(\varphi-i)=-\sin\omega,\quad \cos(2\varphi-i)=-\cos(2\omega+i);$$

und daher nach dem Obigen:

$$\cos(2\omega+i)=-\mu\sin\omega.$$

Führt man nun noch statt i den Complementarwinkel i dieses Winkels ein, so dass

$$\mathrm{i}=90^{\circ}-i,\quad i=90^{\circ}-\mathrm{i}$$

ist, so ist

$$2\omega+i=2\omega-\mathrm{i}+90^{\circ},\quad \cos(2\omega+i)=-\sin(2\omega-\mathrm{i});$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\sin(2\omega-\mathrm{i})=\mu\sin\omega.$$

Mittelst dieser Gleichung muss, nachdem man i aus i mittelst der Formel

$$\mathrm{i}=90^0-i$$

berechnet hat, der Winkel ω bestimmt werden. Hat man aber ω, so ergeben sich φ, ψ leicht mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln

$$\varphi=90^0+\omega+i$$

und

$$\psi=i-\varphi+180^0=90^0-\omega,$$

und den Winkel BAC erhält man mittelst der Formel

$$\angle BAC=\varphi-\psi=2\omega+i.$$

Weil ferner nach dem katoptrischen Grundgesetze BC gegen HG und HJ unter gleichen Winkeln geneigt sein muss, und offenbar $\angle BGH=\angle CJH$ ist, da $AGHJ$ ein Parallelogramm ist, so ist offenbar auch $\angle ABC=\angle ACB$, also das Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck, folglich $AB=AC$. Durch den Winkel BAC an der Spitze ist das gleichschenklige Dreieck ABC offenbar der Gestalt nach vollkommen bestimmt, und die Winkel φ und ψ bestimmen seine Lage gegen die Linie MN, so dass also jetzt schon alles Dasjenige bestimmt ist, was die Aufgabe verlangte. Nimmt man aber etwa noch die Lage der Spitze A dieses Dreiecks als gegeben an, so kann man dieselbe als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems betrachten, dessen erste Axe der gegebenen Linie MN parallel ist; und nimmt man dann in diesem Systeme die positiven ersten Coordinaten nach der linken Seite hin, die positiven zweiten Coordinaten nach oben hin; so sind in diesem Coordinatensysteme mit dem Anfange A, wenn wir, indem L eine beliebige Länge bezeichnet, $AB=AC=L$ setzen:

die Coordinaten von B: $L\cos\varphi$, $L\sin\varphi$;

die Coordinaten von C: $L\cos\psi$, $L\sin\psi$;

mittelst welcher Formeln die Lage der Spitzen B und C des gleichschenkligen Dreiecks ABC für jede beliebige Länge L seiner gleichen Schenkel leicht bestimmt werden kann, wenn die Lage der Spitze A als gegeben angenommen wird. Sind p, q die Coordinaten der Spitze A in einem beliebigen dem vorhergehenden parallelen Coordinaten-Systeme, so sind in diesem Systeme:

die Coordinaten von B: $p+L\cos\varphi$, $q+L\sin\varphi$;

die Coordinaten von C: $p+L\cos\psi$, $q+L\sin\psi$.

Alles kommt bei der vorhergehenden Rechnung auf die Auflösung der Gleichung

$$\sin(2\omega - i) = \mu \sin\omega$$

an. Man kann diese Gleichung zweckmässig durch Näherung auflösen, was einer weiteren Erläuterung nicht bedarf. Entwickelt man dieselbe aber gehörig, so kommt man auf eine Gleichung des vierten Grades, wie jetzt gezeigt werden soll. Es ist nämlich

$$\sin 2\omega \cos i - \cos 2\omega \sin i = \mu \sin\omega,$$

also

$$2\sin\omega \cos\omega \cos i - (1 - 2\sin\omega^2)\sin i = \mu \sin\omega,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen $u = \sin\omega$ setzen:

$$2\cos i . u\sqrt{1-u^2} - \sin i .(1-2u^2) = \mu u$$

oder

$$2\cos i . u\sqrt{1-u^2} = \mu u + \sin i .(1-2u^2);$$

also, wenn man auf beiden Seiten quadrirt:

$$4\cos i^2 . u^2(1-u^2) = \mu^2 u^2 + \sin i^2 .(1-4u^2+4u^4) + 2\mu \sin i . u(1-2u^2),$$

und, wenn man nun diese Gleichung gehörig nach Potenzen von u ordnet:

$$0 = \sin i^2 + 2\mu \sin i . u + (\mu^2 - 4\sin i^2 - 4\cos i^2)u^2$$
$$- 4\mu \sin i . u^3 + 4(\sin i^2 + \cos i^2)u^4,$$

also

$$4u^4 - 4\mu \sin i . u^3 + (\mu^2 - 4)u^2 + 2\mu \sin i . u + \sin i^2 = 0$$

oder

$$u^4 - \mu \sin i . u^3 - (1 - \frac{1}{4}\mu^2) u^2 + \frac{1}{2}\mu \sin i . u + \frac{1}{4}\sin i^2 = 0 .$$

Für $i = 0$ erhält man $u = 0$ und

$$u^2 - (1 - \frac{1}{4}\mu^2) = 0, \quad u = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}\mu^2},$$

wo

$$0 < 1 - \frac{1}{4}\mu^2 < 1$$

ist, da bekanntlich $\mu < 1$ ist.

Für $i = 90^0$, $\sin i = 1$, bringt man die Gleichung leicht auf die Form

$$(u^2-\frac{1}{2})^2-\mu u(u^2-\frac{1}{2})+\frac{1}{4}\mu^2u^2=0,$$

also

$$(u^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu u)^2=0,$$

oder

$$u^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu u=0,$$

woraus sich

$$u=\frac{1}{4}\mu\pm\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\mu^2}$$

ergiebt.

Für $\mu=\frac{2}{3}$ ist

$$u=\frac{1\pm\sqrt{19}}{6}.$$

Hat man für irgend einen Werth von i den entsprechenden Werth von ω gefunden, so dass

$$\sin(2\omega-i)=\mu\sin\omega$$

ist, und lässt dann i eine kleine Veränderung ∂i erleiden, so kann man leicht die entsprechende kleine Veränderung $\partial\omega$ von ω wenigstens näherungsweise durch eine Differentialformel berechnen.

Es ist nämlich

$$\sin\{2(\omega+\partial\omega)-(i+\partial i)\}=\mu\sin(\omega+\partial\omega)$$

oder

$$\sin\{2\omega-i+(2\partial\omega-\partial i)\}=\mu\sin(\omega+\partial\omega),$$

und folglich näherungsweise, wenn man bei Gliedern stehen bleibt, die in Bezug auf ∂i und $\partial\omega$ von der ersten Ordnung sind:

$$\sin(2\omega-i)+\cos(2\omega-i).(2\partial\omega-\partial i)=\mu\sin\omega+\mu\cos\omega\partial\omega,$$

also, weil nach der Voraussetzung

$$\sin(2\omega-i)=\mu\sin\omega$$

ist:

$$\cos(2\omega-i).(2\partial\omega-\partial i)=\mu\cos\omega\partial\omega,$$

woraus sich

$$\partial\omega=\frac{\cos(2\omega-i)}{2\cos(2\omega-i)-\cos\omega}\partial i$$

ergiebt. Dieser Formel kann man sich bei Berechnung einer Tafel der, verschiedenen Werthen von i entsprechenden Werthe von ω mit Vortheil bedienen. Die Berechnung einer solchen Tafel scheint wünschenswerth und eine dankenswerthe Aufgabe für einen Rechner zu sein; einen Anfang findet man in der angeführten Schrift von Hess S. 61. Am besten wird man eine solche Tafel von $i=0$ bis $i=90^{0}$ berechnen. Für diese beiden Gränzwerthe von i kann man nach dem Obigen die entsprechenden Werthe von ω genau berechnen. Geht man von $i=0$ aus, und bedient sich der obigen Näherungsformeln, so muss für $i=90^{0}$ der durch die Näherung gefundene Werth von ω mit dem im Voraus berechneten genauen Werthe übereinstimmen, wenn die Näherungsrechnung genau geführt war.

Hat man auf diese Weise die Gestalt und Lage des Dreiecks *ABC* bestimmt, so ist klar, dass alle unter dem Winkel *i* gegen die gegebene Linie *MN* geneigten, auf *AB* fallenden Strahlen nach ihrem Austreten bei *AC* der Linie *MN* parallel werden, was durch Fig. 12. näher erläutert und gewiss völlig deutlich gemacht werden wird. Könnte man also annehmen, dass alle auf *AB* fallenden, von dem leuchtenden Punkte *F* (Fig. 11.) ausgehenden Strahlen unter einander parallel wären, so würde man durch Drehung des Dreiecks *ABC* um eine in *F* auf *MN* senkrecht stehende Axe einen Ring erhalten, durch den alle von *F* ausgehende Strahlen nach zweimaliger Refraction und zwischen diesen beiden Refractionen liegender einmaliger Reflexion in eine mit der bei der in Rede stehenden Drehung von der Linie *MN* beschriebenen Ebene parallele Lage gebracht werden. Weil sich aber die parallele Lage der *AB* treffenden, von *F* ausgehenden Strahlen nicht in aller Strenge, — wegen der Kleinheit von *AB* nur näherungsweise, — annehmen lässt, so erfordert diese Convergenz der Strahlen nach *F* hin eine Art von Correction der Gestalt des Dreiecks *ABC*, die man dadurch erreicht, dass man die Seite *BC* desselben nicht geradlinig macht, sondern nach einem Kreisbogen krümmt, wodurch zugleich, wie wir nachher sehen werden, die Gleichheit der Seiten *AB* und *AC* verloren geht. Wie nun dieser Kreisbogen bestimmt werden muss, wollen wir jetzt zeigen, indem wir dabei die Länge der Seite $AC=L$ als gegeben, und überhaupt die Lage des Dreiecks *ABC*, so wie auch dessen Winkel *BAC*, als nach dem Vorhergehenden schon vollkommen bestimmt annehmen.

Wir wollen uns zuerst in Fig. 13. zwei der Linie MN parallele Strahlen JK und J_1K_1 denken, von denen der erstere JK von dem unendlich nahe bei C in AC liegenden Punkte J, der letztere von dem unendlich nahe bei A in AC liegenden Punkte J_1 ausgeht. Die diesen Strahlen entsprechenden gebrochenen Strahlen JD und J_1D_1 sind bekanntlich beide der Linie AB parallel. Der Strahl JD geht von dem Punkte D in BC aus, der entsprechende reflectirte Strahl ist der Linie AC parallel, und die den von den beiden reflectirten Strahlen bei D eingeschlossenen Winkel halbirende Linie DO steht in D auf der Linie BC senkrecht. Der Strahl J_1D_1 soll jetzt ferner von einem aus F ausgehenden, AB in dem Punkte B_1 treffenden und in B_1 nach B_1D_1 gebrochenen Strahle F_1B_1 in dem Punkte D_1 so getroffen werden, dass, wenn man den Winkel $B_1D_1J_1$ durch die Linie D_1O halbirt, die sich in O schneidenden Linien DO und D_1O, oder, was dasselbe ist, die Winkel ODD_1 und OD_1D, einander gleich sind. Beschreibt man dann aus O als Mittelpunkt mit $OD=OD_1$ als Halbmesser durch die Punkte D und D_1 einen Kreisbogen, und denkt sich nur immer die Punkte D und D_1, wie es erforderlich ist, unendlich nahe respective bei AC und AB, so wird jedenfalls das theilweise krummlinige Dreieck ADD_1 wenigstens mit grosser Annäherung die Eigenschaft haben, dass alle von F ausgehenden, nicht genau einander parallelen Strahlen, nachdem sie in dem Dreiecke eine zweimalige Refraction und eine zwischen diesen beiden Refractionen stattfindende einmalige Reflexion erlitten haben, zuletzt nach mit MN parallelen Richtungen aus dem in Rede stehenden Dreiecke ausfahren. Aus diesen vorläufigen Betrachtungen ergiebt sich nun sehr leicht, dass die Bestimmung des in Rede stehenden, theilweise krummlinigen Dreiecks lediglich auf die Auflösung der folgenden Aufgabe zurückkommt.

Zweite Aufgabe.

In der Seite AB (Fig. 14.) des nach dem Vorhergehenden der Gestalt und Lage nach schon vollständig bestimmten geradlinigen gleichschenkligen Dreiecks ABC, wo $AB=AC=L$ eine gegebene Grösse ist, soll man einen Punkt B_1 von solcher Lage bestimmen, dass, wenn man den von AB_1 und dem über B_1 hinaus verlängerten, dem einfallenden Strahle FB_1 entsprechenden gebrochenen Strahle B_1E eingeschlossenen Winkel durch die Linie B_1O halbirt, und in C auf BC das Perpendikel CO errichtet, der Durchschnittspunkt O der beiden Linien B_1O und CO von den beiden Punkten B_1 und C gleich weit entfernt ist, so dass die beiden Linien B_1O und CO also einander gleich sind.

Auflösung.

Man wird bei der Auflösung dieser Aufgabe sich am besten der Methode der successiven Näherungen bedienen. Denkt man

sich nämlich noch die Linie B_1C gezogen, so ist

$$\angle OB_1C = \angle OCB_1$$

die zu erfüllende Bedingungsgleichung. Man nehme nun AB_1 willkührlich an, dann kennt man in dem Dreiecke AB_1C die Seiten AB_1, $AC = L$ und den eingeschlossenen Winkel $B_1AC = \angle BAC$, und kann also die übrigen Stücke dieses Dreiecks berechnen. Also kann man jetzt den Winkel OCB_1 finden, weil offenbar, da CO auf BC senkrecht steht,

$$\angle OCB_1 = 90^0 - \angle ACB + \angle ACB_1$$

ist, und die Winkel ACB und ACB_1 nach dem Vorhergehenden bekannt sind. Die Linie AF ist jederzeit als bekannt anzusehen, weil die Punkte F und A gegeben sind, und ferner ist

$$\angle B_1AF = i - \varphi + 180^0;$$

also kann man aus den Seiten AB_1, AF und dem eingeschlossenen Winkel B_1AF alle übrigen Stücke des Dreiecks AB_1F, folglich auch den Winkel BB_1F berechnen. Die Ergänzung dieses letzteren Winkels zu 90^0 ist der Einfallswinkel des Strahls FB_1 bei B_1, aus welchem sich mittelst des dioptrischen Grundgesetzes auch leicht der entsprechende Brechungswinkel finden lässt. Addirt man zu diesem Brechungswinkel 90^0, so erhält man den Winkel BB_1E und kann nun den Winkel OB_1C berechnen, weil nach den Bedingungen der Aufgabe

$$\angle OB_1C = \angle AB_1C + \frac{1}{2}\angle BB_1E$$

ist. Man kennt also jetzt die Winkel OCB_1 und OB_1C, und kann nun prüfen, ob die Bedingungsgleichung

$$\angle OB_1C = \angle OCB_1$$

erfüllt ist. Findet sich diese Gleichung genau erfüllt, so ist AB_1 richtig angenommen; im entgegengesetzten Falle muss man AB_1 so lange verbessern, bis die in Rede stehende Bedingungsgleichung genau erfüllt wird, wonach man dann den richtigen Werth von AB_1 gefunden hat.

Hat man auf diese Weise AB_1 gefunden, und also natürlich zu gleicher Zeit auch B_1C und $\angle OB_1C = \angle OCB_1$ bestimmt, so erhält man die Halbmesser $B_1O = CO$ mittelst der Formel

$$B_1O = CO = \frac{B_1C}{2\cos OB_1C}.$$

Sind wie früher p, q die Coordinaten von A, so sind:

die Coordinaten von B_1: $p + AB_1.\cos\varphi$, $q + AB_1.\sin\varphi$;

die Coordinaten von C: $p + AC.\cos\psi$, $q + AC.\sin\psi$.

Denkt man sich von B_1 auf MN das Perpendikel B_1Q gefällt, und durch O mit MN die Parallele OQ gezogen, so kann man den Winkel OB_1Q leicht berechnen, weil

$$\angle OB_1Q = \angle AB_1Q + \angle AB_1C - \angle OB_1C$$

und

$$\angle AB_1Q = \varphi - 90^0$$

ist, die Winkel AB_1C und OB_1C aber gleichfalls aus dem Obigen bekannt sind. Hat man aber $\angle OB_1Q$, so kennt man auch

$$B_1Q = B_1O . \cos OB_1Q, \quad OQ = B_1O . \sin OB_1Q$$

und kann nun aus den schon bekanten Coordinaten von B_1 und den Linien B_1Q und OQ offenbar immer auch leicht die Coordinaten des Mittelpunktes O des zu bestimmenden Kreisbogens B_1C berechnen, was einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen wird.

Das theilweise krummlinige Dreieck AB_1C ist jetzt also vollkommen bestimmt, und den entsprechenden Glasring erhält man wieder wie oben, wenn man dieses Dreieck sich um eine in F auf MN senkrecht stehende Axe drehen lässt.

Mehrere solcher Glasringe werden nun zu einer Art von Kuppel mit einander vereinigt, bei deren Anordnung man im Allgemeinen nach den folgenden Principien verfahren muss. In Fig. 15. stelle LL_1 eine Hauptlinse vor und F sei der leuchtende Punkt, die durch F gehende Linie MN stehe auf LL_1 senkrecht; so hat man die Spitze A des den ersten obern Glasring beschreibenden theilweise krummlinigen Dreiecks ABC in den Punkt L, oder wenigens nahe an diesen Punkt zu legen. Ist nun nach der vorhergehenden Anleitung dieses Dreieck vollständig der Gestalt und Lage nach bestimmt und dadurch gehörig festgelegt, so ziehe man die Linie FB und durch C eine Parallele mit der Linie MN; schneiden sich nun diese beiden Linien, gehörig verlängert, in A_1, so kommt in diesen Punkt die Spitze A_1 des zweiten Dreiecks $A_1B_1C_1$ zu liegen, welches nun ferner auf ähnliche Weise wie das erste Dreieck ABC bestimmt wird. Hierauf ziehe man die Linie FB_1 und durch C_1 eine Parallele mit der Linie MN, so bestimmt der Durchschnittspunkt A_2 dieser beiden Linien die Lage der Spitze A_2 des dritten Dreiecks $A_2B_2C_2$, welches ferner wieder auf dieselbe Art wie das erste Dreieck ABC bestimmt wird. Wie man auf diese Art weiter gehen, und die Kuppel aus einer beliebigen Anzahl von Glasringen zusammensetzen kann, ist klar, so wie sich auch von selbst versteht, dass man eine ähnliche Kuppel unterhalb von den Hauptlinsen LL_1 anordnen kann, bei der die zu erfüllenden Bedingungen von den bei der oberen Kuppel zu erfüllenden Bedingungen nicht wesentlich verschieden sind, und nur durch die mechanische Einrichtung des ganzen Apparats einigermaassen modificirt werden können.

Diese mechanischen Einrichtungen weiter zu besprechen, ist aber, wie schon mehrmals erinnert worden ist, nicht der Zweck dieser Abhandlung, welche lediglich die Theorie des eigentlichen optischen Theils der für Leuchtthürme bestimmten Beleuchtungsapparate in's Auge zu fassen beabsichtigte. Ueber alles Technische findet man genügende Auskunft in der angeführten, in dieser Beziehung zu empfehlenden Schrift von Hess, und in Alan Stevenson's ebenfalls schon oben angeführten Werke über den Skerryvore-Leuchtthurm, worauf wir uns daher hier zu verweisen erlauben.

XXIV.

De l'expression goniométrique des racines de l'équation du 4ième degré.

Par
M. E. G. Björling
à Westerås en Suède.

(Extrait de l'aperçu des Transactions de l'Acad. des sciences de Stockholm, Séance du 13. Nov. 1850.).

J'ai montré, dans une communication du 9. Oct. passé*), que l'expression goniométrique des racines de l'équation du 3. degré dans le „casus irreductibilis" s'adapte en effet nettement aux racines dans tous les cas, et même que l'on peut la dériver de l'équation d'une manière la plus directe et la plus simple. Il m'a intéressé d'examiner, si quelque chose d'analogue serait à obtenir à l'égard de l'équation du 4. degré. Et quoique (comme il était facile de prévoir) aucune analogie complète ne peut avoir lieu entre le mode de solution des équations de ces deux degrés-là, cette recherche a pourtant conduit à une méthode, à ce que je sais, tout-à-fait nouvelle de résoudre l'équation du 4. degré, methode qui ne sera peut-être sans intérêt en général, et qui, de plus, dans un cas très-etendu conduit directement à une expression algébrique très-simple des racines. — Afin de me frayer le chemin au but désiré, je faisais d'abord l'essai de l'équation du 2. degré, en prévoyant (comme il était naturel) qu'il exista nécessairement une véritable analogie entre le mode de solution des équations de ce degré et celui des équations du 4. degré. C'est pourquoi je vais aussi présenter ici la chose en même ordre.

---

*) M. s. Heft 2. S. 228.

§. 1. L'équation du 2ième degré.

Afin de résoudre l'équation

(1) $$x^2 - ax + b = 0, \quad (b \text{ n'étant pas} = 0),$$

on peut, en mettant

2) $$x = y\,\mathrm{tang}z,$$

chercher toutes les valeurs de $y\,\mathrm{tang}z$ qui satisfont à l'équation

$$y^2\sin^2 z - ay\sin z\cos z + b\cos^2 z = 0,$$

ou bien, en posant

(3) $$y^2 = b, \text{ ou plutôt } y = \sqrt{b},$$

chercher toutes les valeurs de z, qui satisfont à l'équation

$$b = \frac{1}{2}\,a\sqrt{b}.\sin 2z$$

ou (au moins, si a n'est pas$=0$) à l'équation

(4) $$z = \frac{1}{2}\arcsin\left(\left(\frac{2b}{a\sqrt{b}}\right)\right).$$

Par conséquent, les racines de l'équation proposée (au moins, si l'on excepte le cas de $a=0$) se trouvent comprises dans le second membre de la formule

(5) $$x = \sqrt{b}.\mathrm{tang}\frac{1}{2}\left[\arcsin\left(\left(\frac{2b}{a\sqrt{b}}\right)\right)\right],$$

ou, ce qui revient au même, en vertu de la relation

(6) $$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v = \frac{1-\cos v}{\sin v},$$

dans le second membre de la suivante:

$$x = \frac{1}{2}a\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right),$$

ou enfin dans celle-ci:

$$(7) \qquad x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b},$$

qui, au reste, comme on sait, convient également au cas spécial $a=0$.

§. 2. L'équation du 4ième degré.

1. Afin de résoudre l'équation

$$(8) \qquad x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0, \text{ (d n'étant pas $=0$)},$$

on peut, en faisant usage encore ici de la position (2) ci-dessus, chercher toutes les valeurs de $y\tan gz$ qui satisfont à l'équation

$$y^4\sin^4z+ay^3\sin^3z\cos z+by^2\sin^2z\cos^2z+cy\sin z\cos^3z+d\cos^4z=0,$$

ou, en vertu des relations

$$\sin^4z=\sin^2z-\sin^2z\cos^2z,$$

$$\cos^4z=\cos^2z-\sin^2z\cos^2z,$$

à l'équation

$$y^4\sin^2z+ay^3\sin^3z\cos z-(y^4-by^2+d)\sin^2z\cos^2z+cy\sin z\cos^3z$$
$$+d\cos^2z=0,$$

ou bien, en posant $y=$ une des racines de l'équation

$$(9) \qquad y^4=d,$$

chercher toutes les valeurs correspondantes de z qui satisfont à l'équation

$$y^3+ay^2\sin^3z\cos z-(2y^2-b)y\sin^2z\cos^2z+c\sin z\cos^3z=0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10) \qquad (2y^2-b)y\sin^22z-2(ay^2\sin^2z+c\cos^2z)\sin2z=4y^3.$$

Maintenant, si l'on avait

$$(11) \qquad c=ay^2,$$

puisqu'alors l'équation précédente (10) se réduirait à

$$(12) \qquad (2y^2-b)\sin^22z-2ay\sin2z=4y^2,$$

il est évident qu'alors on parviendrait aisément à la fin proposée

Au reste, comme cette condition (11) se réduit, en vertu de la formule (9), à

$$c=\pm a\sqrt{d},$$

on conçoit aisément qu'elle peut être remplie toutes les fois qu'il existe, entre les coefficients de l'équation proposée, la relation

$$(13) \qquad c^2=a^2d.$$

En effet, suivant que c soit $=a\sqrt{d}$ ou $=-a\sqrt{d}$, il suffira évidemment d'adopter la position $y=\sqrt[4]{d}$ ou la position $y=i\sqrt[4]{d}$.

Par consequent, les racines de l'équation proposée (8), dans le cas particulier (13), sont comprises dans le 2. membre de l'équation

$$x=y\tan z,$$

(14) y étant $=\sqrt[4]{d}$ ou $=i\sqrt[4]{d}$, suivant que c est $=+$ ou $-a\sqrt{d}$,

et

z désignant (pour abréger) l'expression générale qui comprend toutes les valeurs corréspondantes de z, propres à verifier l'équation (12), c'est à dire, au moins si l'on excepte le cas singulier

$$(15) \qquad b=2y^2,$$

$$(16) \qquad z=\frac{1}{2}\arcsin\left(\left(\frac{y}{2y^2-b}\left[a\pm\sqrt{a^2+4(2y^2-b)}\right]\right)\right),$$

et, par suite, elles seront, en vertu de la relation (6), les quatre suivantes:

$$x=\frac{2y^2-b}{a\pm\sqrt{a^2+4(2y^2-b)}}\left\{1+\sqrt{1-\frac{y^2}{(2y^2-b)^2}\left[a\pm\sqrt{a^2+4(2y^2-b)}\right]^2}\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

(17)

$$x=-\frac{a\pm\sqrt{a^2+4(2y^2-b)}}{4}+\sqrt{\left[\frac{a\pm\sqrt{a^2+4(2y^2-b)}}{4}\right]^2-y^2},$$

(savoir, le même des deux signes $\pm$ dans les deux termes).

Au reste, il est aisé de vérifier maintenant, qu'en effet cette dernière expression des racines convient égalément au cas même singulier (15)*).

2. Lorsque, au contraire, la relation (13) n'existe pas entre les coefficients de l'equation proposée (8), il est toujour possible de la transformer en une autre équation de même degré dont les coefficients remplissent cette condition (13). Car, en posant dans l'équation (8)

$$x = x_1 + u,$$

elle se réduit à

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} x_1^4 + 4u & x_1^3 + 6u^2 & x_1^2 + 4u^3 & x_1 + u^4 \\ \quad + a & \quad + 3au & \quad + 3au^2 & \quad + au^3 \\ & \quad + b & \quad + 2bu & \quad + bu^2 \\ & & \quad + c & \quad + cu \\ & & & \quad + d \end{array}\right\} = 0,$$

ou, pour abréger,

$$(19) \quad x_1^4 + \frac{U'''}{1.2.3} x_1^3 + \frac{U''}{1.2} x_1^2 + \frac{U'}{1} x_1 + U = 0,$$

ou, enfin,

$$(19') \quad x_1^4 + a_1 x_1^3 + b_1 x_1^2 + c_1 x_1 + d_1 = 0;$$

et la relation des coefficients dont il s'agit, savoir,

$$(20) \quad c_1^2 = a_1^2 d_1, \quad \text{ou } U'^2 = \left(\frac{U'''}{1.2.3}\right)^2 U,$$

---

*) En effet 1°) si

$$c \text{ est } = a\sqrt{d} = ay^2, \; b = (2y^2 =) 2\sqrt{d},$$

l' équation proposée (8) a la forme

$$x^4 + ax^3 + 2\sqrt{d}.x^2 + a\sqrt{d}.x + d = 0$$

ou bien

$$(x^2 + \sqrt{d})(x^2 + ax + \sqrt{d}) = 0;$$

et 2°) si

$$c \text{ est } = -a\sqrt{d} = ay^2, \; b = (2y^2 =) - 2\sqrt{d},$$

l'équation (8) a la forme

$$(x^2 - \sqrt{d})(x^2 + ax - \sqrt{d}) = 0;$$

et on reconnait aisément qu'en effet dans l'un et l'autre cas la formule (17) fournira les véritables racines de ces équations.

se réduit — chose remarquable — à l'équation suivante dont le degré ne surpassera jamais le 3e:

$$(21)\quad [8c+a(a^2-4b)]u^3+[16d+2ac+b(a^2-4b)]u^2 \\ +[8ad+c(a^2-4b)]u+(a^2d-c^2)=0.$$

Par conséquent, si l'on adopte pour u une quelconque des racines de cette équation, il s'ensuit de l'article précédent I. que les racines de l'équation (19) ci-dessus seront comprises dans la formule

$$x_1=y\tang z,$$

y étant $=\sqrt[4]{U}$ ou $=i\sqrt[4]{U}$, suivant que U' sera $=+$ ou $-\frac{U'''}{1.2.3}\sqrt{U}$,

savoir, $U=u^4+au^3+bu^2+cu+d$,

et z désignant (pour abréger) l'expression générale qui comprend toutes les valeurs correspondantes de l'inconnue z, propres à vérifier l'équation

$$\left(2y^2-\frac{U''}{1.2}\right)\sin^2 2z-2y.\frac{U'''}{1.2.3}\sin 2z=4y^2,$$

et, par suite, elles seront, en vertu de l'équation (17), les quatre suivantes:

$$(22)$$

$$x_1=-\frac{a_1\pm\sqrt{a_1{}^2+4(2y^2-b_1)}}{4}+\sqrt{\left[\frac{a_1\pm\sqrt{a_1{}^2+4(2y^2-b_1)}}{4}\right]^2-y^2},$$

(savoir, le même des deux signes $\pm$ dans les deux termes),

étant

$$a_1=\frac{U'''}{1.2.3},\quad b_1=\frac{U''}{1.2},\quad c_1=\frac{U'}{1},\quad d_1=U,$$

$$y=\sqrt[4]{d_1}\ \text{ou}=i\sqrt[4]{d_1},\ \text{suivant que}\ c_1\ \text{sera}=+\ \text{ou}-a_1\sqrt{d_1},$$

et enfin

$$(18)\quad x=x_1+u.$$

On conçoit bien que les racines de la transformée (19) seront en effet dépendantes de la choix que l'on ait faite entre les racines de l'équation (21) pour la définition de l'inconnue u. Mais on s'assure aisément que cette équation (21) aura toujours au moins une racine réelle, et que par suite il sera toujours possible de se procurer une transformée dont les racines ne différeront des racines de l'équation primitive que d'une quantité réelle. En effet, 1°) lorsque le coefficient de u^3 n'est pas $=0$, la chose est

évidente par soi-même; et 2°) lorsqu' il est $=0$, comme alors l'équation se réduit à

$$\left[16d-\left(\frac{a^2}{2}-2b\right)^2\right]u^2+\frac{a}{2}\left[16d-\left(\frac{a^2}{2}-2b\right)^2\right]u$$
$$+\frac{a^2}{16}\left[16d-\left(\frac{a^2}{2}-2b\right)^2\right]=0,$$

et que le coefficient de u^2 ne peut pas y être $=0$, c^2 n'étant pas $=a^2d$, il est évident qu'on aura dans ce cas définitivement

$$u=-\frac{a}{4}.$$

3. Quant à la discussion des racines d'une équation du 4e degré, pour ce qui concerne la détermination des cas où les racines sont réelles ou imaginaires, elle peut se faire très-aisément toutes les fois que l'on a

$$(13)\quad c^2=a^2d.$$

En effet, lorsque, dans ce cas,

1.) a et c sont des signes contraires,

puisqu' alors y désigne $i\sqrt[4]{d}$, et que par suite l'équation (17) se réduit à

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4(2\sqrt{d}+b)}}{4}+\sqrt{\left[\frac{a\pm\sqrt{a^2-4(2\sqrt{d}+b)}}{4}\right]^2+\sqrt{d}},$$

il est clair que, a) $2\sqrt{d}+b$ étant positif et supérieur à $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, toutes les racines seront imaginaires,

b) dans tout autre cas, toutes les racines réelles.

Lorsqu'au contraire, dans le même cas,

2.) a et c sont de même signe,

puisqu'alors y désigne $\sqrt[4]{d}$, et que par suite l'équation (17) se réduit à

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4(2\sqrt{d}-b)}}{4}+\sqrt{\left[\frac{a\pm\sqrt{a^2+4(2\sqrt{d}-b)}}{4}\right]^2-\sqrt{d}},$$

il est clair que, a) $2\sqrt{d}-b$ étant négatif et numériquement $> \left(\frac{a}{2}\right)^2$, toutes les racines seront imaginaires,

tandis que b) dans les autres cas, toutes les racines seront imaginaires, seulement, si $\sqrt{d}$ surpasse les deux carrés

$$\left\{\frac{a \pm \sqrt{a^2+4\left(\frac{2c}{a}-b\right)}}{4}\right\}^2,$$

toutes les racines seront réelles, seulement, si $\sqrt{d}$ ne surpasse pas l'un ni l'autre des mêmes carrés, et enfin

deux racines réelles et deux imaginaires, seulement, si $\sqrt{d}$, surpassant l'un de ces mêmes carrés, ne surpasse pas l'autre.

Et enfin, lorsque

3.) a et c sont l'un et l'autre $=0$,

puisqu'alors, soit qu'on fasse $y=\sqrt[4]{d}$ ou $=i\sqrt[4]{d}$, l'équation (17) devient

$$x=\pm\frac{\sqrt{2\sqrt{d}-b}\pm\sqrt{-(2\sqrt{d}+b)}}{2}=\pm\sqrt{\left(-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-d}\right)},$$

la discussion dont il s'agit est bien si simple qu'il n'y a pas à l'exposer ici.

Ajoutons, pour le cas où la condition (13) ne soit pas remplie par les coefficients de l'équation primitive, qu'au moins si l'on adopte pour valeur de u une racine réelle de l'équation (21)*), on pourra appliquer, alors aussi, verbalement ce qui vient d'être dit ci-dessus en 1°), 2°), 3°), pourvu toutefois qu'on remplace les lettres a, b, c, d par les dénominations précédentes des nouveaux coefficients a_1, b_1, c_1, d_1.

4. Pour en donner une espèce de vérification, considérons enfin cet exemple particulier:

$$x^4+2x^3+7x^2+18x-18=0.$$

La rélation (13) n'y a pas lieu. L'équation (21) devient ici:

---

*) En effet on voit bien que, par cette adoption, les coefficients de la transformée (19) déviendront réelles et que les racines d'elle ne différeront de celles de l'équation primitive que par une quantité réelle.

$$8u^3-32u^2-60u-33=0,$$

ou, au moyen des positions $u=t+\frac{4}{3}$, $2t=v$:

$$v^3-\frac{154}{3}v-\frac{4075}{27}=0,$$

dont les racines sont indiquées par la formule

$$v=\frac{2}{3}\sqrt{154}.\cos\left\{\frac{1}{3}\text{arc}\cos\left(\left(\frac{4075}{2\sqrt{(154)^3}}\right)\right)\right\},$$

et entre elles la racine réelle par

$$v=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2744}+\sqrt[3]{1331})=\frac{25}{3},$$

et, par suite, la valeur corréspondante de u par

$$u=\frac{11}{2}.$$

Maintenant les coefficients de la transformée (19) deviennent:

$$a_1=24,\quad b_1=\frac{443}{2},\quad c_1=6.157,\quad d_1=\frac{24649}{16},$$

la rélation $c_1{}^2=a_1{}^2d_1$ a donc lieu, et on obtient, en vertu des équations (22) et (18),

$$x=\frac{11}{2}-\frac{12\pm1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{12\pm1}{2}\right)^2-\frac{157}{4}};$$

et, par suite, les racines de l'équation primitive seront

$$-(1\pm\sqrt{3})\ \text{et}\ \pm3\sqrt{-1},$$

dont on peut aussi maintenant vérifier l'exactitude.

XXV.

Ueber Krümmung, Biegung und Abbildung krummer Oberflächen.

Von dem
Herrn Professor Dr. J. Dienger
an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

In dem Folgenden habe ich versucht, die hauptsächlichsten Sätze über Krümmung, Biegung und Abbildung krummer Oberflächen zusammenzustellen. Ausser den in den Lehrbüchern gewöhnlich vorkommenden Sätzen über Krümmung, die ich der Vollständigkeit wegen glaubte ebenfalls aufführen zu müssen, wurden namentlich die Sätze von Gauss über Biegung und Abbildung der krummen Oberflächen nachgewiesen. Benutzt habe ich dabei folgende Werke: Sphäroidische Trigonometrie vom Herausgeber des Archivs, (Berlin, 1833. 4°.), fünftes Kapitel; eine Abhandlung von Minding im 19ten Bande des Crelle'schen Journals, S. 370. ff., so wie eine solche desselben Verfassers im 20sten Bande jenes Journals, S. 323.; Schmidts mathematische Geographie, 1ster Band S. 130 ff.; und endlich die Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie von Gauss. (Göttingen, 1844.).

§. 1.

Sei

$$f(x, y, z) = u = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer krummen Oberfläche, A ein Punkt derselben, dessen Koordinaten seien x, y, z. Von dem Punkte

A aus gehe man auf der Oberfläche (1) zu einem unendlich nahen Punkte A', dessen Koordinaten seien

$$x+\Delta x,\quad y+\Delta y,\quad z+\Delta z,$$

wo Δx, Δy, Δz unendlich klein sind. Da A' auch auf der Oberfläche (1) liegt, so ist also auch

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)=0. \tag{2}$$

Denken wir uns nun eine Gerade durch die Punkte A und A', so ist dieselbe Tangente an jede Kurve, der das Element AA' angehört. Die Gleichungen derselben sind mithin:

$$Z-z=\frac{\Delta z}{\Delta x}(X-x),\quad Y-y=\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x);$$

d. h.

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x),\quad Y-y=\frac{\partial y}{\partial x}(X-x); \tag{3}$$

wenn X, Y, Z die laufenden Koordinaten der Geraden sind. Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt aber bekanntlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=1; \tag{4}$$

eliminirt man nun zwischen (3) und (4) die Grössen $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0, \tag{5}$$

welches die Gleichung einer durch den Punkt A gehenden Ebene ist. Diese Ebene enthält also die Tangenten an alle möglichen durch den Punkt A gehenden und auf der krummen Oberfläche befindlichen Kurven, und heisst eben desshalb die Tangentialebene an die krumme Oberfläche im Punkte A.

Diejenige Gerade, welche im Punkte A auf der Ebene (5), also auch auf der Fläche (1), senkrecht steht, heisst Normale an die Oberfläche. Dieselbe steht also auch senkrecht auf allen Tangenten, die man nach dem Obigen durch den Punkt A ziehen kann. Ihre Gleichungen werden mithin sein:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(Z-z)=\frac{\partial u}{\partial z}(X-x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(Y-y)=\frac{\partial u}{\partial y}(X-x). \tag{6}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$k=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

und sind α, β, γ die Winkel, welche die Normale mit den drei Koordinatenaxen macht, so ist also:

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \cos\beta=\pm\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y},\quad \cos\gamma=\pm\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial z};\qquad (7)$$

worin die obern und untern Zeichen zusammengehören. So lange Nichts festgesetzt ist über die spezielle Richtung der Normale, muss das Doppelzeichen in den Formeln (7) angewendet werden. Um aber diese spezielle Feststellung vornehmen zu können, mag Folgendes bemerkt werden.

Denken wir uns, vom Punkte A aus werde auf der Normale und zwar nach beiden Seiten der krummen Fläche hin fortgegangen, so wird die Grösse u, welche Null ist, wenn man in ihr für x, y, z die Koordinaten des Punkts A setzt, positiv oder negativ sein, wenn man für x, y, z die Koordinaten irgend eines andern der Punkte der Normale setzt. Wählen wir nun einen dem Punkte A unendlich nahen Punkt B auf der Normale, dessen Koordinaten seien

$$x+\Delta x,\quad y+\Delta y,\quad z+\Delta z$$

und zwar sei derselbe auf dem Theile der Normale, dem in (7) die obern Zeichen zugehören, und sei noch

$$r=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}.$$

Alsdann ist offenbar:

$$\Delta x=\frac{r}{k}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \Delta y=\frac{r}{k}\frac{\partial u}{\partial y},\quad \Delta z=\frac{r}{k}\frac{\partial u}{\partial z}$$

und der Werth von u, den man erhält, wenn man für x, y, z die Koordinaten des Punktes B setzt, ist

$$u'=u+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varrho,$$

wo ϱ ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung und u der Werth ist, den man erhält, wenn man für x, y, z die Koordinaten des Punktes A setzt, d. h. $u=0$, mithin

$$u'=\frac{\partial u}{\Delta x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varrho=\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)\,k}{r}+\varrho=rk+\varrho.$$

d. h. u' ist positiv. Folglich muss das obere Zeichen in (7) dann genommen werden, wenn man die Normale von A aus nach der Seite der krummen Oberfläche verlängert, nach der u positive Werthe erlangt. Man beweist ganz eben so, dass nach der entgegengesetzten Seite hin u negative Werthe erlangt. Die erste Seite der Fläche soll die positive, die zweite die negative heissen, und wir wollen also inskünftig die Normale von dem Punkte A aus nach der positiven Seite der krummen Fläche ans verlängert denken, so dass wir in (7) bloss die obern Zeichen beizubehalten brauchen.

In der Regel wird, wenn man einmal auf der positiven Seite der Fläche sich befindet, u immer positive Werthe haben; es müsste denn sein, dass die Normale die Fläche noch einmal träfe, wo dann ein Zeichenwechsel vor sich ginge.

§. 2.

Wir wollen uns nun auf einer krummen Oberfläche (1) von dem Punkte A aus in einer bestimmten (aber beliebigen) Richtung hin zwei Kurvenelemente, d. h. nebst A noch zwei auf einander folgende unendlich nahe Punkte denken, deren Koordinaten seien:

$$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z; \quad x+2\Delta x,\ y+2\Delta y+\Delta^2 y,\ z+2\Delta z+\Delta^2 z;$$

wo wir also x als die unabhängig Veränderliche ansehen. Da diese Punkte ebenfalls auf der Fläche (1) liegen, so muss, nach einer bekannten Betrachtungsweise der Differentialrechnung, auch sein:

$$u=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0. \qquad (8)$$

Ist die Richtung, in der man vorgeht, bestimmt, so sind es auch

$$\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Durch die drei angenommenen Punkte kann man nun einen Kreisbogen legen, dessen Gleichungen seien:

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2=\varrho^2,$$

$$a(X-\alpha)+b(Y-\beta)+Z-\gamma=0;$$

wo also α, β, γ die Koordinaten seines Mittelpunkts, ϱ sein Halbmesser. Zur Bestimmung der Grössen α, β, γ, ϱ, a, b hat man mithin die Gleichungen:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2,$$

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x}+(z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-\beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(z-\gamma)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0;$$

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z-\gamma=0,$$

$$a+b\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$b\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0;$$

woraus sich nun ergiebt:

$$\left.\begin{aligned}
&b=-\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},\qquad a=\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}};\\
&\alpha-x=-\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2},\\
&\beta-y=\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2},\\
&\gamma-z=\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2};\\
&\varrho=\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Die Formeln (9) bestimmen den betreffenden Kreis vollständig.

Offenbar kann man die Aufgabe, die uns beschäftigt, auch so ansehen, als habe man durch A irgend eine Ebene gelegt, welche die Fläche (1) schneidet, und man betrachte in der (ebenen) Schnittkurve zwei Elemente. Ist die Kurve, von der wir zwei Elemente wählten, eine im Allgemeinen doppelt gekrümmte, so darf man ja, um die eben angeführte Betrachtung klar zu machen, nur die Krümmungsebene dieser doppelt gekrümmten Kurve im Punkte A als die so eben angegebene Ebene ansehen.

Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir aber ein anderes Koordinatensystem einführen. Wir wählen nämlich den Punkt A zum neuen Anfangspunkt, die Tangentialebene (5) zur Ebene der xy und die Normale, in dem §. 1. angegebenen Sinne, zur positiven Axe der z. Da nunmehr die Gleichung der Tangentialebene $z=0$ sein muss, so ist also jetzt

$$x=y=z=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

während $\frac{\partial u}{\partial z}$ nicht Null sein wird. Da die Richtung der Axen der

x und y noch willkührlich bleibt, so wählen wir dieselben so, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ebenfalls Null wird für $x=y=z=0$. Dass Letzteres immer möglich sei, erhellet so: Man wähle zuerst die Lagen der Axen der x und y (senkrecht auf einander) willkührlich, so dass im Allgemeinen $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ nicht Null sei (wenn man die Grösse umgeformt hat, wie es die bekannten Formeln für Koordinatenverwandlung verlangen). Da für $x=y=z=0$ auch

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

so muss die Grösse u so beschaffen sein, dass, wenn man, falls sie nicht blosse Potenzen enthält, die in ihr etwa vorkommenden transzendenten Grössen nach dem Maclaurin'schen Satze entwickelt, dieselbe die Form habe:

$$u=kx^2+lxy+my^2+P,$$

wo P keine Glieder enthält, die bloss die erste oder zweite Dimension von x, y enthalten. Alsdann ist offenbar für $x=y=z=0$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=l$. Man ändere nun die Richtung der Axen der x, y, d. h. setze:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;$$

so wird

$$u=k'x'^2+l'x'y'+m'y'^2+P',$$

wo P' in Bezug auf x', y' dieselbe Eigenschaft hat, wie P in Bezug auf x, y. Was den Werth von l' anbelangt, so ist

$$\begin{aligned} l' &= -2k\sin\alpha\cos\alpha+2m\sin\alpha\cos\alpha+l(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) \\ &= (m-k)\sin 2\alpha+l\cos 2\alpha \end{aligned}$$

und $\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}=l'$. Soll nun $l'=0$ sein, so muss man haben $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{l}{k-m}$, woraus ein reeller Werth von α folgt, so dass unsere Behauptung gerechtfertigt ist. Wählen wir nun die Koordinatenaxen in der angegebenen Art, so folgt aus (8), dass (für den Punkt A) auch $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, und folglich die dritte Gleichung (8) wird:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0=0, \qquad (\alpha)$$

wo der angehängte Zeiger 0 bedeutet, dass man nach der Differentiation $x=y=z=0$ zu setzen habe.

Die Gleichung der Ebene, von der wir vorhin sprachen, sei

$$x+Ay+Bz=0,$$

so ist also

$$1+A\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0+B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0=0,\quad A\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0+B\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0=0;$$

also, da $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0=0$:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0=-\frac{1}{A},$$

und, wenn man diess in obige Gleichung (α) setzt:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0=-\frac{\left[A^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0\right]}{A^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0};$$

und dann

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0=\frac{\left[A^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0\right]B}{A^3\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0},$$

woraus nun folgt:

$$\varrho=\frac{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{(1+A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}\left[A^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0\right]}, \tag{10}$$

in welcher Formel allerdings das zweite Glied das Doppelzeichen $\pm$ haben sollte, das wir aber weglassen, so dass ϱ als positiv oder negativ betrachtet wird, je nachdem das zweite Glied einen positiven oder negativen Werth hat.

Legte man die fragliche Ebene noch spezieller so, dass sie durch die Normale ginge, und also einen Normalschnitt bildete, so kann

$$x+Ay=0$$

ihre Gleichung vorstellen, und der entsprechende Werth von ϱ ergiebt sich, wenn man in (10) $B=0$ setzt, d. h. man hat jetzt:

$$\varrho = \frac{(1+A^2)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{A^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0}. \qquad (11)$$

Will man den (oder die) Werthe von A suchen, für welche diese Grösse ein Maximum oder Minimum ist, so hat man $\frac{\partial \varrho}{\partial A} = 0$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$A\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 + A^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 - A^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0\right] = 0,$$

d. h. entweder $A=0$, oder $A=\infty$. Wollte man den zweiten Werth ($A=\infty$) nicht gelten lassen, so setze man $A=\frac{1}{\varrho}$, wodurch

$$\varrho = \frac{(1+C^2)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0}$$

und $\frac{\partial \varrho}{\partial C}=0$, giebt $C=0$, d. h. $A=\infty$. Nun ist für $A=0$:

$$\varrho = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0} = R_1,$$

für $A=\infty$:

$$\varrho = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0} = R,$$

und die Gleichung der Ebene des Schnitts ist für $A=0$: $x=0$, d. h. die Ebene der yz, für $A=\infty$: $y=0$, d. h. die Ebene der xz. Diese zwei Schnitte wollen wir Hauptschnitte heissen und also durch R_1, R ihre Krümmungshalbmesser bezeichnen, die zugleich Hauptkrümmungshalbmesser heissen mögen.

Ist nun $x+Ay=0$ die Gleichung irgend eines Normalschnitts, so ist $\frac{-1}{A}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den diese Ebene mit der Ebene der xz macht, oder auch $\frac{-1}{A}$ ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die zwei Linien mit

einander bilden, in denen eben diese Ebene und die Ebene, welcher der Krümmungshalbmesser R entspricht, die Tangentialebene schneiden. Heisst nun α jener Winkel, so ist mithin $A^2 = \cotg^2\alpha$ und folglich (11):

$$\varrho = \frac{1+\cotg^2\alpha}{\cotg^2\alpha \cdot \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}} = \frac{RR_1}{R\sin^2\alpha + R_1\cos^2\alpha}, \tag{12}$$

vermittelst welcher Formel der Krümmungshalbmesser jedes Normalschnitts durch die beiden Hauptkrümmungshalbmesser ausgedrückt ist. Ist nun $R = R_1$, so ist allgemein $\varrho = R$, d. h. alle Krümmungshalbmesser der Normalsshnitte sind gleich.

Was den Werth der Grössen α, β, γ anbelangt, so findet man nach (9), dass jetzt $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -\varrho$, so dass der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der Normale liegt; fällt nun der Werth (12) negativ aus, so ist der Krümmungshalbmesser nach der positiven Seite der Normale, d. h. nach der positiven Seite der Fläche, gerichtet, entgegengesetzt im andern Falle, wobei freilich obiges bestimmte Koordinatensystem zu Grunde liegt.

Immerhin aber folgt aus (12), dass wenn R, R_1 nach derselben Seite der Normale hin gerichtet sind, alle Krümmungshalbmesser der Normalschnitte ebenfalls nach der nämlichen Seite gerichtet sind, in welchem Falle die Fläche in A eine doppelt erhabene (oder doppelt hohle) heisst. Sind R und R_1 entgegengesetzt gerichtet, so ist ein Theil der ϱ anders gerichtet, als der andere, und die Fläche ist in A hohl-erhaben. Die Scheidung geschieht, wenn

$$\operatorname{tg}^2\alpha = -\frac{R_1}{R}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{-\frac{R_1}{R}},$$

in welchem Falle $\varrho = \infty$ ist, Ist $R > R_1$ und haben beide Grössen gleiches Zeichen, so erreicht ϱ seinen grössten Werth für $\alpha = 0$, seinen kleinsten für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wie man diess am bequemsten aus der Formel

$$\varrho = \frac{RR_1}{R_1 + (R-R_1)\sin^2\alpha} = \frac{RR_1}{R-(R-R_1)\cos^2\alpha}$$

ersieht. Also ist dann wirklich R ein Maximum, R_1 ein Minimum.

Sind R und R_1 von verschiedenem Zeichen, so sei

α) $R = -R'$, R_1 positiv; alsdann ist

$$\varrho = \frac{-R'R_1}{-R'\sin^2\alpha + R_1\cos^2\alpha} = \frac{-R'}{\frac{-R'}{R_1}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha};$$

der Nenner erreicht seinen grössten Werth für $\alpha = 0$, wo er 1 ist, also ist jetzt $R = -R'$ ein Minimum; ferner ist auch

$$\varrho = \frac{R_1}{\sin^2\alpha - \frac{R_1}{R'}\cos^2\alpha},$$

so dass für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wirklich R_1 ein Minimum ist;

β) R positiv, $R_1 = -R_1'$; alsdann ist

$$\varrho = \frac{-RR_1'}{R\sin^2\alpha - R_1'\cos^2\alpha} = \frac{R}{\cos^2\alpha - \frac{R}{R_1'}\sin^2\alpha} = \frac{-R_1'}{\sin^2\alpha - \frac{R_1'}{R}\cos^2},$$

woraus folgt, dass, für $\alpha = 0$, R ein Minimum, und, für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $R_1 = -R_1'$ ebenfalls ein Minimum ist.

Es ist nun leicht, den Krümmungshalbmesser irgend eines durch A gelegten ebenen Schnittes zu bestimmen. Die Formel (10) giebt nämlich:

$$\varrho = \frac{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{(1+A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}\left[A^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0\right]}$$

$$= \frac{1+A^2}{A^2}\left(\frac{1+A^2}{1+A^2+B^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \left(\frac{1+A^2}{1+A^2+B^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{RR_1}{R_1 + \operatorname{tg}^2\alpha . R},$$

wenn α der Winkel ist, den die Durchschnittslinie der fraglichen Ebene und der Tangentialebene mit der Linie macht, in welcher die dem Krümmungshalbmesser R entsprechende Ebene dieselbe Tangentialebene durchschneidet. Ist ω der Winkel, den unsere Ebene mit der Normale macht, so ist bekanntlich

$$\cos^2\omega = \frac{1+A^2}{1+A^2+B^2},$$

und also, da ω immer zwischen 0 und 90°:

$$\varrho = \frac{RR_1\cos\omega}{R\sin^2\alpha + R_1\cos^2\alpha}, \qquad (13)$$

wodurch also auch der Krümmungshalbmesser dieses Schnitts gegeben ist. Was die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes anbelangt, so ergiebt sich leicht aus (9):

$$\alpha=\frac{(1+A^2)B}{1+A^2+B^2}\cdot\frac{RR_1}{R+A^2R_1},\quad \beta=\frac{(1+A^2)B}{A(1+A^2+B^2)}\cdot\frac{RR_1}{R+A^2R_1},$$

$$\gamma=-\frac{(1+A^2)^2}{(1+A^2+B^2)}\cdot\frac{RR_1}{R+A^2R_1},$$

so dass der Werth von

$$\gamma=-\varrho\cos\omega=-\frac{RR_1\cos^2\omega}{R\sin^2\alpha+R_1\cos^2\alpha},$$

also die Richtung dieses Krümmungshalbmessers in Bezug auf die Normale dieselbe ist, wie die des Normalschnitts, dessen Ebene die Tangentialebene in derselben Linie schneidet, wie die Ebene der betrachteten Kurve.

§. 3.

Man denke sich eine Reihe Normalschnitte durch den Punkt A gelegt, alle denselben Winkel φ mit einander bildend, so dass $n\varphi=360^0$; sei α_1 der Winkel, welchen der erste dieser Schnitte mit der Ebene des Krümmungshalbmessers R macht, so dass $\alpha_1+\varphi$ der Winkel des zweiten, ..., $\alpha_1+n\varphi$ der des letzten, welcher mit dem ersten zusammenfällt, ist; seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die Krümmungshalbmesser des 1sten, 2ten, ... $n$ten Schnitts, mit den ihnen gebührenden Zeichen genommen, so dass gleich gerichtete auch gleiches Vorzeichen haben. Alsdann ist nach (12):

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\ldots+\frac{1}{\varrho_n}$$

$$=\frac{1}{R_1}[\sin^2\alpha_1+\sin^2(\alpha_1+\varphi)+\ldots+\sin^2(\alpha_1+\overline{n-1}\varphi)]$$

$$+\frac{1}{R}[\cos^2\alpha_1+\cos^2(\alpha_1+\varphi)+\ldots+\cos^2(\alpha_1+\overline{n-1}\varphi)],$$

d. h. wenn man beachtet, dass

$$\sin^2\psi=\frac{1-\cos2\psi}{2},\quad \cos^2\psi=\frac{1+\cos2\psi}{2},$$

also:

$$\sin^2\alpha_1+\sin^2(\alpha_1+\varphi)+...+\sin^2(\alpha_1+\overline{n-1}\varphi)$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}[\cos 2\alpha_1+\cos(2\alpha_1+2\varphi)+..+\cos(2\alpha_1+2\overline{n-1}\varphi)]$$

$$=\frac{n}{2}-\frac{\cos(2\alpha_1+\overline{n-1}\varphi)\sin n\varphi}{\sin\varphi.}=\frac{n}{2},$$

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2(\alpha_1+\varphi)+...+\cos^2(\alpha_1+\overline{n-1}\varphi)$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2\alpha_1+\cos(2\alpha_1+2\varphi)+.....$$

$$....+\cos(2\alpha_1+2\overline{n-1}\,\varphi)]=\frac{n}{2},\text{ wenn } n>2,$$

endlich

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+...+\frac{1}{\varrho_n}=\frac{n}{2}\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right]. \tag{14}$$

(Siehe auch Archiv, Thl. XI. S. 328.).

§. 4.

In §. 2. wurde nachgewiesen, dass zwei Hauptschnitte bestehen. Es bleibt nun noch zu zeigen, wie dieselben allgemein bestimmt werden können. Aus §. 2. weiss man, dass für jeden Normalschnitt der Krümmungshalbmesser in der Normale liegt. Sind nun α, β, γ die Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts für einen Normalschnitt, so muss (α, β, γ) in der durch den Punkt (x, y, z) gehenden Normale liegen, d. h. man muss nach (6) haben:

$$\frac{\alpha-x}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\beta-y}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\gamma-z}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}=\frac{\varrho}{k}, \tag{15}$$

wobei wir das Doppelzeichen an ϱ weggelassen haben, so dass ϱ positiv genommen wird, wenn $\frac{\gamma-z}{\frac{\partial u}{\partial z}}$ es ist, negativ, wenn $\frac{\gamma-z}{\frac{\partial u}{\partial z}}$ negativ ausfällt. Da $\frac{\partial u}{\partial z}$ eine Konstante ist, so werden also zwei Krümmungshalbmesser verschiedenes Zeichen haben,

wenn sie nach verschiedenen Seiten der Normale gerichtet sind. Setzt man nun:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$=P\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right], \qquad (16)$$

so folgt aus (8):

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-P\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right].$$

Ferner ergiebt sich aus (15), wenn man die (9) vorangehenden Gleichungen beachtet:

$$\frac{\varrho}{k}=\frac{(\gamma-z)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(\beta-y)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$
$$=\frac{-\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]}{-P\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]}=\frac{1}{P},$$

so dass immer

$$\varrho=\frac{k}{P}, \qquad (17)$$

worin k (immer positiv) die schon in §. 1. angegebene Bedeutung hat, und also ϱ positiv oder negativ ist, je nachdem P es ist. Der Werth von k ist, für den betrachteten Punkt, konstant, P aber, da diese Grösse die Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$,..... enthält, ist veränderlich mit der Richtung des Normalschnitts.

Sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente an den Normalschnitt, dem ϱ entspricht, mit den Koordinatenaxen macht, so ist bekanntlich

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}, \qquad \gamma = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}};$$

so dass, wie man leicht sieht:

$$P=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\alpha^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\beta^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\gamma^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\alpha\beta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\alpha\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\beta\gamma.$$

Nach (17) wird ϱ ein Maximum oder Minimum, wenn P ein Minimum oder Maximum ist. Die Hauptschnitte werden sich also ergeben, wenn man die Maxima oder Minima von P aufsucht. P hängt nun ab von den drei (allein) Veränderlichen α, β, γ, zwischen denen noch die Gleichungen

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \quad \alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

bestehen, da die Normale senkrecht steht auf der Tangente. Nach der gewöhnlichen Lehre vom Grössten und Kleinsten hat man also zur Bestimmung von α, β, γ, ausser diesen zwei Gleichungen, noch:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\gamma+\lambda_1\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_2\alpha=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\gamma+\lambda_1\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda_2\beta=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\gamma+\lambda_1\frac{\partial u}{\partial z}+\lambda_2\gamma=0,$$

wenn λ_1, λ_2 zwei noch zu bestimmende Faktoren sind. Multiplizirt man diese drei Gleichungen bezüglich mit α, β, γ und addirt, so ergiebt sich

$$P+\lambda_2=0, \quad \lambda_2=-P;$$

und also:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-P\right)\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\gamma+\lambda_1\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\alpha+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-P\right)\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\gamma+\lambda_1\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\beta+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-P\right)\gamma+\lambda_1\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Aus diesen drei Gleichungen ziehe man die Werthe von α, β, γ, die alle drei den gemeinschaftlichen Faktor λ_1 haben, den man aus der Gleichung

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

bestimmt, und setze diese Werthe in die Gleichung

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

so erhält man endlich:

(18)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-P\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-P\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right]\\
+&\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-P\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-P\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)^2\right]\\
+&\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-P\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-P\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\\
&+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-P\right)\right]\\
&+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-P\right)\right]\\
&+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-P\right)\right]=0,
\end{aligned}$$

aus welcher Gleichung zweiten Grades die zwei, den Hauptkrümmungshalbmessern entsprechenden Werthe von P folgen. Die Werthe von α, β, γ, welche die Richtungen der Tangenten der Hauptschnitte, also dieser selbst, bestimmen, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-P\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-P\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-P\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial u}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-P\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right]}{\alpha}$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-P\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial u}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-P\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-P\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial u}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-P\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right]}{\beta}$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-P\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right]+\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-P\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right]+\frac{\partial u}{\partial z}\left[\left(\frac{{}^2 u}{\partial x^2}-P\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-P\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]}{\gamma}=\pm U. \qquad (19)$$

wo U gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drei Zähler ist.

Hat die Gleichung der Fläche die Form $z=f(x, y)$, so ist

$$u=f(x, y)-z,$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-1,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};$$

also wird jetzt die (18) zu:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left[-P\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-P\right)\right]+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\left[-P\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-P\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-P\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-P\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}P=0,$$

d. h.

(20)

$$P^2\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]-P\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

Da hier $\frac{\partial u}{\partial z}=-1$, so haben ϱ und $\gamma-z$ immer entgegengesetztes Zeichen, was auf das in §. 2. Gesagte zurückweist. Aus (20) folgt, dass die krumme Fläche doppelt erhaben ist, wenn

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}>\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2,$$

hohl-erhaben, wenn

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

§. 5.

Lassen wir, der einfachern Rechnung wegen, die Gleichung der krummen Oberfläche wieder $z=f(x, y)$ sein, so sind die Gleichungen der Normale im Punkte $A(x, y, z)$:

$$Z-z=-\frac{1}{\frac{\partial z}{\partial x}}(X-x),\ Y-y=-\frac{\partial z}{\partial y}(Z-z).$$

Man gehe nun von dem Punkte (x, y, z) zu dem Punkte $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ über, so ist die Bedingung, dass beide Normalen sich schneiden, bekanntlich:

$$\frac{-\frac{\partial \Delta z}{\partial x}}{\Delta x+\frac{\partial \Delta z}{\partial x}z+\Delta z\frac{\partial z}{\partial x}+\Delta z\frac{\partial \Delta z}{\partial x}}=\frac{-\frac{\partial \Delta z}{\partial y}}{\Delta y+\frac{\partial \Delta z}{\partial y}z+\Delta z\frac{\partial z}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial \Delta z}{\partial y}}.$$

Es muss mithin zwischen x und y eine Beziehung stattfinden, demnach y eine Funktion von x sein; sodann ist, auf Glieder der ersten Ordnung genau:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Geht man also zur Gränze über, so ist obige Gleichung:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(1+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

d. h. wenn man entwickelt:

(21)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$
$$+\frac{\partial y}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\right]$$
$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

Wählt man wieder dasselbe Koordinatensystem wie in §. 2., so ist

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

also wird (21) geben:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0 \text{ und } \frac{\partial y}{\partial x}=\infty;$$

folglich entsprechen die beiden Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, welche (21) giebt, den beiden Hauptschnitten. Von einem Punkt einer krummen Oberfläche aus giebt es also nur zwei (auf einander senkrechte) Richtungen, so dass zwei unmittelbar auf einander folgende Normalen sich schneiden. Verfolgt man diese Richtungen weiter, so erhält man die Krümmungslinien, deren Theorie wir aber hier nicht weiter verfolgen wollen.

§. 6.

Angenommen eine ebene Kurve, deren Gleichung $y=f(x)$, drehe sich um die Axe der x, so entsteht eine Fläche, deren Gleichung

$$y^2+z^2=(f(x))^2$$

ist. Hier ist also

$$u=y^2+z^2-(f(x))^2,$$

mithin

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2f(x)f'(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2[(f'(x))^2+f(x)f''(x)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0;$$

demnach ist die Gleichung (18):

$$(f(x))^2(f'(x))^2(2-P)^2$$
$$+[y^2(2-P)+z^2(2-P)][-2(f'(x))^2-2f(x)f''(x)-P]=0,$$

d. h.

$$P=2 \text{ oder } P=\frac{-2f(x)f''(x)}{1+(f'(x))^2}.$$

Ferner ist

$$k=2\sqrt{y^2+z^2+(f(x))^2(f'(x))^2}=\pm 2f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2},$$

wo das Doppelzeichen so zu wählen ist, dass k positiv ausfällt. Also sind die zwei Hauptkrümmungshalbmesser:

$$\pm f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2},\ \mp\frac{[1+(f'(x))^2)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Letzteres ist der Krümmungshalbmesser der erzeugenden Kurve in dem Punkte (x, y), ersteres ist die Normale der Erzeugungslinie in demselben Punkte. Bei einer Rotationsfläche ist also in jedem Punkte die erzeugende Kurve (Meridian) ein Hauptschnitt.

§. 7.

Seien C, B die Mittelpunkte der zwei Hauptkrümmungskreise in einem Punkte A der krummen Fläche, gleichgiltig, ob beide auf derselben Seite der Normale, oder auf verschiedenen Seiten liegen. Man denke sich durch den Punkt C in der Ebene des Kreises, dessen Mittelpunkt B ist, eine Senkrechte auf die Normale in A gezogen, und lasse nun den letzten Kreis um diese Senkrechte rotiren, so beschreibt er eine Rotationsfläche, die durch den Punkt A geht. Der eine Hauptschnitt dieser Rotationsfläche ist also nach §. 6. der Kreis, dessen Halbmesser AB ist; der andere Hauptschnitt ist darauf senkrecht und also ein Kreis vom Halbmesser AC, da diess der Rotationshalbmesser ist. AB und AC sind aber die zwei Hauptkrümmungshalbmesser, so dass also die gegebene und die erzeugte Fläche dieselben Hauptschnitte, und folglich (§. 2.) sämmtliche Schnitte beider Flächen gleiche Krümmung im Punkte A haben. Nun folgt aus §. 2. leicht, dass zwei Flächen, welche dieselben Hauptschnitte (und Hauptkrümmungshalbmesser) haben, auf zwei Linearelemente hin zusammenfallen; demnach kann die gegebene Fläche in unmittelbarer Nähe um den Punkt A herum zusammenfallend gedacht werden mit obiger Rotationsfläche.

§. 8.

Wir wollen annehmen, eine krumme Fläche werde gebogen, so dass sie bei dieser Biegung weder zerreisst, noch Falten wirft, und wollen nun untersuchen, was bei dieser Biegung vorgeht. — Wenn eine Fläche sich in der angegebenen Weise biegt, so heisst diess, dass in der gegebenen und der durch Biegung daraus entstehenden Fläche je zwei Punkte sich entsprechen müssen, dass die Linearelemente der beiden Flächen um diese Punkte herum gleich gross sein müssen, und dass endlich entsprechende Linearelemente beider Flächen denselben Winkel machen.

Sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes der gegebenen, x', y', z' die Koordinaten des entsprechenden Punktes der durch Biegung daraus entstandenen Fläche; ∂s ein Linearelement der einen, $\partial s'$ der andern Fläche, so muss also $\partial s = \partial s'$ d. h.

$$\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2=\partial x'^2+\partial y'^2+\partial z'^2$$

sein, wenn man gleich die Bezeichnung der unendlich kleinen Grössen nach der gewöhnlichen Weise einführt. Vermöge der Gleichungen der zwei Flächen hat man offenbar (da man bekanntlich nur Glieder der ersten Ordnung zu beachten braucht):

$$\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}\partial x+\frac{\partial z}{\partial y}\partial y,\ \partial z'=\frac{\partial z'}{\partial x'}\partial x'+\frac{\partial z'}{\partial y'}\partial y',$$

so dass

$$\partial s^2=\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\partial x^2+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\partial x\,\partial y+\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\partial y^2,$$

$$\partial s'^2=\left[1+\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2\right]\partial x'^2+2\frac{\partial z'}{\partial x'}\frac{\partial z'}{\partial y'}\partial x'\partial y'+\left[1+\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2\right]\partial y'^2.$$

Da der Punkt (x', y', z') dem Punkte (x, y, z) entsprechen soll, so müssen x', y', z' Funktionen von x und y sein, so dass man haben wird:

$$\partial x'=\frac{\partial x'}{\partial x}\partial x+\frac{\partial x'}{\partial y}\partial y,\ \ \partial y'=\frac{\partial y'}{\partial x}\partial x+\frac{\partial y'}{\partial y}\partial y,\ \partial z'=\frac{\partial z'}{\partial x}\partial x+\frac{\partial z'}{\partial y}\partial y,$$

wo freilich

$$\frac{\partial z'}{\partial x}=\frac{\partial z'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial z'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x},\quad \frac{\partial z'}{\partial y}=\frac{\partial z'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}.\qquad (21)$$

Daraus folgt, indem identisch $\partial s^2=\partial s'^2$ (d. h. unabhängig von jeder Beziehung zwischen ∂x und ∂y):

$$\left.\begin{aligned}1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2&=\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2,\\ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y},\\ 1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2&=\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)^2\end{aligned}\right\}\qquad (22)$$

Die Gleichungen (22) entspringen aus der Bedingung, dass zwei entsprechende Linearelemente gleich gross seien. Nimmt man nun zwei Linearelemente der einen Fläche ∂s und ∂S und die zwei entsprechenden $\partial s'$, $\partial S'$ der zweiten, so müssen diese noch gleiche Winkel machen. Das Linearelement ∂s gehe von dem Punkt (x, y, z) zu dem $(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z)$, ∂S von (x, y, z) zu $(x+\partial X, y+\partial Y, z+\partial Z)$, so ist

$$\partial s^2 = \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\partial x^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\partial x\partial y + \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\partial y^2,$$

$$\partial S^2 = \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\partial X^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\partial X\partial Y + \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\partial Y^2,$$

$$\begin{aligned}\partial s'^2 = &\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2\right]\partial x^2\\ &+2\left[\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}\right]\partial x\partial y\\ &+\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)^2\right]\partial y^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial S'^2 = &\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2\right]\partial X^2\\ &+2\left[\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}\right]\partial X\partial Y\\ &+\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)^2\right]\partial Y^2.\end{aligned}$$

Die Kosinus der Winkel, welche ∂s mit den Koordinatenaxen macht, sind

$$\frac{\partial x}{\partial s},\quad \frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial z}{\partial s};$$

für ∂S sind sie

$$\frac{\partial X}{\partial S},\quad \frac{\partial Y}{\partial S},\quad \frac{\partial Z}{\partial S};$$

also ist der Kosinus des Winkels beider Elemente:

$$\frac{\partial x\partial X+\partial y\partial Y+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\partial x+\frac{\partial z}{\partial y}\partial y\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\partial X+\frac{\partial z}{\partial y}\partial Y\right)}{\partial s\partial S}$$

$$=\frac{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\partial x\partial X+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}(\partial x\partial Y+\partial y\partial X)+\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\partial y\partial Y}{\partial s\partial S}$$

Ganz ähnlich findet sich für den Kosinus des Winkels der Elemente $\partial s'$, $\partial S'$:

$$\frac{\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2\right]\partial x\,\partial X+\left[\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{y}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}\right][\partial x\partial Y+\partial y\partial X]+\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)^2\right]\partial y\partial Y}{\partial s'\,\partial S'}.$$

Da nun nach den Formeln (22) diese Kosinus gleich sind, so drücken also eben jene Formeln alle Bedingungen der Biegung aus.

Man multiplizire nun die erste und dritte Gleichung (22) und subtrahire vom Produkt das Quadrat der zweiten, so ergiebt sich:

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left[\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x}\right]^2.$$

Aus (21′) folgt aber:

$$\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x}=\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial x}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right)\frac{\partial z'}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x}=\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}\right)\frac{\partial z'}{\partial x'};$$

also ist:

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2\left[1+\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2\right]. \tag{23}$$

Aus (21′) folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z'}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x}\\
&+\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z'}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}+\frac{\partial z'}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2},\\
\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial^2 z'}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}\\
&+\frac{\partial^2 z'}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}\\
&+\frac{\partial z'}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y},\\
\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z'}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y}\\
&+\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z'}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}+\frac{\partial z'}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Die Gleichungen (22) geben, je partiell nach x und y differenzirt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2},\\
\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y},\\
\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2},\\
\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y},\\
\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}+\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2};
\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

wie man leicht findet, wenn man die durch Differentiation entstandenen Gleichungen auf die einfachste Weise verbindet.

Aus den Gleichungen (24) ergiebt sich leicht:

$$\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}-\frac{\partial z'}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}-\frac{\partial z'}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}\right]\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}-\frac{\partial z'}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}-\frac{\partial z'}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}\right]$$
$$-\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z'}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z'}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}\right]^2$$
$$=\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}-\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'\partial y'}\right)^2\right]\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2.\qquad(26)$$

Nun folgt, wie bereits angegeben, aus (21):

$$\frac{\partial z'}{\partial x'}=\frac{\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}}{\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}},\quad \frac{\partial z'}{\partial y'}=\frac{\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x}}{\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}};$$

setzt man diess in (26), so ist:

(26′)

$$\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}\right]\times\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}\right]$$

$$-\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}-\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'\partial y'}\right)^2\right]\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^4.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}=a,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}-\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}=b,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y}=c;$$

so ergiebt sich aus (26′) nach leichten Reduktionen für die erste Seite:

(26″)

$$[a^2+b^2+c^2]\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}\right)^2\right]$$

$$+\left(a\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}-b\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(a\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}-b\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}\right)\left(a\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}\right)$$

$$+\left(b\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}-c\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(b\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}-c\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}\right)\left(b\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}-c\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}\right)$$

$$+\left(a\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}-c\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(a\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}-c\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}\right)\left(a\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}-c\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}\right).$$

Nun ergiebt sich aber aus (25):

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}-b\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=b\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}-c\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=c\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}-b\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2},$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2},$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=b\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}-c\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2},$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=b\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}-c\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2},$$

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=c\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}-a\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2},$$

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=c\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}-a\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2};$$

demnach:

$$\left(a\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}-b\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(a\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}-b\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}\right)\left(a\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}-b\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right],$$

$$\left(b\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}-c\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(b\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}-c\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}\right)\left(b\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}-c\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right],$$

$$\left(a\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}-c\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(a\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}-c\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}\right)\left(a\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}-c\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right].$$

Addirt man diese drei Gleichungen und beachtet (22), so ist die Summe:

$$\Big[\Big(1+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\Big)\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2-2\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2$$
$$+\Big(1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2\Big)\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\Big]\Big[\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big]$$
$$=\Big[\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\Big]\Big[\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big].$$

Man differenzire nun die vierte der Gleichungen (25) partiell nach x, die zweite partiell nach y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}$$
$$+\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}+\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial^3 x'}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial^3 y'}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial^3 z'}{\partial y^2\partial x},$$

$$\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\Big(\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}\Big)^2$$
$$+\Big(\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}\Big)^2+\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial^3 x'}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial^3 y'}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial^3 z'}{\partial y^2\partial x};$$

die Differenz beider Gleichungen giebt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)^2$$
$$=\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 x'}{\partial x\partial y}\Big)^2-\Big(\frac{\partial^2 y'}{\partial x\partial y}\Big)^2-\Big(\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y}\Big)^2,$$

und da, wie schon gezeigt,

$$a^2+b^2+c^2=1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2,$$

so ist die Grösse (26″):

$$\Big[1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\Big]\Big[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)^2\Big]$$
$$+\Big[\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\Big]\Big[\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big]$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)^2.$$

Folglich ist in (26′):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$$

$$=\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}-\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'\partial y'}\right)^2\right]\left[\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right]^4.$$

Aus (23) folgt aber:

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^4=\frac{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2}{\left[1+\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2\right]^2}.$$

Setzt man diesen Werth in obige Gleichung, so ergiebt sich endlich:

(27)

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2}=\frac{\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}-\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'\partial y'}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2\right]^2}.$$

Nun folgt aus (20), dass

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2}$$

gleich ist dem Produkte $\frac{1}{RR_1}$, wenn R und R_1 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der ersten Fläche im Punkte (x, y, z); eben so ist

$$\frac{\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}-\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x\partial y'}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2\right]^2}\text{ gleich }\frac{1}{R'R_1'},$$

wenn R_1' und R_1' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Punkte (x', y', z') der zweiten Fläche. Daraus fliesst also folgender wichtige Satz:

Bei jeder Biegung einer krummen Oberfläche wird das Produkt der beiden Hauptkrümmungshalbmesser nicht geändert. (Natürlich die Krümmunghalbmesser mit den gehörigen Zeichen genommen.)

Daraus folgt, dass alle Biegungen einer doppelt erhabenen Fläche ebenfalls doppelt erhaben, einer hohl-erhabenen ebenfalls

hohl-erhaben sind; dass ferner eine krumme Fläche nur dann in eine Ebene gebogen werden kann, wenn einer ihrer Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross ist, d. h. wenn man hat:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0, \qquad (28)$$

und zwar in jedem Punkte der Fläche.

§. 9.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir zuerst an die Eigenschaft kürzester Linien auf einer krummen Oberfläche erinnern, auf den Gränzlinien senkrecht zu stehen, so dass also, wenn man von irgend einem Punkte einer krummen Oberfläche aus auf dieser krummen Oberfläche gegen eine Kurve auf ihr eine kürzeste Linie zieht, diese senkrecht steht auf jener Kurve.

Denken wir uns nun auf der krummen Fläche $u=0$ eine ganz beliebige Kurve gezogen, und errichten in allen Punkten derselben auf sie senkrechte kürzeste Linien, alle nach derselben Seite hin, und geben allen diesen kürzesten Linien dieselbe Länge a. Die Endpunkte aller dieser Kürzesten verbinden wir durch eine Kurve.

Zuvörderst ist klar, dass, wenn man in irgend einer dieser kürzesten Linien einen Punkt annimmt, die kürzeste Entfernung dieses Punkts von der gegebenen Kurve durch das Stück der Kürzesten, das zwischen ihm und der Kurve liegt, gemessen wird — ein Satz, von dem man sich leicht überzeugen wird, wenn man nur die Bestimmungsweise einer kürzesten Linie in der Variationsrechnung sich vergegenwärtigt. Allgemein: Hat man irgend eine kürzeste Linie auf einer krummen Oberfläche gezogen zwischen zwei Punkten, und man wählt irgend einen Punkt in dieser Kürzesten, so ist die kürzeste Entfernung dieses Punkts von irgend einem andern Punkte in derselben Kurve gemessen durch das Stück eben dieser Kurve, das zwischen ihnen liegt.*)

---

*) Bekanntlich wird die kürzeste Linie bestimmt durch

(29)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial .}{\partial z}\left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\right]=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial .}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\right].$$

Integrirt man diese Gleichung, und bestimmt die eintretenden willkührlichen Konstanten so, dass die Kurve (29) durch zwei bestimmte Punkte geht, so werden natürlich die Koordinaten eines jeden Punkts der erhaltenen Kurve der Gleichung der Kurve genügen. Folglich werden die Konstanten dieselben Werthe erlangen, wenn man zu ihrer Bestimmung zwei andere Punkte der Kurve gewählt hätte — was eben obige Behauptung rechtfertigt.

Nennen wir nun die erste gezogene Kurve A, die zweite, durch die Endpunkte der Kürzesten gezogene, B, so haben also alle Punkte von B denselben kürzesten Abstand a von der Kurve A. Denken wir uns nun irgend einen Punkt M der Kurve A und sei M' der entsprechende Punkt in B, d. h. der Endpunkt der in M auf A senkrecht stehenden Kürzesten. Ich behaupte nun:

α) Die kürzeste Entfernung des Punkts M von B ist nicht grösser als a.

Denn wäre sie grösser und sei N' der Fusspunkt der von M auf B gezogenen senkrechten Kürzesten, so dass $MN' > MM'$, so wäre also M', der auch in B liegt, näher an M als der Punkt N', d. h. N' wäre nicht der nächste an M von allen Punkten der Kurve B, und also kann auch nicht MN' die kürzeste Entfernung des Punktes M von B sein.

β) Die kürzeste Entfernung des Punktes M von B ist nicht kleiner als a.

Sei wieder N' der Fusspunkt der, in dieser Vorsussetzung gezogenen, Kürzesten von M auf B, so dass $MN' < MM'$. Dem Punkte N' entspricht in A ein Punkt N, so dass $NN' = MM' = a$. Ist also $MN' < MM'$, so ist auch $MN' < NN'$, d. h. der Weg von N' nach M ist kürzer als der von N' nach N. Nun soll aber NN' die kürzeste Entfernung des Punktes N von A sein, also muss umgekehrt $N'M > N'N$ sein, woraus unsere Behauptung sich abermals ergiebt.

Wir schliessen daraus, dass auch alle Punkte der Kurve A von der Kurve B die kürzeste Entfernung a haben.

Geht man also von einem Punkte M der Kurve A aus auf dem kürzesten Weg zur Kurve B, so muss man nothwendig auf den Punkt M' kommen. Daraus folgt offenbar, dass die Kurve B auf allen Kürzesten, durch deren Endpunkte sie gezogen ist, senkrecht steht.

Denken wir uns weiter, von einem Punkte A einer krummen Oberfläche aus ziehe man nach allen Seiten derselben kürzeste Linien und gebe diesen letztern dieselbe Länge a, von A aus. Die sämmtlichen Endpunkte verbinde man durch eine Kurve B. Daraus folgt ganz unmittelbar, dass eben die kürzeste Entfernung des Punktes A von der Kurve B gleich a sein muss, d. h. dass man genau eine der gezogenen Linien verfolgen muss, um auf dem kürzesten Wege zur Kurve B zu gelangen. Daraus folgt aber weiter, dass die Kurve B auf allen Kürzesten senkrecht stehen muss.

§. 10.

Wir haben im Obigen fortwährend x und y als die beiden unabhängigen Veränderlichen in der Gleichung der krummen Oberfläche angesehen. Allgemeiner aber werden wir x und y selbst als Funktionen zweier unabhängig Veränderlichen, die etwa p und q heissen mögen, betrachten, so dass

$$x=\varphi(p,q),\ y=\psi(p,q) \text{ also } z=F(p,q). \qquad (30)$$

Es unterliegt sodann keiner Schwierigkeit, obige Grössen so umzuformen, dass man p und q als unabhängig Veränderliche einführt. Man hat:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial p}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p},\quad \frac{\partial z}{\partial q}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q},\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial p^2},\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q},\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial q^2};
\end{aligned}\right\}\quad (31)$$

woraus

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

bestimmt werden. Man erhält z. *B.*:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial p}-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}}{\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial p}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial p}}{\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial p}};\quad \text{u. s. w.}$$

Stellt man nun noch eine Beziehung zwischen x und y, also dadurch auch zwischen p und q fest, so hat man

$$\partial x = \left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}\right)\partial p\,,$$

so dass in dem Elemente

$$\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

∂x durch obige Grösse zu ersetzen ist. Was $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ anbelangt, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p}}\,,$$

wo natürlich partielle Differentialquotienten gemeint sind. Daraus folgt:

$$(32)\qquad \partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$$

$$= \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2\right]\partial p^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\right]\partial p\,\partial q + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2\right]\partial q^2}.$$

Es ist nicht schwer, den allgemeinen Ausdruck (32) bedeutend zu vereinfachen. Wir wollen nämlich zur Bestimmung der Lage der Punkte unserer krummen Oberfläche eine Art Polarkoordinaten einführen in folgender Weise. Von einem bestimmten Punkte A der krummen Oberfläche aus ziehe man nach allen Richtungen auf derselben kürzeste Linien; eine davon sei die erste. Sei nun r die Entfernung des beliebigen Punktes M von A, gemessen auf der durch M gehenden Kürzesten, ψ der Winkel, den eben diese Kürzeste mit der ersten macht, wo ψ (in Bogen zum Halbmesser 1) von 0 bis 2π gezählt werde. Geht man auf einer der von A ausgehenden Kürzesten fort, so ist für alle Punkte, die man durchläuft, ψ konstant; geht man dagegen auf einer Linie fort, welche alle Kürzesten senkrecht durchschneidet, so bleibt für alle durchlaufenen Punkte r konstant*).

Setzt man nun in (32) r für p, ψ für q, so ist z. B. $\frac{\partial x}{\partial r}$ der Differentialquotient von x, wenn bloss r als veränderlich angesehen wird; also, da ∂r das Element der kürzesten Linie im Punkte M, für welche ja ψ konstant ist, ist $\frac{\partial x}{\partial r}$ der Kosinus des Winkels, den jenes Element mit der Axe der x macht; eben so sind $\frac{\partial y}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial r}$ die Kosinus der Winkel mit den Axen der y und z, so dass

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=1. \qquad (33)$$

Die Grössen

$$\frac{\partial x}{\partial \psi},\quad \frac{\partial y}{\partial \psi},\quad \frac{\partial z}{\partial \psi}$$

sind ebenfalls partielle Differentialquotienten, allein sie drücken nicht unmittelbar Kosinus aus, da $\partial\psi$ nicht das durch M gehende Element der zweiten Linie (die durch M gehend auf den Kürzesten senkrecht steht) ist. Diese Kosinus sind im Gegentheil:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial x}{\partial \psi},\quad \frac{1}{v}\frac{\partial y}{\partial \psi},\quad \frac{1}{v}\frac{\partial z}{\partial \psi};$$

wo

---

*) Wie nämlich leicht einzusehen, lassen sich die in §. 9. erwiesenen Sätze auch umkehren. Für den ersten z. B. muss jede Linie, die auf allen Kürzesten, die von der Kurve A ausgehen, senkrecht steht, von der Kurve A aus durchweg denselben Abstand haben. Denn denkt man sich eine Linie von B von gleichem Abstand, die nur in einem Punkte mit ersterer zusammentrifft, so fallen die Elemente beider Kurven hier zusammen, als senkrecht stehend auf derselben Kürzesten, und folglich auch alle folgenden Elemente.

$$v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2}.$$

Denkt man sich also, wie bereits gesagt, durch den Punkt M, dem r und ψ zugehören, zwei Kurven, von denen die eine die Kürzeste von A aus ist, auf der r gezählt wird und für welche ψ konstant ist, und die zweite auf dieser (und allen Kürzesten) Senkrechte, für welche r konstant ist, so muss, weil diese zwei Kurven auf einander senkrecht stehen:

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial\psi}=0$$

sein, so dass also jetzt

$$\partial s^2=\partial r^2+v^2\partial\psi^2,\quad v^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y^2}{\partial\psi}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2. \quad (34)$$

Hier ist also klar, dass $v\partial\psi$ das Element der zweiten Kurve im Punkte M ist, da ∂s die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete ∂r, die andere folglich $v\partial\psi$ ist.

§. 11.

Wir haben in §. 8. gesehen, welche Bedeutung die Grösse RR_1 hatte. Es mag von Interesse sein, den Ausdruck derselben durch p und q (§. 10.) zu suchen.

Vergleicht man die Gleichungen (21') und (24) mit (31), so sieht man, dass sie dieselben sind, wenn man in erstern statt x, y, x', y', z' respective setzt: p, q, x, y, z.

Daraus folgt, unter Beachtung von (26'), wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}=A,\quad \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=B,\quad \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}=C,$$

$$C\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}+A\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}=D,\quad A\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=D',$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+B\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+C\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=D'':$$

$$\frac{DD'-D''^2}{C^4}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2,$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2}{C^2};$$

so dass

$$\frac{1}{RR_1}=\frac{DD'-D''^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}. \qquad (35)$$

Man setze nun

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=E,\quad \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=F,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2=G;$$

so ist

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2.$$

Schon in §. 8. wurde gezeigt, dass

$$\begin{aligned}DD'-D''^2=(A^2+B^2+C^2)\Big[&\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\\
&-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2\Big]\\
&+\left(C\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}-A\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(C\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}-A\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)\left(C\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}-A\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\right)\\
&+\left(A\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}-B\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(A\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}-B\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right)\left(A\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}-B\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\right)\\
&+\left(C\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}-B\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(C\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}-B\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)\left(C\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}-B\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\right).\end{aligned}$$

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=m,$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=m',$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=m'';$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}+\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=n,$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}+\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=n',$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=n'';$$

so ist offenbar:

$$m=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p},\quad m'=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q},\quad m''=\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p};$$

$$n=\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q},\quad n'=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},\quad n''=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q};$$

sodann

$$\frac{\partial n}{\partial q}-\frac{\partial n'}{\partial p}$$

$$=\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}\right)^2$$

$$=\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}.$$

Ferner, wie in §. 8.:

$$\frac{\partial y}{\partial q}m'-\frac{\partial y}{\partial p}n'=C\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}-A\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q},$$

$$\frac{\partial z}{\partial q}m'-\frac{\partial z}{\partial p}n'=A\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}-B\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}m'-\frac{\partial x}{\partial p}n'=C\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}-B\frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q},$$

$$\frac{\partial y}{\partial q}m''-\frac{\partial y}{\partial p}n''=C\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}-A\frac{\partial^2 z}{\partial q^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial q}m-\frac{\partial y}{\partial p}n=C\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}-A\frac{\partial^2 z}{\partial p^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial q}m''-\frac{\partial z}{\partial p}n''=A\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}-B\frac{\partial^2 x}{\partial q^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial q}m-\frac{\partial z}{\partial p}n=A\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}-B\frac{\partial^2 x}{\partial p^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}m'' - \frac{\partial x}{\partial p}n'' = B\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} - C\frac{\partial^2 y}{\partial q^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}m - \frac{\partial x}{\partial p}n = B\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} - C\frac{\partial^2 y}{\partial p^2};$$

woraus leicht für die letzten Zeilen in dem Ausdruck von $DD' - D''^2$:

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2\right](m'^2 - mm'')$$
$$+ \left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\right)(nm'' + mn'' - 2m'n')$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2\right](n'^2 - nn'')$$
$$= E\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} + \frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q}\right]$$
$$+ F\left[\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} + \frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}\right]$$
$$+ G\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} + \frac{1}{4}\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}\right].$$

Daraus folgt nun endlich nach (35):

$$\frac{4(EG - F^2)^2}{RR_1} = E\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} + \frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q}\right]$$
$$+ F\left[4\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}\right]$$
$$+ G\left[\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 - 2\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}\right]$$
$$- 2(EG - F^2)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right]. \qquad (36)$$

Liouville hat in den Comptes rendus (von 1851) diesem Ausdruck eine etwas gedrungenere Gestalt gegeben. Setzt man nämlich $\sqrt{EG - F^2} = D$, so ist:

$$-\frac{2D}{RR_1} = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{\partial G}{\partial p} + \frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{D}\left(\frac{\partial E}{\partial q} - \frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial p}\right)\right]. \qquad (36')$$

§. 12.

Vergleicht man die Formel (32) mit den so eben erhaltenen Resultaten, so sieht man, dass E, F, G nichts anderes sind, als die Koeffizienten von ∂p^2, $2\partial p\partial q$, ∂q^2 in dem Ausdruck des Linearelements ∂s. Führt man nun die §. 10. zu Ende bemerkten Koordinaten ein, (wo $p=r$, $q=\psi$), so ist $E=1$, $F=0$, $G=v^2$, also $D=v$, und mithin giebt (36′):

$$-\frac{2v}{RR_1}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{v}\frac{\partial .v^2}{\partial r}\right]=2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

also

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{v}{RR_1}=0, \qquad (37)$$

so dass v durch die Grösse $\frac{1}{RR_1}$ gegeben ist. Ist nun $\frac{1}{RR_1}$ in allen Punkten der Fläche konstant, gleich b, so folgt aus (37):

$$v=\frac{1}{\sqrt{b}}\sin(r\sqrt{b}). \qquad (38)$$

Allgemein ist nämlich $v=0$, wenn $r=0$, da dann das Element $r\partial\psi$ ebenfalls verschwindet; ferner ist für unendlich kleine r offenbar die durch die Endpunkte der Kürzesten gehende (senkrechte) Linie als Kreis zu betrachten vom (unendlich kleinen) Halbmesser r, so dass das Element dieser Linie gleich $r\partial\psi$, d. h. also für unendlich kleine r ist $\frac{\partial v}{\partial r}=1$, und also für $r=0$ muss auch $\frac{\partial v}{\partial r}=1$ sein, was die Formel (38) rechtfertigt.

Für konstante Werthe von $\frac{1}{RR_1}=b$ kann man leicht die Länge der Linie bestimmen, welche durch die Endpunkte aller gleich langen Kürzesten (r) geht; dieselbe ist:

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^{2\pi}\sin(r\sqrt{b})\partial\psi=\frac{2\pi}{\sqrt{b}}\sin(r\sqrt{b}). \qquad (39)$$

In dem speziellen Falle, wenn $b=0$, ist $v=r$, also die Länge $=2r\pi$, in welchem Falle z. B. die sogenannten abwickelbaren Flächen sind (Zylinder, Kegel u. s w.); im allgemeinen Falle ist die Kugel, deren Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{b}}$ ist, enthalten, wo man den Satz (39) sehr leicht direkt nachweisen kann.

Für den Fall, dass die Grösse RR_1 in allen Punkten der Fläche konstant ist, lässt sich leicht nachweisen, dass zwei Flächen, denen diese Eigenschaft zukommt, und für welche der konstante Werth von RR_1 derselbe ist, die Eigenschaft haben, sich auf einander abwickeln zu lassen, d. h. dass die eine eine Biegung der andern ist.

Denn wenn man die Koordinaten von §. 10. einführt, so ist das Element der einen:

$$\sqrt{\partial r^2 + \frac{1}{\sqrt{b}} \sin^2(r\sqrt{b}).\partial\psi^2},$$

der andern:

$$\sqrt{\partial r'^2 + \frac{1}{\sqrt{b}} \sin^2(r'\sqrt{b}).\partial\psi'^2};$$

diese Elemente werden zusammenfallen, wenn man $r'=r$, $\psi'=\psi + \text{const.}$ annimmt, und wo nun zwischen r und ψ keine Beziehung festgestellt ist, wie diess nach §. 8. erforderlich ist. Man sieht, dass die Gleichungen $r'=r$, $\psi'=\psi+\text{const.}$ die entsprechenden (d. h. auf einander fallenden) Punkte beider Flächen bestimmen.

Wir wollen nun auch den allgemeinern Fall untersuchen, da $\frac{1}{RR_1}$ nicht konstant ist, und wollen zur Abkürzung setzen:

$$RR_1 = \varepsilon.$$

Wir nehmen an, dass die Lage der verschiedenen Punkte auf der einen Fläche durch die Koordinaten p und q (§. 10.) auf der andern durch p', q' festgestellt werde. Sollen die beiden Flächen sich auf einander abwickeln lassen, so muss, wenn p, q und p', q' zweien einander entsprechenden Punkten zugehören, identisch, d. h. ohne eine Beziehung zwischen p und q einzuführen, sein (§. 10. 11.):

$$E\partial p^2 + 2F\partial p\partial q + G\partial q^2 = E'\partial p'^2 + 2F'\partial p'\partial q' + G'\partial q'^2, \quad (40)$$

worin E', F', G' in Bezug auf p', q' dieselbe Bedeutung haben, wie E, F, G in Bezug auf p und q, so dass also p', q' von p, q abhängen. Ist $\varphi(p,q)$ das Produkt der beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Punkte (p, q), $\varphi'(p' q')$ dasselbe im Punkte (p', q'), so ist also

$$\varepsilon = \varphi(p,q) = \varphi'(p',q'), \quad (41)$$

nach dem was in §. 8. gezeigt wurde. Die Gleichung (41) muss möglich sein, wenn überhaupt eine Abwickelung möglich sein soll; darin aber müssen p, q, p', q' veränderlich sein, und es darf durch diese Gleichung keine Beziehung zwischen p, q oder p', q'

eingeführt werden, was z. B. geschehen würde, wenn die eine Seite konstant, die andere veränderlich wäre. Die (41) drückt sodann eine erste Beziehung zwischen den Koordinaten p, q, p', q' aus, von welcher Beziehung wir in unserer Betrachtung ausgehen. Die Gleichung (40) muss identisch erfüllt sein. und es handelt sich darum zu zeigen, in wie fern diess unter Annahme des Bestehens von (41) geschehen kann. Da p' q' Funktionen von p, q sind, so ist

$$\partial p' = \frac{\partial p'}{\partial p}\partial p + \frac{\partial p'}{\partial q}\partial q, \quad \partial q' = \frac{\partial q'}{\partial p}\partial p + \frac{\partial q'}{\partial q}\partial q;$$

also muss in (40):

$$E'\left(\frac{\partial p'}{\partial p}\right)^2 + F'\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial p} + 2G'\left(\frac{\partial q'}{\partial p}\right)^2 = E,$$

$$E'\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial p'}{\partial q} + F'\left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q} + \frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right) + G'\frac{\partial q'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q} = F,$$

$$E'\left(\frac{\partial p'}{\partial q}\right)^2 + 2F'\frac{\partial p'}{\partial q}\cdot\frac{\partial q'}{\partial q} + G'\left(\frac{\partial q'}{\partial q}\right)^2 = G$$

sein, woraus folgt:

$$EG - F^2 = (E'G' - F'^2)\left(\frac{\partial q'}{\partial p}\frac{\partial p'}{\partial q} - \frac{\partial q'}{\partial q}\frac{\partial p'}{\partial p}\right)^2. \qquad (43)$$

Setzt man in (41) zur Abkürzung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = m, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q} = n, \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial p'} = m', \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial q'} = n';$$

so folgt aus (41), indem

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial p} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial p'}\frac{\partial p'}{\partial p} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial p}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial q} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial q} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial p'}\frac{\partial p'}{\partial q};$$

$$m = m'\frac{\partial p'}{\partial p} + n'\frac{\partial q'}{\partial p}, \quad n = m'\frac{\partial p'}{\partial q} + n'\frac{\partial q'}{\partial q},$$

woraus

$$n'\left(\frac{\partial q'}{\partial q}\frac{\partial p'}{\partial p} - \frac{\partial q'}{\partial p}\frac{\partial p'}{\partial q}\right) = n\frac{\partial p'}{\partial p} - m\frac{\partial p'}{\partial q},$$

$$m'\left(\frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p} - \frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q}\right) = n\frac{\partial q'}{\partial p} - m\frac{\partial q'}{\partial q}. \qquad (44)$$

Multiplizirt man obige Werthe von E, F, G bezüglich mit n^2, $-2mn$, m^2 und addirt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (43) und (44):

$$\frac{En^2-2Fmn+Gm^2}{EG-F^2}=\frac{E'n'^2-2F'm'n'+G'm'^2}{E'G'-F'^2}. \qquad (45)$$

Die Gleichung (45) muss also jedenfalls erfüllt sein, wenn die Flächen sollen sich auf einander abwickeln lassen. Nun ist aus (40):

$$\partial\varepsilon = m\partial p + n\partial q = m'\partial p' + n'\partial q'. \qquad (46)$$

Man multiplizire nun die erste Seite von (40) mit der ersten von (45), eben so die zweiten Seiten, und subtrahire von den Produkten bezüglich $(m\partial p+n\partial q)^2$, $(m'\partial p'+n'\partial q')^2$, so ergiebt sich, wenn man die Quadratwurzel auszieht:

$$\frac{(En-Fm)\partial p+(Fn-Gm)\partial q}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$=\frac{(E'n'-F'm')\partial p'+(F'n'-G'm')\partial q'}{\sqrt{E'G'-F'^2}}. \qquad (47)$$

Angenommen nun erstens, die Gleichung (45) bestehe identisch, entweder unmittelbar oder in Folge der Gleichung (41). Alsdann drückt (47) die zweite Beziehung zwischen p, q, p', q' aus. Die (47) kann nie identisch bestehen, da sonst, indem diese Identität eine Folge von (46) wäre, offenbar sein müsste:

$$\frac{En-Fm}{m\sqrt{EG-F^2}}=\frac{Fn-Gm}{n\sqrt{EG-F^2}}=\frac{E'n'-F'm'}{m'\sqrt{E'G'-F'^2}}=\frac{F'n'-G'm'}{n'\sqrt{E'G'-F'^2}},$$

also

$$(En-Fm)n=(Fn-Gm)m,$$

d. h.

$$En^2-2Fmn+Gm^2=0=E'n'^2-2F'm'n'+G'm'^2,$$

welche Gleichung, da m, n nicht zugleich Null sind, indem sonst ε konstant wäre, und von den Grössen E, F, G nicht zwei zugleich Null sind, unmöglich ist.

Die Gleichung (47) muss, unter Zuziehung von (41), integrabel sein. Aus (41) folgt, dass eigentlich nur drei Veränderliche in (47) vorkommen, als welche ε, q, q' gewählt werden mögen. Aus (46) ist nun:

$$\partial p=\frac{\partial\varepsilon-n\partial q}{m}, \qquad \partial p'=\frac{\partial\varepsilon-n'\partial q'}{m'};$$

und wenn man diess in (47) setzt:

$$\left(\frac{En-Fm}{m\sqrt{EG-F^2}}-\frac{E'n'-F'm'}{m'\sqrt{E'G'-F'^2}}\right)\partial\varepsilon-\frac{En^2-2Fmn+Gm^2}{m\sqrt{EG-F^2}}\partial q$$

$$+\frac{E'n'^2-2F'm'n'+G'm'^2}{m'\sqrt{E'G'-F'^2}}\partial q'=0.$$

Diese Gleichung, indem man die noch vorkommenden p und p' vermöge der Gleichungen

$$\varepsilon=\varphi(p,q), \quad \varepsilon=\varphi'(p',q')$$

durch p, q, ε ausdrückt, muss integrabel sein, wozu bekanntlich

eine Bedingung erforderlich ist, welche, wenn man die drei Koeffizienten zur Abkürzung mit A, $-B$, C bezeichnet, ist:

$$C\left(-\frac{\partial B}{\partial \varepsilon}-\frac{\partial A}{\partial q}\right)-B\left(\frac{\partial A}{\partial q'}-\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}\right)+A\left(\frac{\partial C}{\partial q}+\frac{\partial B}{\partial q'}\right)=0.$$

Nun enthält B kein q', C kein q, also ist

$$\frac{\partial B}{\partial q'}=\frac{\partial C}{\partial q}=0;$$

und mithin ist diese Bedingung:

$$C\left(\frac{\partial B}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial A}{\partial q}\right)+B\left(\frac{\partial A}{\partial q'}-\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}\right)=0,$$

worin die partiellen Differentialquotienten unter der Voraussetzung gebildet sind, dass vorher p durch ε und q, p' durch ε und q' ausgedrückt werde. Da diess im Allgemeinen Schwierigkeiten unterliegen kann, so müssen wir suchen, diese Differentialquotienten durch die früheren auszudrücken. Bezeichnen wir die unter der so eben angegebenen Bedingung genommenen partiellen Differentialquotienten durch Klammern, so ist also obige Bedingung:

$$C\left[\left(\frac{\partial B}{\partial \varepsilon}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)\right]+B\left[\left(\frac{\partial A}{\partial q'}\right)-\left(\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}\right)\right]=0.$$

Nun ist

$$\frac{\partial B}{\partial p}=\left(\frac{\partial B}{\partial \varepsilon}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p}=m\left(\frac{\partial B}{\partial \varepsilon}\right),\ \text{also}\ \left(\frac{\partial B}{\partial \varepsilon}\right)=\frac{1}{m}\frac{\partial B}{\partial p};$$

$$\frac{\partial C}{\partial p'}=\left(\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}\right)\frac{\partial \varphi'}{\partial p'}=m'\left(\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}\right),\ \text{also}\ \left(\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}\right)=\frac{1}{m'}\frac{\partial C}{\partial p'}.$$

Sei weiter $A=\psi(p,q,p',q')$ und aus (41) folge $p=\lambda(\varepsilon, q)$, $p'=\lambda'(\varepsilon, q')$, so ist:

$$A=\psi[\lambda(\varepsilon, q), q, \lambda'(\varepsilon, q'), q']$$

also

$$\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)=\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial q}+\frac{\partial \psi}{\partial q}=\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial \lambda}{\partial q}+\frac{\partial A}{\partial q}.$$

Aber aus $p=\lambda(\varepsilon, q)$ folgt, da p von q unabhängig ist:

$$0=\frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial q}+\frac{\partial \lambda}{\partial q},\quad \frac{\partial \lambda}{\partial q}=-\frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial q}=-\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial q}=-\frac{n}{m}.$$

Man wird das Letztere um so leichter einsehen, wenn man

bedenkt, dass die Gleichung $\varepsilon = \varphi[\lambda(\varepsilon, q), q]$ eine identische ist, also, wenn man nach ε differenzirt:

$$1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\varepsilon},$$

also

$$\frac{\partial p}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}}$$

ist.

Man hat also

$$\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right) = m\frac{\frac{\partial A}{\partial q} - n\frac{\partial A}{\partial p}}{m},$$

und eben so

$$\left(\frac{\partial A}{\partial q'}\right) = m'\frac{\frac{\partial A}{\partial q'} - n'\frac{\partial A}{\partial p'}}{m'}.$$

Beachtet man, dass A die Differenz zweier Theile ist, von denen der erste kein p', q', der zweite kein p, q enthält, so wird obige Bedingungsgleichung zu:

$$\frac{E'n'^2 - 2F'm'n' + G'm'^2}{mm'\sqrt{E'G' - F'^2}}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{En^2 - 2Fmn + Gm^2}{m\sqrt{EG - F^2}}\right)\right.$$
$$\left. + m\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{En - Fm}{m\sqrt{EG - F^2}}\right) - n\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{En - Fm}{m\sqrt{EG - F^2}}\right)\right]$$
$$+ \frac{En^2 - 2Fmn + Gm^2}{mm'\sqrt{EG - F^2}}\left[- m'\frac{\partial}{\partial q'}\left(\frac{E'n' - F'm'}{m'\sqrt{E'G' - F'^2}}\right)\right.$$
$$\left. + n'\frac{\partial}{\partial p'}\left(\frac{E'n' - F'm'}{m'\sqrt{E'G' - F'^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial p'}\left(\frac{E'n'^2 - 2F'm'n' + G'm'^2}{m'\sqrt{E'G' - F'^2}}\right)\right] = 0.$$

Aus (45) lässt sich nun leicht der Werth des Quotienten

$$\frac{En^2 - 2Fmn + Gm^2}{E'n'^2 - 2F'm'n' + G'm'^2}$$

entnehmen; zugleich ist das in der ersten Klammer Eingeschlossene, da $\frac{\partial m}{\partial q} = \frac{\partial n}{\partial p}$:

$$\text{gleich } \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Gm - Fn}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{En - Fm}{\sqrt{EG - F^2}}\right)$$

und ähnlich das in der zweiten Klammer. Mithin wird obige Bedingungsgleichung zu:

$$(48)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Gm-Fn}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{En-Fm}{\sqrt{FG-F^2}}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial p'}\left(\frac{G'm'-F'n'}{\sqrt{E'G'-F'^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial q'}\left(\frac{E'n'-F'm'}{\sqrt{E'G'-F'^2}}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{E'G'-F'^2}}.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, lässt sich (47) unter Zuziehung von (41) integriren und giebt die zweite Gleichung zwischen p, q, p', q'. Ist aber (48) wirklich identisch erfüllt, entweder unmittelbar, oder in Folge von (41), so lassen sich die Flächen auf einander abwickeln. Denn man quadrire (47) und (46) und addire, so ergiebt sich, unter Beachtung von (45):

$$E\partial p^2+2F\partial p\partial q+G\partial q^2=E'\partial p'^2+2F'\partial p'\partial q'+G'\partial q'^2,$$

d. i. die Gleichheit der Linearelemente. Wenn also (45) identisch erfüllt ist, so muss (48) ebenfalls identisch erfüllt sein, damit die Abwickelung möglich sei.

Ist aber zweitens die (45) nicht identisch erfüllt, so besteht (47) immerhin noch, und ihr muss durch (41) und (45) genügt werden, wenn eine Abwickelung möglich sein soll. Geht diess an, so sieht man wie so eben, dass die Abwickelung möglich ist.

Da im ersten Falle bei der Integration eine willkührliche Konstante eintritt, so ist die Abwickelung (d. h. das Setzen entsprechender Punkte) nicht bloss in einer einzigen Weise möglich; im zweiten Falle aber wohl nur in einer, oder doch einer sehr beschränkten Anzahl von Arten.

§. 13.

Sind wieder R, R_1 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser in irgend einem Punkte (x, y, z) der krummen Oberfläche, so kann das bestimmte Integral, ausgedehnt auf ein Stück oder die ganze Oberfläche:

$$\iint\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{RR_1}\,\partial x\,\partial y \qquad (49)$$

leicht in ein anderes umgeformt werden. Dasselbe drückt übrigens nichts Anderes aus, als die Summe der Flächenelemente der krummen Oberfläche, jedes dieser Elemente dividirt durch das Produkt der beiden in ihm stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser. Wir wollen annehmen, die Ausdehnung des Integrals (49) gehe nicht weiter, als dass innerhalb der Gränzen der

Integration keiner der Halbmesser R oder R_1 Null werde. Bei einer doppelt erhabenen Fläche (§. 2.) ist RR_1 immer positiv, bei einer hohl-erhabenen immer negativ.

Das Produkt RR_1 ist (§. 8.) gleich

$$\frac{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2},$$

und also ist das Integral (49):

$$\iint \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\partial x\,\partial y, \qquad (49')$$

so weit ausgedehnt, dass innerhalb der Integrationsgränzen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

nicht unendlich wird.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=q;$$

so ist (49′):

$$\iint \frac{\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,\partial x\,\partial y.$$

Denken wir uns, man hätte das Integral

$$\iint \frac{\partial p\,\partial q}{[1+p^2+q^2]^{\frac{3}{2}}},$$

und wollte dasselbe umformen, indem man p und q als Funktionen von x und y betrachtete, so wäre dasselbe bekanntlich gleich

$$\pm\iint \frac{\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}}{[1+p^2+q^2]^{\frac{3}{2}}}\,\partial x\,\partial y.$$

Daraus folgt, dass, wenn $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, man setzen kann:

$$\iint \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\partial x \partial y = \pm \iint \frac{\partial p \partial q}{[1+p^2+q^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Um das letzte Integral nochmals umzuformen setze man

$$p=-\frac{u}{w}, \quad q=-\frac{v}{w},$$

wo u, v, w die Kosinus der drei Winkel sind, welche die Normale im Punkte (x, y, z) mit den Koordinatenaxen macht (§. 1), so dass $w=\pm\sqrt{1-u^2-v^2}$ und also

$$p=\mp\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \qquad q=\mp\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.$$

Alsdann ist statt $\partial p \partial q$ zu setzen:

$$\pm\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right)\partial u \partial v=\pm\frac{\partial u \partial v}{(1-u^2-v^2)^2},$$

so dass das verlangte Integral ist:

$$\pm\iint\frac{\partial u \partial v}{(1-u^2-v^2)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{u^2+v^2}{1-u^2-v^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\pm\iint\frac{\partial u \partial v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}. \quad (50)$$

Das Integral (50) drückt aber bekanntlich das Stück einer Kugelfläche vom Halbmesser 1 aus, wenn u, v, w die Koordinaten eines Punkts derselben sind. Der Punkt dieser Kugelfläche, welcher dem Punkte (x, y, z) der gegebenen Fläche entspricht, ist leicht zu finden. Zieht man nämlich durch den Mittelpunkt der Kugel eine Linie parallel der Normale im Punkte (x, y, z), und denkt sich z. B. die Kugel um den Anfangspunkt der Koordinaten beschrieben, die Koordinatenaxen zugleich auch Koordinatenaxen der Kugel, so sind die Koordinaten des Endpunkts des Halbmessers nichts Anderes als die Grössen u, v, w. Daraus folgt nun, dass, wenn das Integral (49) über die ganze Fläche ausgedehnt werden kann und diese eine geschlossene ist, dasselbe $=\pm 4\pi$ sei, das obere Zeichen geltend, wenn RR_1 immer positiv, das untere, wenn RR_1 beständig negativ ist.

Man kann hieraus auch den Satz ziehen, von dem **Gauss** bei seinen Bestimmungen ausgegangen ist. Denkt man sich nämlich, wie vorhin, die Kugel vom Halbmesser 1, und ein unendlich kleines Element σ der krummen Fläche, zieht in allen Gränzpunkten desselben Normalen und durch den Mittelpunkt der Kugel Halbmesser parallel mit diesen (nach derselben Seite gerichteten) Normalen, so erhält man auf der Kugel ein unendlich kleines

Element σ', und da man in der Ausdehnung von σ die Grösse RR_1 als constant ansehen kann, so ist $(49) = \frac{\sigma}{RR_1}$, d. h. man hat

$$\frac{\sigma}{RR_1} = \pm\sigma', \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = \pm\frac{1}{RR_1}; \qquad (51)$$

und daher rührt es, dass Gauss die Grösse $\frac{1}{RR_1}$ das Krümmungsmaass der Fläche in dem betreffenden Punkte nennt. In (51) gilt das obere Zeichen, wenn RR_1 positiv, das untere, wenn RR_1 negativ. Das Integral (49) heisst bei Gauss die Kurvatur der Fläche (oder eines Stückes derselben).

§. 14.

Wir wollen uns nun auf einer krummen Fläche von einem Punkte A aus eine unendliche Menge kürzester Linien gezogen denken (§. 10.); eine derselben sei als die erste angenommen, von der aus die Winkel ψ (§. 10.) gezählt werden, eine zweite dieser Kürzesten mache mit der ersten einen bestimmten Winkel. Auf der ersten nehmen wir einen Punkt B, auf der zweiten einen Punkt C an, und verbinden B und C durch eine kürzeste Linie auf der Oberfläche. Wir erhalten so ein von kürzesten Linien auf der krummen Oberfläche eingeschlossenes Dreieck ABC, von dem wir voraussetzen wollen, dass für alle Punkte desselben RR_1 sein Zeichen nicht wechsle (§. 13.). Die drei Winkel desselben seien A, B, C. Im Punkte B ist (§. 10) $\psi = 0$, im Punkte C: $\psi = A$. Rechnen wir den Winkel, den die kürzeste Linie BC mit den von A ausgehenden Kürzesten macht, je nach der Seite hin, nach der die positiven ∂r und $\partial\psi$ gehen, so ist klar, dass dieser Winkel im Punkte B gleich $\pi - B$, im Punkte C gleich C ist (A, B, C in Bögen zum Halbmesser 1 gerechnet). Wir haben nun noch einen Ausdruck für diesen Winkel im Allgemeinen zu suchen.

Das Element irgend einer Kurve auf der Oberfläche wird nach §. 10. in Bezug auf diese Koordinaten ausgedrückt durch

$$\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2 + v^2}.\partial\psi;$$

soll diese Kurve eine Kürzeste sein, so muss bekanntlich, wenn $\frac{\partial r}{\partial\psi} = r'$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial}{\partial r}[\sqrt{r'^2 + v^2}] - \frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{\partial}{\partial r'}\sqrt{r'^2 + v^2}\right] = 0,$$

d. h.

$$\frac{v\frac{\partial v}{\partial r}}{\sqrt{r'^2+v^2}}-\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{r'}{\sqrt{r'^2+v^2}}\right]=0 \qquad (52)$$

sein. Ist allgemein φ der Winkel, den das Element $\sqrt{r'^2+v^2}\partial\psi$ mit der Linie, auf der r gezählt wird, macht und zwar nach der Seite hin, nach der die positiven ∂r und $\partial\psi$ gerechnet werden, so ist offenbar:

$$\cos\varphi=\frac{\partial r}{\partial\psi\sqrt{r'^2+v^2}}=\frac{r'}{\sqrt{r'^2+v^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{v\partial\psi}{\partial\psi\sqrt{r'^2+v^2}}=\frac{v}{\sqrt{r'^2+v^2}};$$

also wird (52):

$$\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial\psi}(\cos\varphi)=0,\text{ d. h. }\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=-\frac{\partial v}{\partial r}. \qquad (53)$$

Wenden wir das Gesagte nun auf die Sätze in §. 13. an. Ein Element der Fläche des Dreiecks ABC ist offenbar $v\partial\psi\partial r$ (§. 10), also giebt das Integral $\iint v\partial\psi\partial r$, ausgedehnt auf alle Punkte des Dreiecks, die Fläche des Dreiecks an.

Aus §. 13. erhellet auch, dass

$$\iint\frac{v\partial r\partial\psi}{RR_1}=\pm\text{ der Fläche einer}$$

Figur auf der Kugel vom Halbmesser 1 ist,

welche man erhält, wenn man durch den Mittelpunkt der Kugel Halbmesser zieht, die parallel sind den Normalen der krummen Fläche in allen Gränzpunkten des Dreiecks ABC.

Aus §. 12. wissen wir, dass

$$\frac{v}{RR_1}=-\frac{\partial^2 v}{\partial r^2};$$

demnach ist

$$\iint\frac{v\partial r\partial\psi}{RR_1}=-\int\partial\psi\int\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\partial r,$$

wenn r von 0 bis r, ψ von 0 bis A gerechnet ist. Da $\frac{\partial v}{\partial r}=1$ für $r=0$ (§. 12), so ist also

$$\iint\frac{v\partial r\partial\psi}{RR_1}=-\int\partial\psi\left(\frac{\partial v}{\partial r}-1\right)=\int\partial\psi\left(1-\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\int\partial\psi\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right);$$

und also ist das eigentlich gesuchte bestimmte Integral:

$$\int_0^A \left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\partial\psi\,.$$

Für $\psi=0$ ist $\varphi=\pi-B$, für $\psi=A$ ist $\varphi=C$; also ist

$$\int_\varphi^A \partial\psi\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)=A+C-(\pi-B)=A+C+B-\pi.$$

Demnach ist:

$$\iint\frac{v\partial r\partial\psi}{RR_1}=A+B+C-\pi,$$

wenn das Integral auf alle Punkte des Dreiecks ABC ausgedehnt wird. Ist die Fläche doppelt erhaben, so ist also $A+B+C-\pi$ die Fläche der dem Dreieck ABC entsprechenden Figur auf der Kugel; ist die Fläche hohl-erhaben, so ist umgekehrt $\pi-(A+B+C)$ diese Fläche. Man kann also sagen: Die Summe der drei Winkel eines von kürzesten Linien auf einer krummen Oberfläche eingeschlossenen Dreiecks ist grösser als 2 Rechte, wenn die Fläche doppelt erhaben, kleiner als 2 Rechte, wenn sie hohl-erhaben ist. Der Ueberschuss verhält sich zu 720°, wie die Fläche der dem Dreick entsprechenden Figur auf der Kugel zur Fläche der ganzen Kugel sich verhält.

Hätte man ein Vieleck von n kürzesten Linien, die sich aber nicht durchkreuzen, so kann man es durch kürzeste Linien in $n-2$ solcher Dreiecke abtheilen und man findet, dass der Unterschied der Summe aller Winkel von $(n-2).180^0$ sich verhält zu 720^0, wie die Fläche der dem Vieleck entsprechenden Figur auf der Kugel zur Fläche der ganzen Kugel. Der Unterschied $A+B+C+D+\ldots-(n-2).180^0$ ist positiv bei doppelt erhabenen, negativ bei hohl-erhabenen Flächen.

§. 15.

Im Seitherigen wurde eine Art Polarkoordinaten beibehalten; es ist aber nicht schwer, eine weitere Art rechtwinkliger Koordinaten einzuführen. Durch den Anfangspunkt A obiger Polarkoordinaten wollen wir uns wieder die erste kürzeste Linie gezogen denken und auf derselben in all ihren Punkten senkrechte kürzeste Linien errichten. Ein jeder Punkt M der Oberfläche wird nun bestimmt werden können durch die Entfernung q desselben von der ersten kürzesten Linie — der Abszissenaxe, und durch die Entfernung p des Fusspunktes der Senkrechten vom Anfangspunkt, gemessen auf der Abszissenaxe. Wir wollen die positiven p nach

der Seite rechnen, nach der (§. 10.) $\psi=0$ ist, die positiven q nach der Seite, nach der die positiven ψ gerechnet werden. Es handelt sich nun darum, zwischen r, ψ, p, q Gleichungen aufzustellen.

Zunächst bemerken wir, dass die Formel (32) ein jedes durch M gehende Linearelement darstellt. Da jetzt ∂q das unmittelbar durch M gehende Element der Ordinate ist, so ist (wie in § 10):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2=1,\quad \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=1,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=w^2;$$

also das Element:

$$\partial s=\sqrt{w^2\partial p^2+\partial q^2}.$$

Denkt man sich durch den Punkt M eine Linie gezogen, deren Punkte von der Abszissenaxe alle dieselbe Entfernung q haben, so steht sie senkrecht auf allen Ordinaten (§. 9.) und das Element derselben im Punkte M ist also $w\partial p$. Ist λ der Winkel, den das Element ∂s mit dieser Linie macht, der Winkel nach der Seite hin gerechnet, nach der die positiven ∂p und ∂q gehen, so ist

$$\cos\lambda=\frac{w\partial p}{\sqrt{w^2\partial p+\partial q^2}},\quad \sin\lambda=\frac{\partial q}{\sqrt{w^2\partial p^2+\partial q^2}}. \qquad (54)$$

In Bezug auf die Koordinater r, ψ ist dasselbe Element:

$$\sqrt{\partial r^2+v^2\partial\psi^2}\quad (\text{§. 10.});$$

demnach ist

$$\partial s^2=w^2\partial p^2+\partial q^2=\partial r^2+v^2\partial\psi^2. \qquad (55)$$

Das Element der von A ausgehenden Kürzesten, auf der r gezählt ist, im Punkte M (Taf. IX. Fig. 1) ist ∂r; $v\partial\psi$ ist das Element einer darauf Senkrechten, die durch die Endpunkte aller Kürzesten von der Länge r geht (§. 9. 10.)

Ist φ der Winkel, den ∂s mit ∂r macht (§. 14.), so ist

$$\cos\varphi=\frac{\partial r}{\partial s},\quad \sin\varphi=\frac{v\partial\psi}{\partial s}.$$

Zugleich ist $\varphi-\lambda$ der Winkel, den die Elemente $w\partial p$ und ∂r mit einander machen, den wir α nennen wollen, wobei dieser Winkel α von dem Element ∂r an in der Richtung gegen $v\partial\psi$ gezählt wird. Alsdann ist, wie leicht ersichtlich:

$$\cos\alpha = \cos\varphi\cos\lambda + \sin\varphi\sin\lambda = \frac{w\,\partial p.\partial r}{\partial s^2} + \frac{\partial q.v\partial\psi}{\partial s^2},$$

$$\sin\alpha = \sin\varphi\cos\lambda - \cos\varphi\sin\lambda = \frac{w\partial p.v\partial\psi}{\partial s^2} - \frac{\partial q.\partial r}{\partial s^2};$$

also

$$\partial r\cos\alpha + v\partial\psi\sin\alpha = w\partial p,\quad v\partial\psi\cos\alpha - \partial r\sin\alpha = \partial q,$$

wenn man (55) beachtet. Daraus ſolgt auch:

$$\partial r = w\partial p\cos\alpha - \partial q\sin\alpha,\quad v\partial\psi = w\partial p\sin\alpha + \partial q\cos\alpha;$$

d. h. man hat:

(56)

$$\frac{\partial r}{\partial p} = w\cos\alpha,\quad \frac{\partial r}{\partial q} = -\sin\alpha,\quad v\frac{\partial\psi}{\partial p} = w\sin\alpha,\quad v\frac{\partial\psi}{\partial q} = \cos\alpha;$$

woraus:

$$w^2\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2 = w^2,\quad vw^2\frac{\partial r}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q} + v\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p} = 0;$$

oder:

$$w^2\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2 = w^2,\quad w^2\frac{\partial r}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p} = 0; \qquad (57)$$

welche Gleichungen den Zuſammenhang zwiſchen p, q, r, ψ ausdrücken, und wo zugleich noch v und α geſunden werden, wenn nur w gegeben iſt.

Was w anbelangt, ſo iſt für $q=0$ das Element $w\partial p$ geradezu gleich ∂p, d. h. für $q=0$ iſt $w=1$. Aus den zwei erſten Gleichungen (56) folgt, wenn man die erſte nach q, die zweite nach p differenzirt und die Reſultate gleich ſetzt:

$$\frac{\partial w}{\partial q}\cos\alpha - w\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial q} = -\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial p}.$$

Für $q=0$ fällt aber $w\partial p$ zuſammen mit ∂r, alſo iſt $\alpha=0$; zugleich, was auch p ſei, bleibt für $q=0$ immer $\alpha=0$, d. h. für $q=0$ iſt α konſtant, und mithin $\frac{\partial\alpha}{\partial p}=0$, ſo daſs für $q=0$ auch $\frac{\partial w}{\partial q}=0$ ſein muſs.

Ganz wie die Gleichung (37) findet man auch hier:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} + \frac{w}{RR_1} = 0. \qquad (58)$$

Wir wollen nun annehmen, w lasse sich in eine nach ganzen positiven Potenzen von p und q fortlaufende Reihe entwickeln, und sei diese Reihe (da für $q=0$: $w=1$, $\frac{\partial w}{\partial q}=0$):

$$w=1+Aq^2+Bq^3+\ldots\ldots, \quad A=a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots,$$
$$B=b_0+b_1p+b_2p^2+\ldots.;$$

also

$$\left.\begin{aligned} w=1&+a_0q^2+a_1pq^2+a_1p^2q^2+\ldots. \\ &+b_0q^3+b_1pq^3+b_2p^2q^3+\ldots. \\ &+c_0q^4+c_1pq^4+c_2p^2q^4+\ldots\ldots. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

worin also a_0, $a_1,\ldots$, b_0, $b_1,\ldots$, ... als bekannt angenommen werden müssen.

Die erste der Gleichungen (57) ist:

$$\left(\frac{\partial.r^2}{\partial p}\right)^2+w^2\left(\frac{\partial.r^2}{\partial q}\right)^2=4w^2r^2. \qquad (57')$$

Da für unendlich kleine p und q offenbar $r^2=p^2+q^2$, so kann man also setzen:

$$\begin{aligned} r^2=p^2+Ap^3+Bp^4+\ldots.&+A'p^2q+B'p^3q+\ldots \\ +q^2+\mathfrak{A}q^3+\mathfrak{B}q^4+\ldots&+\mathfrak{A}'q^2p+\mathfrak{B}'q^3p+\ldots \\ &+A_1p^2q^2+B_1p^2q^3+\ldots \\ &+\mathfrak{A}_1q^2p^3+\mathfrak{B}_1q^2p^4+\ldots.. \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

Da für $q=0$ allgemein $p=r$ ist, so fallen, ausser p^2, alle Glieder weg, die bloss p enthalten; da für $p=0$ auch $r=q$, so fallen, ausser q^2, alle Glieder weg, die bloss q enthalten. Weiter ist also für $p=0$:

$$r^2=q^2, \quad \left(\frac{\partial.r^2}{\partial q}\right)^2=4q^2$$

und $\frac{\partial.r^2}{\partial p}$ enthält für $p=0$ bloss die Glieder, die p in der ersten Potenz enthielten. Aus (57') folgt aber für $p=0$:

$$\frac{1}{w^2}\left(\frac{\partial.r^2}{\partial p}\right)^2+4q^2=4q^2, \quad \frac{\partial.r^2}{\partial p}=0;$$

d. h. alle jene Glieder müssen ebenfalls wegfallen. Für $q=0$ ist

$$w=1,\quad \left(\frac{\partial . r^2}{\partial p}\right)^2=4p^2;$$

$\left(\frac{\partial . r^2}{\partial q}\right)$ enthält (für $q=0$) bloss die Glieder, welche q in der ersten Potenz enthielten, also ist für $q=0\,(r=p)$ in (57'):

$$4p^2+\left(\frac{\partial . r^2}{\partial q}\right)^2=4p^2,\quad \frac{\partial . r^2}{\partial q}=0;$$

so dass also auch jene Glieder verschwinden. Man wird also endlich setzen:

$$\begin{aligned} r^2 &= p^2+q^2+Ap^2q^2+Bp^3q^2+Cp^4q^2+\ldots\\ &+B_1p^2q^3+C_1p^3q^3+\ldots+C_2p^2q^4+\ldots, \end{aligned}\tag{60}$$

wenn man nicht über die sechste Ordnung hinausgeht.

Zieht man hieraus die Werthe von $\frac{\partial . r^2}{\partial p}$, $\frac{\partial . r^2}{\partial q}$, und setzt sie, nebst dem Werthe von w, in die Gleichung (57'), so erhält man:

$$\begin{aligned} &4p^2+4A^2p^2q^4+8Ap^2q^2+12Bp^3q^2+16Cp^4q^2+8B_1p^2q^3\\ &+12C_1p^3q^3+8C_2p^2q^4+8Bp^3q^2+8Cp^4q^2+\ldots\ldots\\ &+4q^2+4A^2p^4q^2+12B_1p^2q^3+12C_1p^3q^3+16C_2p^2q^4+8Ap^2q^2\\ &+4a_0{}^2q^6+8a_0q^4+8a_1pq^4+8a_2p^2q^4+8b_0q^5+8b_1pq^5\\ &+8c_0q^6+16Aa_0p^2q^4+\ldots\ldots\\ =4[&p^2+a_0{}^2p^2q^4+2a_0p^2q^2+2a_1p^3q^2+2a_2p^4q^2+2b_0p^2q^3+2b_1p^3q^3\\ &+2c_0p^2q^4+q^2+a_0{}^2q^6+2a_0q^4+2a_1pq^4+2a_2p^2q^4\\ &+2b_0q^5+2b_1pq^5+2c_0q^6+Ap^2q^2+2Aa_0p^2q^4\\ &+Bp^3q^2+Cp^4q^2+B_1p^2q^3+C_1p^3q^3+C_2p^2q^4+\ldots\ldots]. \end{aligned}$$

Daraus folgt, durch Vergleichung derselben Potenzen:

$$16A=8a_0+4A,\quad A=\frac{2}{3}a_0;$$

$$20B_1=8b_0+4B_1,\quad B_1=\frac{1}{2}b_0;$$

$$20B=8a_1+4B,\quad B=\frac{1}{2}a_1;$$

$$4A^2+24C_2+16Aa_0=4a_0{}^2+8c_0+8Aa_0+4C_2,\ C_2=\frac{2}{5}c_0-\frac{7}{45}a_0{}^2,$$

$$24C_1=8b_1+4C_1, \quad C_1=\frac{2}{5}b_1,$$

$$16C+4A^2+8C=8a_2+4C, \quad C=\frac{2}{5}a_2-\frac{4}{45}a_0^2;$$

so dass also:

$$r^2=p^2+q^2+\frac{2}{5}a_0p^2q^2+\frac{1}{2}a_1p^3q^2+(\frac{2}{5}a_2-\frac{4}{45}a_0^2)p^4q^2$$
$$+\frac{1}{2}b_0p^2q^3+\frac{2}{5}b_1p^3q^3+(\frac{2}{5}c_0-\frac{7}{45}a_0^2)p^2q^4+\ldots\ldots \quad (60')$$

welche Gleichung die Aufgabe löst, aus zwei Seiten eines rechtwinklichen, von kürzesten Linien gebildeten Dreiecks die dritte (Hypotenuse) zu finden.

Die erste Gleichung (56) giebt:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial.r^2}{\partial p}=r\cos\alpha.w,$$

also

$$r\cos\alpha=\frac{1}{2w}\frac{\partial.r^2}{\partial p}=p-\frac{1}{3}a_0pq^2-\frac{1}{4}a_1p^2q^2-(\frac{1}{5}a_2+\frac{8}{45}a_0^2)p^3q^2$$
$$-\frac{1}{2}b_0pq^3-\frac{2}{5}b_1p^2q^3-(\frac{3}{5}c_0-\frac{8}{45}a_0^2)pq^4+\ldots\ldots \quad (61)$$

Aus der zweiten Gleichung (56) folgt:

$$-r\sin\alpha=\frac{1}{2}\frac{\partial.r^2}{\partial q}=q+\frac{2}{3}a_0p^2q+\frac{1}{2}a_1p^3q+(\frac{2}{5}a_2-\frac{4}{45}a_0^2)p^4q$$
$$+\frac{3}{4}b_0p^2q^2+\frac{3}{5}b_1p^3q^2+(\frac{4}{5}c_0-\frac{14}{45}a_0^2)p^2q^3\ldots\ldots \quad (62)$$

Was ψ anbelangt, so ist, wie bereits gezeigt:

$$\frac{\partial w}{\partial q}\cos\alpha-w\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial q}+\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial p}=0.$$

Da aus (56) folgt:

$$\cos\alpha\frac{\partial\psi}{\partial p}-w\sin\alpha\frac{\partial\psi}{\partial q}=0,$$

so ist also

$$\cos\alpha\frac{\partial w}{\partial q}-w\sin\alpha\frac{\partial(\alpha+\psi)}{\partial q}+\cos\alpha\frac{\partial(\alpha+\psi)}{\partial p}=0,$$

d. h. auch

$$r\cos\alpha\frac{\partial w}{\partial q}-rw\sin\alpha\frac{\partial(\alpha+\psi)}{\partial q}+r\cos\alpha\frac{\partial(\alpha+\psi)}{\partial p}=0.$$

Für unendlich kleine p und q ist, wenn man den Winkel α von 0 bis 180° rechnet, aber positiv und negativ, wie man sich leicht überzeugt, $\psi+\alpha=0$ (Taf. IX. Fig. 2.), also kann man setzen:

$$\psi+\alpha=Ap+Bq+Cpq+Dp^2q+Ep^3q+Fp^4q+Gpq^2+Hp^2q^2$$
$$+Jp^3q^2+Kpq^3+Lpq^4+Mp^2q^3+\ldots\ldots$$

und wenn man nun in obige Gleichung die Werthe von

$$r\cos\alpha,\ -r\sin\alpha,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial q},\ \frac{\partial(\alpha+\psi)}{\partial p},\ \frac{\partial(\alpha+\psi)}{\partial q}$$

einsetzt, so erhält man A, B, ... M, und findet so:

$$\alpha+\psi=-a_0pq-\frac{2}{3}b_0p^2q+(\frac{1}{6}a_0^2-\frac{1}{2}a_2)p^3q$$
$$+(\frac{11}{30}a_0a_1-\frac{2}{5}a_3)p^4q-b_0pq^2-\frac{3}{4}b_1p^2q^2+(\frac{5}{12}a_0b_0-\frac{3}{5}b_2)p^3q^2$$
$$+(\frac{1}{3}a_0^2-c_0)pq^3+(\frac{19}{24}a_0b_0+\frac{1}{4}b_0)pq^4$$
$$+(\frac{109}{180}a_0a_1-\frac{4}{5}c_1-\frac{19}{30}a_0b_0-\frac{1}{5}b_0)p^2q^3+\ldots\ldots \qquad (63)$$

§. 16.

Sei (Taf. IX. Fig. 3.) der Punkt C auf einer krummen Fläche bestimmt durch die (rechtwinklichen) Koordinaten (§. 15.) $AB=p$, $BC=q$; man verlangt die Fläche S des Dreiecks kürzester Linien ABC als Funktion von p und q.

Lässt man p um die unendlich kleine Grösse ∂p sich ändern, während q konstant bleibt, so geht man dadurch zu dem Punkte C', über, und es ist CC' senkrecht auf BC und $B'C'$ (§. 9.). Die Aenderung von S ist

$$\frac{\partial S}{\partial p}\partial p=AB'C'-ABC.$$

Das Stück CD ist eine unendlich kleine Aenderung $\partial q'$ von q, die in bestimmtem Verhältniss zu ∂p stehen muss. Dieses Verhältniss lässt sich so finden: Man mache $AE=AC$ und ziehe CE, so steht (§. 9.) CE senkrecht auf AC und AE. Nun ist $CC'=w\partial p$ (§. 15.), ∂r erhält man, wenn man AC verlängert, also

ist (§. 15.) der Winkel zwischen CC' und ∂r gleich $-\alpha$, und folglich

$$C'CE = 90^0 + \alpha,$$

mithin

$$DCE = -\alpha,\ CE = CD.\sin(90^0+\alpha) = CD.\cos\alpha = \partial q'\cos\alpha,$$
$$CE = CC'.\cos(90^0+\alpha) = -w\partial p\sin\alpha;$$

folglich

$$\partial q'\cos\alpha = -w\sin\alpha\partial p,\ \partial q' = -w\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\partial p.$$

Daraus folgt, dass

$$ACD = \frac{\partial S}{\partial q}\partial q' = -w\,\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial S}{\partial q}\partial p,$$

und da offenbar

$$BB'CC' = \int_0^q w\,\partial p\,\partial q,\ DCC' = \frac{1}{2}w\,\partial p\,\partial q' = -\frac{1}{2}w^2\,\mathrm{tg}\,\alpha(\partial p)^2,$$

so ist

$$\frac{\partial S}{\partial p}\partial p = \partial p\int_0^q w\partial q + \frac{\partial S}{\partial q}\cdot w\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\partial p - \frac{1}{2}w^2\,\mathrm{tg}\,\alpha(\partial p)^2,$$

oder, wenn man durch ∂p dividirt und zur Gränze übergeht:

$$\cos\alpha\frac{\partial S}{\partial p} - w\sin\alpha\frac{\partial S}{\partial q} = \cos\alpha\int_0^q w\partial q,$$

also auch

$$r\cos\alpha\frac{\partial S}{\partial p} - rw\sin\alpha\frac{\partial S}{\partial q} = r\cos\alpha\int_0^q w\partial q\,.$$

Da, für unendlich kleine p und q, $S = \frac{1}{2}pq$, so kann man mithin setzen:

$$S = \frac{1}{2}pq + Apq^2 + Bpq^3 + Cpq^4 + Dpq^5 + Ep^2q + Fp^2q^3 + Gp^2q^4$$
$$+ Hp^3q + Jp^3q^2 + Kp^3q^3 + Lp^4q + Mp^4q^2 + Np^5q\,..$$

und wenn man in obige Formel diesen Werth einsetzt, zugleich (59), (61), (62) beachtet, so ergiebt sich in der gewöhnlichen, an einem Beispiele oben gezeigten Weise:

$$S=\frac{1}{2}pq-\frac{1}{12}a_0pq^3-\frac{1}{10}b_0pq^4+(\frac{1}{30}a_0^2-\frac{1}{10}c_0)pq^5$$
$$-\frac{7}{120}a_1p^2q^3-\frac{3}{40}b_1p^2q^4-\frac{1}{12}a_0p^3q-\frac{3}{40}b_0p^3q^2$$
$$-(\frac{1}{15}c_0+\frac{2}{45}a_2+\frac{1}{60}a_0^2)p^3q^3-\frac{1}{20}a_1p^4q-\frac{1}{20}b_1p^4q^2$$
$$+(\frac{1}{60}a_0^2-\frac{1}{30}a_2)p^5q\ldots\ldots \quad (64)$$

Das so eben berechnete Dreieck ist ein rechtwinkliches; es ist aber nicht schwer, von einem rechtwinklichen aus auf jedes andere zu schliessen. Man wähle (Taf. IX Fig. 4.) in der Seite BC des rechtwinklichen Dreiecks ABC den beliebigen Punkt D und sei

$$AB=p,\quad BC=q,\quad BD=q'.$$

Man hat nun zwei rechtwinkliche Dreiecke ABC und ABD, und wenn F die Fläche des Dreiecks ACD, so ist

$$F=ABC-ABD,$$

d. h. (64):

$$F=\frac{1}{2}p(q-q')-\frac{1}{12}a_0p[q^3-q'^3+p^2q-p^2q']$$
$$-\frac{1}{40}b_0p[4q^4-4q'^4+3p^2q^2-3p^2q'^2]-\frac{1}{120}a_1p^2[7q^3-7q'^3+6p^2q-6p^2q']\ldots$$

wenn man nur bis zu Gliedern fünfter Ordnung geht. Nun ist:

$$q^3-q'^3+p^2q-p^2q'=(q-q')(p^2+q^2+qq'+q'^2),$$
$$4q^4-4q'^4+3p^2q^2-3p^2q'^2=(q-q')(q+q')(3p^2+4q^2+4q'^2),$$
$$7q^3-7q'^3+6p^2q-6p^2q'=(q-q')(6p^2+7q^2+7qq'+7q'^2);$$

also auch

$$F=\frac{1}{2}p(q-q')[1-\frac{1}{6}a_0(p^2+q^2+qq'+q'^2)$$
$$-\frac{1}{20}b_0(q+q')(3p^2+4q^2+4q'^2)-\frac{1}{60}a_1p(6p^2+7q^2+7q'^2+7qq')]\ldots\ldots$$

Heissen (Taf. IX. Fig. 5.) A, B, C die drei Winkel eines Dreiecks kürzester Linien, a, b, c die ihnen entgegenstehenden Seiten, so ist $q-q'=a$; die Seiten c und b sind nichts Anderes, als Werthe von r in §. 15.; was den Winkel α anbelangt (§. 25.), so ist im Punkte B:

$$180^0-B-\alpha=90^0,\quad \alpha=90^0-B;$$

im Punkte C:

$$C+90^0-\alpha=180^0,\ \alpha=C-90^0;$$

somit nach (61):

$$b\sin C=p[1-\frac{1}{3}a_0q^2-\frac{1}{4}a_1pq^2-\frac{1}{2}b_0q^3-\ldots\ldots].$$

Dividirt man obigen Ausdruck von F durch diesen für $b\sin C$, so findet sich leicht, wenn man nur bis zur fünften Ordnung geht:

$$F=\frac{1}{2}ab\sin C[1-\frac{1}{6}a_0(p^2-q^2+q'^2+qq')$$
$$-\frac{1}{20}b_0(3p^2q+3p^2q'-6q^3+4q^2q'+4qq'^2+4q'^3)$$
$$-\frac{1}{60}a_1p(6p^2-8q^2+7qq'+7q'^2)].$$

Die drei hier vorkommenden Konstanten a_0, a_1, b_0 lassen sich in anderer Weise ausdrücken. Es wurde in §. 15. gezeigt, dass

$$\frac{1}{RR_1}=-\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}.$$

Entwickelt man, diesen Ausdruck nach (59), so ergiebt sich:

$$\frac{1}{RR_1}=-2a_0-2a_1p-6b_0q-6b_1pq-2a_2p^2-(12c_0-2a_0^2)q^2\ldots\ldots\ldots$$

Angenommen nun, die Werthe der Grösse $\frac{1}{RR_1}$ (des Krümmungsmaasses nach §. 13. in den Punkten A, B, C seien bezüglich α, β, γ, so ist, da in A: $p=q=0$, in B: $p=p$, $q=q$, in C: $p=p$, $q=q'$:

$$\alpha=-2a_0,\ \beta=-2a_0-2a_1p-6b_0q,\ \gamma=-2a_0-2a_1p-6b_0q',$$

wenn man bloss mit zu Gliedern erster Ordnung geht. In so weit genau ist also

$$a_0=-\frac{1}{2}\alpha,\quad a_1p=\frac{1}{2}\alpha+\frac{\beta q'-\gamma q}{2(q-q')},\quad b_0-\frac{\beta-\gamma}{6(q-q')}.$$

Da diese Grössen im obigen Ausdruck für F mit Grössen 4ter Ordnung multiplizirt sind, so sind sie genau genug bestimmt.

Setzt man nun diese Werthe, so ergiebt sich:

$$F=\frac{1}{2}ab\sin C[1+\frac{\alpha}{120}(4p^2-2q^2+3qq'+3q'^2)$$
$$+\frac{\beta}{120}(3p^2-6q^2+6qq'+3q'^2)+\frac{\gamma}{120}(3p^2-2q^2+qq'+4q'^2)].$$

Nun folgt aus (61) bis auf Grössen dritter Dimension ausschliesslich:

$$b \sin C = p;$$

aus (62) $(r=b,\ \alpha=C-90^0,\ a=q-q')$:

$$b \cos C - a = q',\ b \cos C = q.$$

Man sieht leicht ein, dass eine Annäherung bis mit auf Grössen zweiter Ordnung für p, q, q' in obiger Formel vollkommen genügend ist, da die Annäherung überhaupt nur auf die fünfte Ordnung einschliesslich geht. Setzt man diese Werthe, so ergiebt sich endlich:

$$F=\frac{1}{2}ab\sin C[1+\frac{\alpha}{120}(3a^2+4b^2-9ab\cos C) + \frac{\beta}{120}(4a^2+3b^2-9ab\cos C)+\frac{\gamma}{120}(3a^2+3b^2-12ab\cos C)], \tag{65}$$

angenähert bis mit zu Grössen fünfter Ordnung, wenn die Seiten die erste Ordnung sind.

Dass man in der Formel (65) vertauschen kann a, b, c, C bezüglich mit c, b, a, A oder a, c, b, B unterliegt keinem Anstand; nur tauscht man dann natürlich α, β, γ mit γ, β, α oder α, γ, β, so dass auch:

$$\left.\begin{aligned} F&=\frac{1}{2}bc\sin A[1+\frac{\alpha}{120}(3b^2+3c^2-12bc\cos A) \\ &\quad+\frac{\beta}{120}(3b^2+4c^2-9bc\cos A)+\frac{\gamma}{120}(4b^2+3c^2-9bc\cos A)], \\ F&=\frac{1}{2}ac\sin B[1+\frac{\alpha}{120}(3a^2+4c^2-9ac\cos B) \\ &\quad+\frac{\beta}{120}(3a^2+3c^2-12ac\cos B)+\frac{\gamma}{120}(4a^2+3c^2-9ac\cos B)]. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

§. 17.

Ehe wir weiter gehen, soll eine kurze Anwendung obiger Formeln auf die Erdoberfläche gemacht werden. Ist m die halbe grosse, n die halbe kleine Axe der Erde, und setzt man $m^2-n^2 = m^2e^2$; ist ferner φ die **Breite** eines Punkts auf der Erdoberfläche, so ist bekanntlich

$$\frac{1}{RR_1}=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{m^2(1-e^2)}.$$

Angenommen nun, man kenne die Breiten φ_1, φ_2, φ_3 der drei Eckpunkte eines geodätischen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c sind, so hat man für die Fläche F desselben nach (65):

$$F=\frac{1}{2}ab\sin C\left\{1+\frac{(1-e^2\sin^2\varphi_1)^2}{120m^2(1-e^2)}[3a^2+4b^2-9ab\cos C]\right.$$
$$+\frac{(1-e^2\sin^2\varphi_2)^2}{120m^2(1-e^2)}[4a^2+3b^2-9ab\cos C]$$
$$\left.+\frac{(1-e^2\sin^2\varphi_3)^2}{120m^2(1-e^2)}[3a^2+3b^2-12ab\cos C]\right\}, \quad (66)$$

worin φ_1, φ_2, φ_3 bezüglich die Breite des Punktes A, B, C ist. Sind die drei Punkte so gelegen, dass die Grössen

$$\frac{(1-e^2\sin^2\varphi_1)^2}{120m^2(1-e^2)},\quad \frac{(1-e^2\sin^2\varphi_2)^2}{120m^2(1-e^2)},\quad \frac{(1-e^2\sin^2\varphi_3)^2}{120m^2(1-e^2)}$$

bis auf einen genügenden Grad von Annäherung hin gleich gross angenommen werden können, so dass, wenn φ eine mittlere Breite zwischen den dreien ist, jede ohne merklichen Fehler gleich

$$\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{120m^2(1-e^2)}$$

gesetzt werden kann, so folgt aus (66):

$$F=\frac{1}{2}ab\sin C[1+\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{12m^2(1-e^2)}(a^2+b^2-3ab\cos C)]. \quad (67)$$

Läge das betrachtete Dreieck auf einer Kugel vom Halbmesser R, so wäre $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{r^2}$, also

$$F=\frac{1}{2}ab\sin C[1+\frac{1}{12R^2}(a^2+b^2-3ab\cos C)].$$

Daraus ergiebt sich, dass man, immer unter obiger Voraussetzung hinsichtlich der Breiten, die Fläche eines geodätischen Dreiecks auf der Erde berechnen kann, als läge dieses Dreieck auf einer Kugel vom Halbmesser

$$\frac{m\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi}.$$

Ganz Aehnliches gilt auch von der Berechnung des Dreiecks selbst. Da auf der Kugel die Grösse $\frac{1}{RR_1}$ immer konstant, gleich $\frac{1}{R^2}$ ist, so folgt aus §. 16., dass, was auch p und q seien, immer:

$$\frac{1}{r^2}=-2a_0-2a_1p-6b_0q-6b_1pq-2a_2p^2-(12c_0-2a_0{}^2)q^2-\ldots$$

Demnach ist:

$$a_0=-\frac{1}{2R^2},\ a_1=0,\ b_0=0,\ b_1=0,\ a_2=0,\ 12c_0-2a_0^2=0,\ c_0=\frac{1}{24R^4}\cdots$$

Geht man nur bis zu Grössen fünfter Ordnung einschliesslich, so ist (60'):

$$r^2=p^2+q^2+\frac{2}{3}a_0p^2q^2+\frac{1}{2}a_1p^3q^2+\frac{1}{2}b_0p^2q^3,$$

also auf der Kugel:

$$r^2=p^2+q^2-\frac{1}{3r^2}p^2q^2.$$

Sind α, β. γ die Werthe von $\frac{1}{RR_1}$ in den drei Eckpunkten des rechtwinklichen Dreicks ABC, so ist, wie in §. 16.:

$$\alpha=-2a_0,\ \beta=-2a_0-2a_1p,\ \gamma=-2a_0-2a_1p-6b_0q,$$

so dass, wenn α, β, γ als gleich angesehen werden können, a_1 und b_0 Null sein müssen, und mithin, unter dieser Voraussetzung,

$$r^2=p^2+q^2-\frac{1}{3}\alpha p^2q^2.$$

Daraus folgt, dass, wenn das geodätische Dreieck auf der Erde so beschaffen ist, dass die obigen Grössen α, β, γ als gleich angesehen werden können, die Berechnung der Stücke desselben wie die eines Kugeldreiecks geschehen kann, wenn der Halbmesser der Kugel

$$\frac{m\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

ist, wie oben. Wenn gleich ein rechtwinkliches Dreieck unsern Betrachtungen zu Grunde liegt, so gilt der Satz doch offenbar für jedes.

Man kann also bei geodätischen Rechnungen, wenn die Seiten der Dreiecke klein sind, die Erde als eine Kugel vom Halbmesser

$$\frac{m\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

ansehen. Was e^2 anbelangt, so ist $\log.e^2=0{\cdot}8108710-3$. Setzen wir eine Breite von 45° voraus, so wollen wir untersuchen, um wie viel $(1-e^2\sin^2B)^2$ sich ändert, wenn man von 45° zu 45° 10' übergeht, was mindestens einer Länge von 2·5 Meilen entspricht. Nun ergiebt sich, da $\log m=6{\cdot}5148235$:

$$\frac{1-e^2\sin^2 45^0}{m\sqrt{1-e^2}}=0{\cdot}00000030462,\quad \frac{1-e^2\sin^2 45^0 10'}{m\sqrt{1-e^2}}=0{\cdot}00000030462,$$

so dass diese Werthe erst in der zehnten Dezimale abweichen, woraus hervorgeht, dass auf Entfernungen von 3 bis 4 Meilen die sphärische Rechnung ohne irgend einen Nachtheil Platz greifen kann.

Es fällt diess auch zusammen mit dem in §. 12. Gezeigten, da, wenn $\frac{1}{RR_1}$ in naher Ausdehnung um den betrachteten Punkt herum sich nicht ändert, man dieses Stück Fläche abwickeln kann auf eine Kugel vom Halbmesser $\sqrt{RR_1}$.

§. 18.

Angenommen, eine krumme Fläche sei so beschaffen, dass in allen Punkten derselben die Grösse $\frac{1}{RR_1}$ denselben konstanten Werth k habe (§. 12.). Die Kugel ist offenbar in diesem Falle, und wenn R ihr Halbmesser, so ist $k=\frac{1}{R^2}$. Betrachtet man nun ein rechtwinkliches Dreieck kürzester Linien auf der so beschaffenen Oberfläche, so müssen sich aus den Formeln des §. 15., wenn diese Oberfläche eine Kugel ist, wo also die kürzesten Linien Bögen grösster Kreise sind, die bekannten Formeln für rechtwinkliche sphärische Dreiecke ableiten lassen, d. h. man wird haben, wenn B der rechte Winkel ist:

$$\left.\begin{aligned}\sin(a\sqrt{k})&=\sin(b\sqrt{k}).\sin A,\\ \sin(c\sqrt{k})&=\sin(b\sqrt{k}).\sin C,\\ \cos A&=\cos(a\sqrt{k}).\sin C,\\ \cos C&=\cos(c\sqrt{k}).\sin A,\\ \cos(b\sqrt{k})&=\cos(a\sqrt{k}).\cos(c\sqrt{k})\end{aligned}\right\}\quad(68)$$

Da man aber offenbar dieselbe Rechnung hat, ob die Fläche eine Kugel ist, oder ob eben k konstant ist, so werden die Formeln (68) für jedes rechtwinkliche Dreieck kürzester Linien auf einer krummen Oberfläche, für welche $\frac{1}{RR_1}$ konstant ist, gelten. Für einen positiven Werth von k folgt diess auch schon daraus, dass eine solche Fläche sich auf eine Kugel vom Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{k}}$ abwickeln lässt. Doch gilt unsere Behauptung auch für negative Werthe von k.

Man schliesst daraus nun leicht (siehe z. B. Archiv, Theil XVI. S. 196. ff), dass allgemein für jedes Dreieck kürzester Linien auf einer krummen Oberfläche von der angegebenen Beschaffenheit die Formeln der sphärischen Trigonometrie Anwendung finden, d. h. dass

(69)

$$\left.\begin{array}{l}\sin(a\sqrt{k}).\sin B=\sin(b\sqrt{k}).\sin A,\\ \cos(a\sqrt{k})=\cos(b\sqrt{k}).\cos(c\sqrt{k})+\sin(b\sqrt{k}).\sin(c\sqrt{k}).\cos A,\\ \cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C\cos(a\sqrt{k})\end{array}\right\}$$

u. s. w.

Es ergiebt sich hieraus eine weitere Bestätigung des in §. 17. Berührten.

§. 19.

In §. 12 wurden bereits die Bedingungen aufgestellt, unter denen eine Fläche auf einer andern sich abwickeln lässt. Eben weil Bedingungen bestehen, lässt sich also nicht jede Fläche auf jeder in der angegebenen Weise ausbreiten. Es soll desswegen die Aufgabe jetzt anders gefasst werden und sei verlangt, eine krumme Fläche auf einer andern krummen Fläche so abzubilden, dass das Abbild dem Urbild in je entsprechenden Elementen ähnlich sei. Es heisst diess aber nichts Anderes, als verlangen, dass die Linearelemente um zwei entsprechende Punkte herum gleich oft in einander enthalten seien und dass entsprechende Linearelemente denselben Winkel machen. Natürlich darf der in einem Punkte für alle Linearelemente konstante Quotient sich ändern von Punkt zu Punkt.

Seien also x, y, z die (wie immer rechtwinklichen) Koordinaten eines Punkts der ersten Fläche (Urbild), X, Y, Z die Koordinaten des entsprechenden Punkts der zweiten Fläche (Abbild), so werden X, Y, Z durch x, y, z bestimmt werden können. Drückt man die Koordinaten der ersten Fläche durch die zwei unabhängig Veränderlichen p, q aus (§. 10.), so werden also auch X, Y, Z Funktionen von p und q sein. Das Element ∂s der ersten Fläche kann durch

$$\sqrt{E\partial p^2+2F\partial p\partial q+G\partial q^2}$$

ausgedrückt werden (§. 10. u. 12.); eben so wird das Element ∂S der zweiten Fläche ausgedrückt durch

$$\sqrt{E'\partial p^2+2F'\partial p\partial q+G'\partial q^2},$$

und wenn $\frac{\partial S}{\partial s} = M$, so muss identisch, d. h. ohne Festsetzung einer Beziehung zwischen p und q:

$$E'\partial p^2 + 2F'\partial p\partial q + G'\partial q^2 = M^2[E\partial p^2 + 2F\partial p\partial q + G\partial q^2],$$

d h.

$$E' = M^2E, \quad F' = M^2F, \quad G' = M^2G \qquad (70)$$

sein. Dieselben Gleichungen (70) geben zugleich auch an, dass die Winkel je zweier estsprechender Linearelemente gleich sind. Zwei durch die Punkte (p, q), nämlich die entsprechenden Punkte beider Flächen, gehende Linearelemente, das eine zu dem Punkte $(p + \partial p, q + \partial q)$, das andere zu $(p + \partial p', q + \partial q')$ hin, sind

$$\partial s = \sqrt{E\partial p^2 + 2F\partial p\partial q + G\partial q^2}, \quad \partial s' = \sqrt{E\partial p'^2 + 2F\partial p'\partial q' + G\partial q'^2}$$

und

$$\partial S = \sqrt{E'\partial p^2 + 2F'\partial p\partial q + G'\partial q^2}, \quad \partial S' = \sqrt{E'\partial p' + 2F'\partial p'\partial q' + G'\partial q'^2};$$

die Kosinus der Winkel, welche ∂s mit den drei Koordinaten macht, sind:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial s};$$

u. s. w. ähnlich für $\partial s'$, ∂S, $\partial S'$. Der Kosinus des Winkels der Elemente ∂s und $\partial s'$ ist also:

$$\frac{\partial x \partial x' + \partial y \partial y' + \partial z \partial z'}{\partial s \partial s'}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial p}\partial p + \frac{\partial x}{\partial q}\partial q\right)\left(\frac{\partial x}{\partial p}\partial p' + \frac{\partial x}{\partial q}\partial q'\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\partial p + \frac{\partial y}{\partial q}\partial q\right)\left(\frac{\partial y}{\partial p}\partial p' + \frac{\partial y}{\partial q}\partial q'\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\partial p + \frac{\partial z}{\partial q}\partial q\right)\left(\frac{\partial z}{\partial p}\partial p' + \frac{\partial z}{\partial q}\partial q'\right)}{\partial s \partial s'}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2\right]\partial p \partial p' + \left[\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\right](\partial p \partial q' + \partial p' \partial q) + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2\right]\partial q \partial q'}{\partial s \partial s'}$$

$$= \frac{E \partial p \partial p' + F(\partial p \partial q' + \partial p' \partial q) + G \partial q \partial q'}{\partial s \partial s'}.$$

Ganz eben so ergiebt sich für den Kosinus des Winkels der Elemente S, $\partial S'$:

$$\frac{E'\partial p\partial p' + F'(\partial p\partial q' + \partial p'\partial q) + G'\partial q\partial q'}{\partial S\partial S'},$$

und nach den Formeln (70) sind beide Ausdrücke gleich, was unsern Satz beweist.

Die Bedingung, welche den Formeln (70) zu Grunde liegt, kann, ohne dass ein Zusammenhang zwishen p und q festgestellt wird, in anderer Weise dargestellt werden, so dass also immerhin alles Gesagte noch Geltung hat. Es ist nämlich, wenn $\sqrt{-1}=i$:

$$\partial s^2 = E\partial p^2 + 2F\partial p\partial q + G\partial q^2$$

$$= \frac{1}{E}[E\partial p + F\partial q + i\partial q\sqrt{EG-F^2}][E\partial p + F\partial q - i\partial q\sqrt{EG-F^2}],$$

da $EG-F^2$ immer positiv ist (§. 11.). Denken wir uns, v sei ein Faktor, der die Differentialgleichung

$$E\partial p + F\partial q + i\partial q\sqrt{EG-F^2} = 0.$$

integrabel mache, so ist also identisch:

$$E\partial p + F\partial q + i\partial q\sqrt{EG-F^2} = \frac{1}{v}[\partial\varphi + i\partial\psi],$$

wenn $\varphi + i\psi =$ Const. dann das Integral ist. Ganz eben so ist:

$$E\partial p + F\partial q - i\partial q\sqrt{EG-F^2} = \frac{1}{v'}[\partial\varphi - i\partial\psi],$$

und also

$$\partial s^2 = \frac{1}{Evv'}[\partial\varphi + i\partial\psi][\partial\varphi - i\partial\psi] = h(\partial\varphi^2 + \partial\psi^2),$$

wenn $h = \frac{1}{Evv'}$ eine bestimmte endliche Funktion von p und q ist.

Ganz eben so ist:

$$\partial S^2 = H[\partial\Phi + i\partial\Psi][\partial\Phi - i\partial\Psi] = H[\partial\Phi^2 + \partial\Psi^2].$$

Also hat man auch, da $\partial S^2 = M^2\partial s^2$:

$$\frac{M^2h}{H} = \frac{(\partial\Phi + i\partial\Psi)(\partial\Phi - i\partial\Psi)}{(\partial\varphi + i\partial\psi)(\partial\varphi - i\partial\psi)},$$

in welcher Gleichung $\frac{M^2h}{H}$ eine endliche Funktion von p, q ist, und in der keine Beziehung zwischen p und q festgesetzt werden

darf. Man wird der Bedingung, dass wie die erste, so auch die zweite Seite eine endliche Funktion von p und q sei, genügen, wenn man setzt:

$$\Phi + i\Psi = f(\varphi + i\psi),$$

wo f das Zeichen einer willkührlichen Funktion ist. Alsdann ist

$$\partial\Phi + i\partial\Psi = f'(\varphi + i\psi).(\partial\varphi + i\partial\psi),$$

also

$$\frac{\partial\Phi + i\partial\Psi}{\partial\varphi + i\partial\psi} = f'(\varphi + i\psi),$$

und eben so

$$\frac{\partial\Phi - i\partial\Psi}{\partial\varphi - i\partial\psi} = f'(\varphi - i\psi),$$

also

$$\frac{M^2 h}{H} = f'(\varphi + i\psi).f'(\varphi - i\psi),$$

wo $f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}$. Man wird bemerken, dass durch obige Annahme keine Beziehung zwischen p und q festgestellt ist, vielmehr bloss dadurch die einander entsprechenden Punkte beider Flächen gefunden werden. In der Gleichung

$$\Phi + i\Psi = f(\varphi + i\psi), \qquad (71)$$

sind nämlich Φ sowohl als Ψ Funktionen der Koordinaten der zweiten Fläche; φ, ψ der der ersten (p und q); und diese Gleichung lehrt somit, wenn man die reellen und imaginären Theile einander gleich setzt, den Punkt der zweiten Fläche finden, welcher einem bestimmten der ersten entspricht. Die oben ausgesprochenen Folgerungen, die auf (70) beruhen, gelten immer noch. Was den Werth von M — das Vergrösserungsverhältniss — anbelangt, so ist

$$M = \sqrt{\frac{H}{h} f'(\varphi + i\psi) f'(\varphi - i\psi)}. \qquad (72)$$

Allerdings hätte man auch setzen können $\Phi + i\Psi = f(\varphi - i\psi)$, und man hätte allen Bedingungen ebenfalls genügt; allein es genügt uns, bloss die Annahme (71) zu betrachten.

§. 20.

Von den so eben nachgewiesenen Sätzen soll nun zunächst eine Anwendung auf die Abbildung einer Kugel in einer Ebene gemacht werden, eine für Kartenzeichnung bekanntlich sehr wichtige Aufgabe. Sei $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ die Gleichung der Kugel, und man wähle Polarkoordinaten p, q so, dass

$$x=a\cos p\sin q,\quad y=a\sin p\sin q,\quad z=a\cos q;$$

so ist, wenn die Ebene der xy die des Aequators, die Axe der x in dem ersten Meridian liegt, die (positive) Axe der y von ihr aus um 90° absteht in der Richtung wie die Länge (von 0 bis 360°) gezählt wird, und die (positive) Axe der z gegen Norden gerichtet ist, p die Länge des betreffenden Punkts auf der Erde und $\frac{\pi}{2}-q$ die Breite. Man findet nun:

$$\frac{\partial x}{\partial p}=-a\sin p\sin q,\quad \frac{\partial y}{\partial p}=a\cos p\sin q,\quad \frac{\partial z}{\partial p}=0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}=a\cos p\cos q,\quad \frac{\partial y}{\partial q}=a\sin p\cos q,\quad \frac{\partial z}{\partial q}=-a\sin q;$$

also

$$E=a^2\sin^2 q,\quad F=0,\quad G=a^2;$$

mithin hat man zu integriren:

$$a^2\sin^2 q\,\partial p\pm ia^2\sin q\,\partial q=0;$$

es ist folglich

$$v=\frac{1}{a^2\sin^2 q},\quad v'=\frac{1}{a^2\sin^2 q},\quad h=\frac{1}{Ev^2}=a^2\sin^2 q,$$

$$\varphi=p,\quad \psi=\log\left(\operatorname{cotg}\frac{q}{2}\right);$$

wo die Logarithmen natürliche sind.

Nimmt man in der Ebene ein rechtwinkliches Koordinatensystem der X, Y, so ist ein Linearelement

$$\sqrt{\partial X^2+\partial Y^2},$$

also ist zu integriren

$$\partial X\pm i\partial Y=0,$$

wo nun $v=v'=1$, $H=1$, da $\partial S^2=\partial X^2+\partial Y^2$, mithin $\Phi=X$ $\Psi=Y$, und also giebt die Gleichung

$$X+iY=f(p+i\log\operatorname{cotg}\frac{q}{2}) \qquad (73)$$

an, in welcher Weise die Koordinaten X, Y durch p und q gefunden werden. Was M anbelangt, so ist

$$M=\frac{1}{a\sin q}\sqrt{f'(p+i\log\operatorname{cotg}\frac{q}{2})f'(p-i\log\operatorname{cotg}\frac{q}{2})}. \qquad (74)$$

Spezialisirt man die Funktion f und setzt zunächst $f(z)=kz$, wo k konstant, so erhält man aus (73) und (74):

$$X=kp, \quad Y=k\log\operatorname{cotg}\frac{q}{2}, \quad M=\frac{k}{a\sin q}; \qquad (75)$$

so dass man zu jedem Punkt (p, q) der Kugel den entsprechenden der Ebene (Karte) leicht bestimmen kann. Von dem Werthe von k hängt natürlich M ganz unmittelbar ab.

Fragen wir, wie bei dieser Abbildung (Kartirung) die Meridiane erscheinen, so hat man nur diejenigen Punkte der Karte zu suchen, die demselben Werthe von p angehören; für alle dieselben ist X also auch konstant, und die Meridiane erscheinen folglich als Gerade, die sämmtlich parallel sind mit der Axe der Y. Was die Breitenkreise anbelangt, so ist für sie q, also Y konstant, und sie erscheinen also als Gerade, die parallel gehen mit der Axe der x. Was die Verzeichnung der Längengrade anbelangt, so werden dieselben, gleichviel in welcher Breite sie sich befinden, alle gleich lang sein; sind 90^0-q, $90^0-q'$ die Breiten zweier Punkte der Karte auf demselben Meridian, so ist die Entfernung beider

$$k\log\left(\frac{\operatorname{cogt}\frac{q'}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{q}{2}}\right),$$

wenn

$$\operatorname{cotg}\frac{q'}{2}>\operatorname{cotg}\frac{q}{2}.$$

Bekanntlich ist diess die Mercator'sche Seekarten-Zeichnung.

Setzt man zweitens

$$f(x)=ke^{imx},$$

so ergiebt sich, wie oben:

$$\left.\begin{aligned} X&=k\,\mathrm{tg}^m\frac{q}{2}\cdot\cos mp,\\ Y&=k\,\mathrm{tg}^m\frac{q}{2}\cdot\sin mp,\\ M&=\frac{mk}{a\sin q}\,\mathrm{tg}^m\frac{q}{2}; \end{aligned}\right\}\qquad(76)$$

woraus für $m=1$:

$$X=k\,\mathrm{tg}\frac{q}{2}\cos p,\quad Y=k\,\mathrm{tg}\frac{q}{2}\sin p,\quad M=\frac{k(1-\cos q)}{a\sin^2 q}.$$

Da hieraus

$$X^2+Y^2=k^2\mathrm{tg}^2\frac{q}{2},\quad y=x\,\mathrm{tg}p$$

folgt, so schliesst man, dass sämmtliche Meridiane als gerade durch den Anfangspunkt gehende Linien erscheinen; während die Breitenkreise als Kreise vom Halbmesser $k\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}q$ erscheinen, deren Mittelpunkt ebenfalls der Anfangspunkt ist. Der Anfangspunkt entspricht dem Pole. Diese Zeichnungsweise giebt bekanntlich die stereographische Kartenprojektion.

Wählt man m so, dass M für die Werthe q_0 und q_1 gleich gross wird, so ist

$$m=\frac{\log\sin q_0-\log q_1}{\log\mathrm{tg}\frac{1}{2}q_0-\log\mathrm{tg}\frac{1}{2}q_1},$$

welche Projektion Harding bei seinen Himmelskarten angewendet hat.

Hätte man ein Rotationsellipsoid, dessen Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

ist, so setze man

$$x=a\cos p\cos q,\quad y=a\sin p\cos q,\quad z=b\sin q;$$

wo p die Länge und q die (sogenannte) reduzirte Breite des Punktes x, y, z ist. Alsdann findet man

$$\partial s^2 = a^2 \cos^2 q \partial p^2 + (a^2 \sin^2 q + b^2 \cos^2 q) \partial q^2$$
$$= a^2 \cos^2 q \left[\partial p^2 + \frac{a^2 \sin^2 q + b^2 \cos^2 q}{a^2 \cos^2 q} \partial q^2\right].$$

Also hat man $h = a^2 \cos^2 q$,

$$\partial p \pm i \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 q + b^2 \cos^2 q}{a^2 \cos^2 q}} \partial q = 0.$$

Setzt man nun $\operatorname{tg} q = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \omega$, so ist ω die Breite des betrachteten Punktes, und man hat:

$$\partial p \pm i \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \omega) \cos \omega} \partial \omega = 0,$$

wenn $a^2 - b^2 = a^2 e^2$. Also ist

$$\varphi = p, \quad \psi = \log\left[\operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\omega) \cdot \left(\frac{1 - e \sin \omega}{1 + e \sin \omega}\right)^{\frac{e}{2}}\right],$$

und mithin

$$X + iY = f\left[p + i \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\omega) \left(\frac{1 - e \sin \omega}{1 + e \cos \omega}\right)^{\frac{e}{2}}\right], \quad (77)$$

bei welcher Formel wir uns jedoch nicht weiter aufhalten wollen.

§. 21.

Wir wenden uns zu einer zweiten Anwendung der in §. 19. aufgestellten Sätze, die für die höhere Grodäsie von grosser Wichtigkeit ist — die Abbildung eines Umdrehungsellipsoids auf einer Kugel.

Sei wieder, wie in §. 20., die Gleichung des Rotationsellipsoids:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad b^2 < a^2;$$

λ die Länge, $\frac{\pi}{2} - \omega$ die Breite eines Punkts auf demselben; d. h. der Winkel, den der durch den fraglichen Punkt gehende Meridian mit dem ersten macht, und der Winkel, den die Normale im fraglichen Punkte mit der Aequatorebene macht; so ist, wie in §. 20.

$$h = a^2\cos^2\eta = \frac{a^2}{1+\operatorname{tg}^2\eta} = \frac{a^2.a^2}{a^2+b^2\operatorname{cotg}^2\omega}$$
$$= \frac{a^4\sin^2\omega}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega} = \frac{a^2\sin^2\omega}{1-e^2\cos^2\omega},$$

$$\varphi=\lambda,\quad \psi=\log\left[\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\left(\frac{1-e\cos\omega}{1+e\cos\omega}\right)^{\frac{e}{2}}\right];$$

worin also (auf die Erde bezogen) ω der Winkel ist, den die Normale in dem betrachteten Punkt mit der Erdaxe macht. (Die Axe der x liegt im ersten Meridian u. s. w. wie in §. 20.)

Was die Kugel anbelangt, so sei A ihr Halbmesser, $\varLambda$, Ω ihre Polarkoordinaten, wo $\varLambda$ die Länge, $\frac{\pi}{2}-\Omega$ die Breite; so ist, wie in §. 20.:

$$H=A^2\sin^2\Omega,\quad \Phi=\varLambda,\quad \Psi=\log(\operatorname{cotg}\frac{\Omega}{2});$$

also hat man:

$$\left.\begin{aligned}&\varLambda+i\log(\operatorname{cotg}\frac{\Omega}{2})=f\left[\lambda+i\log\left\{\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\left(\frac{1-e\cos\omega}{1+e\cos\omega}\right)^{\frac{e}{2}}\right\}\right]\\&\sqrt{\frac{H}{h}}=\frac{A\sin\Omega}{a\sin\omega}\sqrt{1-e^2\cos^2\omega};\end{aligned}\right\}\quad(78)$$

wodurch die einander entsprechenden Punkte beider Flächen gegeben sind.

Zur Spezialisirung setzen wir

$$f(x)=\alpha x-i\log k,\quad f'(x)=\alpha;$$

so ist aus (78):

$$\varLambda=\alpha\lambda,\ \log(\operatorname{cotg}\frac{\Omega}{2})=\log\left[\operatorname{cotg}^\alpha\frac{\omega}{2}\left(\frac{1-e\cos\omega}{1+e\cos\omega}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}\right]-\log k;$$

d. h.

$$\varLambda=\alpha\lambda,\quad \log(\operatorname{tg}\frac{\Omega}{2})=\log\left[k\operatorname{tg}^\alpha\frac{\omega}{2}\left(\frac{1+e\cos\omega}{1-e\cos\omega}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}\right],$$

$$M=\frac{\alpha A\sin\Omega}{a\sin\omega}\sqrt{1-e^2\cos^2\omega};$$

mithin endlich:

$$\Lambda = \alpha\lambda, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Omega = k\operatorname{tg}^{\alpha}\frac{\omega}{2}\left(\frac{1+e\cos\omega}{1-e\cos\omega}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}\Big],$$

$$M = \frac{\alpha A\sin\Omega}{a\sin\omega}\sqrt{1-e^2\cos^2\omega}. \tag{79}$$

Was die hier vorkommenden Konstanten α, k, A anbelangt, so sollen sie so bestimmt werden, dass für Breiten $\frac{\pi}{2}-\omega$, die nicht bedeutend von einer gewissen Breite β, die wir die Normalbreite heissen wollen, abweichen, M nahezu gleich 1 werde. Ist also ω der Werth $=\frac{\pi}{2}-\beta$, von dem man ausgeht, und geht man zu einem Werthe $\omega+\Delta\omega$ über, so wird M zu

$$M+\frac{\partial M}{\partial\omega}\Delta\omega+\frac{\partial^2 M}{\partial\omega^2}\frac{\Delta\omega^2}{2}+\frac{\partial^3 M}{\partial\omega^3}\frac{\Delta\omega^3}{6}+\ldots, \quad \omega=\frac{\pi}{2}-\beta.$$

Sei nun B die Breite auf der Kugel, welche der Breite β entspricht, so ist $\Omega=\frac{\pi}{2}-B$, wenn $\omega=\frac{\pi}{2}-\beta$; also erhält man aus der zweiten Gleichung (79):

$$k=\frac{\operatorname{tg}^{\alpha}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\beta)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}B)}\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}. \tag{80}$$

Zugleich wollen wir A und α so bestimmen, dass für

$$\omega=\frac{\pi}{2}-\beta, \text{ also } \Omega=\frac{\pi}{2}-B:$$

$$M=1, \quad \frac{\partial M}{\partial\omega}=0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial\omega^2}=0$$

sei. Nun ist

$$\frac{\partial M}{\partial\omega}=\frac{\alpha A\sqrt{1-e^2\cos^2\omega}}{a\sin\omega}\cos\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\omega}+\frac{e^2\cos\omega\sin\omega.\alpha A\sin\Omega}{a\sin\omega\sqrt{1-e^2\cos^2\omega}}$$
$$-\frac{\alpha A\sin\Omega\sqrt{1-e^2\cos^2\omega}\cos\omega}{a\sin^2\omega}.$$

Die zweite Gleichung (79) giebt, wenn man zuerst die Logarithmen nimmt und dann differenzirt:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\omega}\frac{1}{\sin\Omega}=\frac{\alpha(1-e^2)}{(1-e^2\cos^2\omega)\sin\omega},$$

also

$$\frac{\partial M}{\partial \omega}=\frac{M(1-e^2)(\alpha\cos\Omega-\cos\omega)}{\sin\omega(1-a^2\cos^2\omega)}.$$

Entwickelt man eben so $\frac{\partial^2 M}{\partial \omega^2}$ und bemerkt, dass, wegen $\frac{\partial M}{\partial \omega}=0$,

$$\alpha\cos\Omega=\cos\omega \text{ für } \Omega=\frac{\pi}{2}-B,\quad \omega=\frac{\pi}{2}-\beta;$$

so erhält man daraus noch

$$(1-e^2\cos^2\omega)\sin^2\omega=\alpha^2(1-e^2)\sin^2\Omega.$$

Somit ist:

$$1=\frac{A\alpha\cos B}{a\cos\beta}\sqrt{1-e^2\sin^2\beta},\quad \alpha\sin B-\sin\beta=0,$$

$$(1-e^2\sin^2\beta)\cos^2\beta-\alpha^2(1-e^2)\cos^2 B=0.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt

$$\cos^2 B=1-\frac{\sin^2\beta}{\alpha^2};$$

setzt man diess in die dritte, so erhält man:

$$\alpha^2(1-e^2)-1+e^2-e^2\cos^4\beta=0.$$

Man zieht nun endlich daraus:

$$\alpha^2=1+\frac{e^2\cos^4\beta}{1-e^2},\quad \sin B=\frac{1}{\alpha}\sin\beta,\quad A=\frac{a\cos\beta}{\alpha\cos B\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},$$

$$k=\frac{\operatorname{tg}^{\alpha}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\beta)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}B)}\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}; \qquad (81)$$

wodurch α, B, A, k bestimmt sind.

Um die gegenseitige Berechnung bequemer zu machen, mögen folgende Hülfswinkel eingeführt werden:

$$\sin\varphi=e,\ \operatorname{tg}\zeta=\operatorname{tg}\varphi\cos^2\beta,\ \sin\theta=e\sin\beta,\ \operatorname{tg}\eta=\sin\zeta\operatorname{tg}\beta;$$

alsdann ist:

$$\alpha=\frac{1}{\cos\zeta},\quad \sin B=\cos\zeta\sin\beta,\quad A=\frac{a\cos\beta}{\alpha\cos B\cos\theta},$$

$$k=\frac{\operatorname{tg}^{\alpha}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}B)\operatorname{tg}^{\alpha e}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\theta)}.$$

Ferner hat man:

$$\cos^2\eta=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\eta}=\frac{1}{1+\sin^2\zeta\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\beta+\sin^2\zeta\sin^2\beta}$$
$$=\frac{\cos^2\beta}{1-\cos^2\zeta\sin^2\beta}=\frac{\cos^2\beta}{1-\sin^2 B}=\frac{\cos^2\beta}{\cos^2 B};$$

also

$$\cos\eta\cos B=\cos\beta.$$

Dann

$$\sin\eta\cos B=\sin\zeta\sin\beta=\frac{\sin\zeta\sin B}{\cos\zeta}=\operatorname{tg}\zeta\sin B;$$

also

$$\sin\eta=\operatorname{tg}\zeta\operatorname{tg}B.$$

Weiter hat man

$$\frac{1-\cos\eta}{\sin\eta}=\frac{\cos B-\cos\beta}{\operatorname{tg}\zeta\sin B},\quad \frac{1+\cos\zeta}{\sin\zeta}=\frac{\sin\beta+\sin B}{\sin\zeta\sin\beta};$$

also

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta=\frac{\cos B-\cos\beta}{\operatorname{tg}\zeta\sin B},\quad \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\zeta=\frac{\sin\beta+\sin B}{\sin\zeta\sin\beta};$$

demnach

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta\operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta=\frac{\cos B-\cos\beta}{\sin B+\sin\beta}\cdot\frac{\sin\zeta\sin\beta}{\operatorname{tg}\zeta\sin B}=\frac{\cos B-\cos\beta}{\sin B+\sin\beta}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-B).$$

Weiter ist

$$\operatorname{tg}\zeta=\operatorname{tg}\varphi.\frac{\cos^2\zeta-\sin^2 B}{\cos^2\zeta},$$

also

$$\sin\zeta\cos\zeta\cos\varphi=\sin\varphi\cos^2\zeta-\sin\varphi\sin^2 B,$$

$$\sin\varphi\sin^2 B=\sin\varphi\cos^2\zeta-\sin\zeta\cos\zeta\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi(1-2\sin^2 B)=\sin\varphi(1-2\cos^2\zeta)+2\sin\zeta\cos\zeta\cos\varphi,$$

$\sin\varphi\cos 2B = e\cos 2B = -\sin\varphi\cos 2\zeta + \sin 2\zeta\cos\varphi = \sin(2\zeta - \varphi)$.

Man hat mithin:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\varphi = e,\ \operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg}\varphi\cos^2\beta,\ \sin\theta = e\sin\beta,\ \operatorname{tg}\eta = \sin\zeta\operatorname{tg}\beta, \\ \alpha = \frac{1}{\cos\zeta},\ \sin B = \cos\zeta\sin\beta,\ A = \frac{a\cos\beta}{\alpha\cos B\cos\theta}, \\ k = \frac{\operatorname{tg}^\alpha(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\beta)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}B)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\theta)}, \\ \cos\eta\cos B = \cos\beta,\ \sin\eta = \operatorname{tg}\zeta\operatorname{tg}B, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta - B) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta\operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta,\quad e\cos 2B = \sin(2\zeta-\varphi). \end{array}\right\} \quad (82)$$

Ist nun β gegeben, so erhält man ζ aus der zweiten dieser Gleichungen, η aus der vierten, B aus der 6ten oder 11ten; ist aber B gegeben, so findet man nach der letzten ζ, dann nach der 10ten η, nach der 11ten oder 9ten β.

§. 22.

Sind die Konstanten α, A, k nun bestimmt, so ist es einfach, Länge und Breite auf der Kugel aus der auf dem Ellipsoid zu berechnen. Man kann sich dazu unmittelbar der Formeln (79) bedienen. Für praktische Zwecke ist die Entwickelung in Reihen vortheilhafter, besonders wenn man die umgekehrte Aufgabe löst, aus der Breite auf der Kugel die auf dem Ellipsoid zu berechnen. Mittelst dieser Reihen lassen sich dann leicht Tafeln berechnen, die, von der (Normal-)Breite B auf der Kugel ausgehend, die entsprechende Breite auf dem Ellipsoid geben. Gauss hat (Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Erste Abhandlung) solche berechnet, die von $90^0 - \Omega = 46^0 40'$ gehen bis $90^0 - \Omega = 58^0 40'$ und für welche $B = 52^0 40'$ also $\beta = 52^0 42' 2'' \cdot 53251$ ist. Es ergiebt sich, da $M = 1$ ist für $90^0 - \Omega = 52^0 40'$, $M = 1\cdot0000024$ für $90^0 - \Omega = 46^0 40'$, d. h. die Vergrösserung beträgt bei einem Abstand von 6^0 nur ungefähr $\frac{1}{400000}$; bei $90^0 - \Omega = 50^0$, also $2^0 40'$ Abstand vom Normalbreitenkreis, ist $M = 1\cdot00000021$, also die Vergrösserung nur $\frac{1}{5000000}$. Man sieht hieraus, dass bei der gewählten Uebertragungsweise diese so geschieht, dass die Dimensionen auf dem Ellipsoid und der Kugel, in nicht bedeutender Entfernung von der Normalbreite, gleich sind. Man schliesst daraus, dass eine geodätische (kürzeste) Linie auf dem Ellipsoid durch eine kürzeste Linie (grössten Kreis) auf der Kugel wird dargestellt

werden und zwar in derselben absoluten Länge. Die Abweichung beider, die natürlich sehr klein ist, kann in folgender Weise berechnet werden.

Sei L die geodätische Linie auf dem Ellipsoid, K ihre Abbildung auf der Kugelfläche, F und G die Endpunkte eines bekannten Stücks von K; F', G' die entsprechenden Punkte auf dem Ellipsoid, N ein durch F und G gelegter grösster Kreis der Kugel. Die Punkte der Linie K wollen wir dadurch bestimmen, dass wir den kürzesten Abstand jedes derselben von N, gleich y, und die Entfernung des Fusspunkts dieser Senkrechten von F, auf der Linie N gemessen, gleich x setzen, wobei die positiven x von F gegen G, die positiven y von Süd nach Nord (von N aus gezählt) gehen. Dabei seien x und y Bögen zum Halbmesser 1, also Ax, Ay deren absolute Länge.

Nach dem, was wir in §. 15. gesehen, ist ein Element von M gleich

$$A\sqrt{\cos^2 y \partial x^2 + \partial y^2},$$

da dort

$$\frac{1}{RR_1} = \frac{1}{A^2}, \quad \partial p = A\partial x, \quad \partial q = A\partial y$$

und

$$\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = -\frac{1}{A^2}, \quad w = \cos(Aq)$$

ist, indem für $q=0$:

$$w = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

sein muss, und

$$q = Ay, \quad y = \frac{q}{A},$$

also

$$w = \cos y$$

ist.

Ist ψ der Winkel, den das Element von K im Punkte (x, y) mit einer durch jenen Punkt gezogenen Parallelen von N macht, so ist (§. 15.):

$$\cot\mathrm{g}\,\psi = \cos y \frac{\partial x}{\partial y}, \quad \mathrm{tg}\,\psi = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{1}{\cos y};$$

und also das Element von K in diesem Punkte:

$$A\partial x\sqrt{\cos^2 y+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=A\partial x\cos y\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}=\frac{A\cos y}{\cos\psi}\partial x.$$

Demnach das entsprechende Element von L:

$$\frac{A}{M}\frac{\cos y}{\cos\psi}\partial x,$$

wo M die frühere Bedeutung hat. Setzt man nun

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{tg}\,\psi=\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{1}{\cos y},$$

so ist

$$u=\log(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}y)),$$

wenn man $u=0$ für $y=0$ annimmt; ist ferner

$$\frac{\cos y}{M}=n,$$

so ist das Element von L:

$$An\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2},$$

und da L eine kürzeste Linie auf dem Ellipsoid ist, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial n}{\partial u}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{n\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\right]\\ &\text{d. h.}\\ &\frac{\partial n}{\partial u}\,\frac{1}{\cos\psi}=\frac{\partial}{\partial x}(n\sin\psi);\end{aligned}\right\}\quad(83)$$

welche Formel allgemein gilt. Da aber die Linie K von N kaum abweicht, so werden u und ψ immer sehr kleine Werthe erlangen, so dass man

$$\sin\psi=\mathrm{tg}\,\psi,\ \cos\psi=1$$

wird setzen dürfen, und also aus (83) zieht:

$$n\,\mathrm{tg}\,\psi=\int\frac{\partial n}{\partial u}\partial x+C,\qquad(84)$$

worin man für n und u die Werthe anwenden darf, die in dem entsprechenden Punkt der Linie K statt haben, wo $y=0$, also

$$n = \frac{1}{M}, \quad \frac{\partial n}{\partial u} = -\frac{1}{M^2}\frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{M^2}\frac{\partial M}{\partial y}, \quad \text{da } \frac{\partial y}{\partial u} = \cos y = 1$$

gesetzt wird.

Sei allgemein $\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y} = l$, ferner ψ_0, M_0, l_0 die Werthe von ψ, M, l im Punkte F, wo $x=0$; ψ_1, M_1, l_1 die Werthe dieser Grössen im Punkte G, wo $x=h$ (h immer positiv). Alsdann giebt (84):

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{M}{M_0}\operatorname{tg}\psi_0 - M\int_0^x \frac{l}{M}\partial x. \qquad (84')$$

Angenommen, l, M können nach fortschreitenden Potenzen von x entwickelt werden und sei:

$$l = l_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots., \quad \frac{M}{M_0} = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots..;$$

so folgt aus (84'):

$$\operatorname{tg}\psi = (1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots)\operatorname{tg}\psi_0 - l_0 x$$
$$- \frac{1}{2}(\lambda_1 + l_0\mu_1)x^2 - (\frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{1}{6}\lambda_1\mu_1 - \frac{1}{6}l_0\mu_1^2 + \frac{2}{3}l_0\mu_2)x^3 - \ldots..,$$

und also, da

$$u = \int \operatorname{tg}\psi\,\partial x$$

und $u=0$ für $y=0$, d. h. für $x=0$ und $x=h$:

$$u = (x + \frac{1}{2}\mu_1 x^2 + \frac{1}{3}\mu_2 x^3 + \ldots)\operatorname{tg}\psi_0 - \frac{1}{2}l_0 x^2 - \frac{1}{6}(\lambda_1 + l_0\mu_1)x^3$$
$$- (\frac{1}{12}\lambda_2 + \frac{1}{24}\lambda_1\mu_1 - \frac{1}{24}l_0\mu_1^2 + \frac{1}{6}l_0\mu_2)x^4 - \ldots...,$$

und zugleich für $x=h$, $u=0$, woraus:

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \frac{1}{2}l_0 h + (\frac{1}{6}\lambda_1 - \frac{1}{12}l_0\mu_1)h^2 + (\frac{1}{12}\lambda_2 - \frac{1}{24}\lambda_1\mu_1)h^3 + \ldots..$$

und wenn man diesen Werth im Obigen für $\operatorname{tg}\psi$ setzt und $x=h$, also $\psi=\psi_1$ macht:

$$\operatorname{tg}\psi_1 = -\frac{1}{2}l_0 h - (\frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{12}l_0\mu_1)h^2 - (\frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{1}{24}\lambda_1\mu_1 - \frac{1}{12}l_0\mu_1^2$$
$$+ \frac{1}{6}l_0\mu_2)h^3 \ldots...$$

Da

$$l_1 = l_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \ldots, \quad M_1 = M_0(1 + \mu_1 h + \mu_2 h^2 + \ldots);$$

so wird man sich leicht überzeugen, dass bis mit auf Glieder der Ordnung h^2:

$$\operatorname{tg}\psi_0 = (\tfrac{1}{3}l_0 + \tfrac{1}{6}l_1)h\sqrt[6]{\frac{M_0}{M_1}}, \quad \operatorname{tg}\psi_1 = -(\tfrac{1}{6}l_0 + \tfrac{1}{3}l_1)h\sqrt[6]{\frac{M_1}{M_0}}; \quad (85)$$

welche Formeln zur Berechnung scharf ausreichend sind. Die Grössen

$$\sqrt[6]{\frac{M_0}{M_1}} \text{ und } \sqrt[6]{\frac{M_1}{M_0}}$$

wird man sogar immer gleich 1 setzen dürfen.

Was die Länge von L zwischen F' und G' anbelangt, so ist sie

$$A\int_0^h \frac{\cos y}{M\cos\psi}\partial x = A\int_0^h \frac{\partial x}{M} = \frac{A}{M_0}\int_0^h \frac{\partial x}{1+\mu_1 x + \mu_2 x^2 \ldots}$$

$$= \frac{A}{M_0}[h - \tfrac{1}{2}\mu_1 h^2 + (\tfrac{1}{3}\mu_1{}^2 - \tfrac{1}{3}\mu_2)h^3 \ldots] = \frac{Ah}{\sqrt{M_0 M_1}}, \quad (86)$$

genau bis mit zu Gliedern der Ordnung h^2.

Was die Bestimmung der in (85) vorkommenden Grössen l_0 und l_1 anbelangt, so ist sie die folgende:

Sei α das Azimuth der Linie N in irgend einem Punkte, d. h. der Winkel, den diese im Sinne wachsender x genommene Linie mit dem Meridian in dem fraglichen Punkte macht, wenn man diesen Winkel von der Südseite des Meridians durch West bis 360° zählt. Sei ferner $\varLambda$ die Länge, $90° - \Omega$ die Breite des fraglichen Punkts, so hängt M von $\varLambda$ nicht ab (§. 21.), also ist $\frac{\partial M}{\partial \varLambda} = 0$; y ist Funktion von $\varLambda$ und Ω, mithin auch $\varLambda$ und Ω Funktionen von y und also:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial \varLambda}\frac{\partial \varLambda}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Ist nun (Taf. IX. Fig. 6.) zuerst G östlich von F, P der betreffende Punkt von N, $PQ = A\partial x$, $QR = A\partial y$, VW der Meridian durch P, W der Nordpol, so ist

$$WP = A\Omega, \quad FPW = 360° - \alpha.$$

Zieht man RS senkrecht auf WP, so stellt PS die Grösse $-A\partial\Omega$

dar, da

$$WR = A(\Omega + \partial\Omega),$$

offenbar gleich der Projektion von PR auf WP, so dass

$$-A\partial\Omega = A\partial x\cos(360^0 - \alpha) + A\partial y\cos(\alpha - 270^0) = A\partial x\cos\alpha - A\partial y\sin\alpha,$$
$$\partial\Omega = -\partial x\cos\alpha + \partial y.\sin\alpha.$$

Liegt G westlich von F, so ist

$$GPW = 180^0 - \alpha,$$

und jetzt

$$-A\partial\Omega = A\partial x\cos(180^0 - \alpha) + A\partial y\cos(90^0 - \alpha) = -A\partial x\cos\alpha + A\partial y\sin\alpha,$$
$$\partial\Omega = \partial x\cos\alpha - \partial y\sin\alpha.$$

Demnach ist

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \pm\sin\alpha,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn G östlich von F, das untere im umgekehrten Falle.

Also ist

$$l = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y} = \pm\frac{\sin\alpha}{M}\frac{\partial M}{\partial\Omega}.$$

Der Werth von $\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\Omega}$ findet sich aus (79). Sei also der Werth von

$$\frac{180.60^2}{2\pi}\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial\Omega}$$

im Punkte F gleich k_0, im Punkte G gleich k_1, ferner α im Punkte F gleich A_0, im Punkte G gleich $180^0 + A_1$, wo also A_0 das Azimuth von FG in F, A_1 das von GF in G, so ist in F:

$$\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y} = \pm\sin A_0.2k_0.\frac{\pi}{180.60^2},$$

n G:

$$\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y} = \mp\sin A_1.2k_1.\frac{\pi}{180.60^2}.$$

Geht man von den Bögen zu Winkeln über, und setzt $\operatorname{tg}\psi = \psi$, so erhält man aus (85), in Sekunden ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned}\psi_0 &= \pm\frac{1}{3}h(2k_0\sin A_0 - k_1\sin A_1),\\ \psi_1 &= \pm\frac{1}{3}h(2k_1\sin A_1 - k_0\sin A_0);\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

die obern Zeichen, wenn G östlich von F, die untern im entgegesetzten Falle. h ist immer positiv, und gleich $\frac{FG}{A}$.

Aus der ersten Formel (79) folgt, dass bei Uebertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche ein Meridian der ersten (λ konstant) immer mit einem Meridian der zweiten zusammenfällt (Ω konstant). Daraus ergiebt sich, dass der Winkel, den die Linie L in irgend einem Punkte mit dem Meridian jenes Punktes auf dem Ellipsoid macht, gleich ist dem Winkel, den K im entsprechenden Punkte mit dem Meridian der Kugel macht.

Nun sind A_0, A_1 die Azimuthe der Linien FG und GF in F und G; die Linie K macht dort die Winkel ψ_0, ψ_1 mit dieser Linie.

Gesetzt nun (Taf. IX. Fig. 7.), G liege östlich von F, so sieht man leicht, dass das Azimuth von K ist:

$$\text{in } F \text{ gleich } A_0 - \psi_0, \text{ in } G \text{ gleich } A_1 - \psi_1;$$

da der Werth von ψ_0 nach (87) hier negativ, ψ_1 positiv ist, also die Linie K eigentlich unter N liegt.

Liegt G westlich von F, so sieht man eben so (da jetzt ψ_0 negativ, ψ_1 positiv), dass das Azimuth von K ist:

$$\text{in } F \text{ gleich } A_0 + \psi_0, \quad \text{in } G \text{ gleich } A_1 + \psi_1.$$

Daraus folgt, dass, wie auch F und G gegen einander liegen, und $GF = Ah$ ist, man als Azimuth der Linie K, d. h. der geodätischen Linie L auf dem Ellipsoid, findet:

in F':

$$A_0 - \frac{1}{3}h(2k_0\sin A_0 - k_1\sin A_1),$$

in G':

$$A_1 - \frac{1}{3}h(2k_1\sin A_1 - k_0\sin A_0).$$

Setzt man also

$$\left.\begin{aligned}\psi_0 &= -\frac{1}{3}h(2k_0\sin A_0 - k_1\sin A_1)\\ \psi_1 &= -\frac{1}{3}h(2k_1\sin A_1 - k\ \sin A_0)\end{aligned}\right\} \quad (87')$$

in Sekunden, so sind $A_0+\psi_0$, $A_1+\psi_1$ die Azimuthe der geodätischen Linien $F'G'$ und $G'F'$ in den Punkten F', G', wenn A_0, A_1 die Azimuthe des grössten Kreisbogens FG auf der Kugel in F und G sind.

Bei der Berechnung nach (87') braucht man allerdings h und A_0, A_1; allein, da ψ_0, ψ_1 immer sehr klein ausfallen, so kann man für Ah geradezu die Länge $F'G'$ nehmen (86), die man näherungsweise kennt, indem mit der geodätischen Vermessung ohnehin eine vorläufige Berechnung der Seiten Hand in Hand geht. Für A_0, A_1 nimmt man geradezu die Azimuthe auf dem Ellipsoid.

Kennt man die Azimuthe auf dem Ellipsoid, so ergeben sich die des grössten Kreisbogens auf der Kugel, der durch die entsprechenden Endpunkte geht, wenn man bezüglich $-\psi_0$, $-\psi_1$ addirt.

§. 23.

Uebersieht man nun die Resultate der letzten Paragraphen, so ergiebt sich daraus für die geodätische Berechnung eines Dreiecksystems innerhalb einer Zone, in der M von 1 nicht merklich abweicht, folgende Vorschrift:

Man berechne nach den Formeln (82) den Halbmesser A der Kugel (Gauss findet $\log A = 6{\cdot}5152075$ in Toisen) und denke sich die in §. 22. erwähnte Tafel construirt. Man betrachte nun das Dreiecksnetz mit denselben Seiten (grössten Kreisen) und Winkeln als auf jener Kugel liegend, wodurch die Berechnung desselben sehr leicht ist.

Die Berechnung der Azimuthe, Längen und Breiten auf der Kugel ist keinerlei Schwierigkeit unterworfen; man geht von einem bestimmten Dreieckspunkt aus, den man nach (79) auf die Kugel überträgt; berechnet von diesem aus vermittelst der bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie diese Stücke für alle Seiten und Eckpunkte auf der Kugel. Will man dann untersuchen, ob die im §. 22. erwähnte Korrektion der Azimuthe von Einfluss ist, so kennt man Ah, für A_0, A_1 nimmt man die auf der Kugel berechneten Azimuthe; die Werthe von k werden gleich anfänglich berechnet. Die Berechnung der Korrektion der Azimuthe ist schon desshalb wichtig, weil durch sie die Korrektion der auf dem Ellipsoid gemessenen Winkel, bei Uebertragung derselben auf die Kugel (insoferne man nämlich grösste Kreisbögen kurzweg als Darstellung der geodätischen Linien setzt) berechnet werden, wie aus folgendem Beispiele von Gauss hervorgeht.

Es war (Taf. IX. Fig. 8.), nach vorläufiger Berechnung, die Breite auf der Kugel:

Brocken: 51°46′3″, $k=0{\cdot}164$;

Hohehagen: 51°26′35″, $k=0{\cdot}303$;

Inselsberg: 50°49′16″, $k=0{\cdot}687$.

Ferner waren die Logarithmen der Seiten (in Toisen):

$\log HJ = 4{\cdot}6393865,\quad \log BJ = 4{\cdot}7353929,\quad \log BH = 4{\cdot}5502669.$

Die (berechneten) Azimuthe waren:

Brocken	Inselsberg:	5°42′22″
	Hohehagen:	58°49′8″
Hohehagen:	Brocken:	238°9′2″
	Inselsberg:	324°23′1″
Inselsberg:	Hohehagen:	144°55′51″
	Brocken:	185°35′21″

Um z. B. für BH die Azimuthe zu bestimmen, ist

$$\log(Ah)=4{\cdot}5502669,\quad \log A=6{\cdot}5152075,\quad k_0=0.164,\quad k_1=0.303,$$
$$A_0=58^\circ 49' 8'',\quad A_1=238^\circ 9' 2''$$

also

$$\psi_0=-0{\cdot}00196,\quad \psi_1=0{\cdot}00238.$$

Also muss man in diesen zwei Punkten den auf dem Ellipsoid beobachteten Azimuthen der Seite BH beifügen $0''{\cdot}00196, -0''{\cdot}00238$, um die Azimuthe auf der Kugel zu erhalten. So findet man nun, dass beigefügt werden muss:

$$BJ:0{\cdot}00055,\quad HB:-0{\cdot}00238,\quad JH:0{\cdot}00428$$
$$BH:0{\cdot}00196,\quad HJ:-0{\cdot}00332,\quad JB:-0{\cdot}00083.$$

Hat man also den Winkel HBJ gemessen, so ist diesem beizufügen, um ihn auf grösste Kreisbögen auf der Kugel zu reduziren:

$$0{\cdot}00196-0{\cdot}00055=0{\cdot}00141;$$

dem Winkel HJB:

$$-0{\cdot}00083 - 0{\cdot}00428 = -0{\cdot}00511;$$

dem Winkel *JHB*:

$$-0{\cdot}00332 + 0{\cdot}00238 = -0{\cdot}00094;$$

wie man sieht, lauter äusserst kleine Korrektionen, während die Seiten aussergewöhnlich gross sind (über 13 Meilen die grössere).

Hat man sämmtliche Breiten auf der Kugel berechnet, so geschieht vermittelst der Tafel die eigentliche Berechnung der Breite des Dreieckpunktes auf dem Ellipsoid durch einfaches Aufschlagen; die Länge auf dem Ellipsoid findet sich durch Division mit α (79).

Wir enthalten uns, hier noch Mehreres über diesen Gegenstand beizufügen. Das Detail der Rechnungen, deren Grundzüge oben gegeben wurden, findet sich in den Untersuchungen von Gauss. (Erste Abhandlung, Göttingen, 1844; Zweite Abhandlung, Göttingen. 1847).

XXVI.

Ueber die Schmiegungskugel und die sphärische Torsion der Curven doppelter Krümmung.

Von
Herrn Dr. W. Schell,
Privatdocenten der Mathematik an der Universität zu Marburg.

1. Je zwei aufeinanderfolgende Normalebenen einer Curve doppelter Krümmung schneiden sich in einer Graden, welche im Krümmungsmittelpunkte auf der Schmiegungsebene senkrech steht. Diese Linie ist die gemeinschaftliche Axe aller graden Kegel, welche den Krümmungskreis zur Basis haben und heisst deshalb die Krümmungsaxe. Jeder Punkt in ihr steht von allen Punkten des Krümmungskreises, insbesondere also auch von den drei Punkten gleichweit ab, welche der Krümmungskreis mit der Curve gemein hat. Drei aufeinanderfolgende Normalebenen liefern zwei Krümmungsaxen, und da diese beiden in ein und derselben Ebene, nämlich in der zweiten Normalebene liegen, so werden sie sich im Allgemeinen in einem Punkte schneiden. Dieser Punkt liegt von vier aufeinanderfolgenden Punkten der Curve gleichweit ab. Weil er nämlich in der ersten Krümmungsaxe liegt, ist er vom ersten, zweiten und dritten, und weil er in der zweiten Krümmungsaxe liegt, vom zweiten, dritten und vierten Punkt gleich weit entfernt. Er ist daher der Mittelpunkt einer Kugel, welche durch vier aufeinanderfolgende Punkte der Curve hindurchgeht. Diese Kugel wird, weil sie sich so innig als möglich an die Curve anschmiegt, passend die Schmiegungskugel genannt.

2. Sind nun x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve, grösserer Allgemeinheit und Symmetrie wegen als Functionen einer vierten Variabeln t gedacht,

und ξ, η, ζ die Coordinaten des Mittelpunktes der Schmiegungskugel, welche an den Punkt x, y, z gelegt werden kann, so müssen ξ, η, ζ der Gleichung der Normalebene und deren beiden ersten Differentialgleichungen (nach t), d. h. folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
(\xi-x)x'+(\eta-y)y'+(\zeta-z)z'&=0,\\
(\xi-x)x''+(\eta-y)y''+(\zeta-z)z''&=s'^2, \qquad (1)\\
(\xi-x)x'''+(\eta-y)y'''+(\zeta-z)z'''&=3s's'';
\end{aligned}$$

worin die Grössen x', x'', x'''; y', y'', y'''; z', z'', z'''; s', s'' die Derivirten der Coordinaten und des Bogens s bedeuten. Aus diesen Gleichungen erhält man für die Differenzen $\xi-x$, $\eta-y$, $\zeta-z$ die Formeln:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{s'}\cdot(\xi-x)&=-s'(y'z'''-z'y''')+3s''(y'z''-z'y''),\\
\frac{\Delta}{s'}\cdot(\eta-y)&=-s'(z'x'''-x'z''')+3s''(z'x''-x'z''),\\
\frac{\Delta}{s'}\cdot(\zeta-z)&=-s'(x'y'''-y'x''')+3s''(x'y''-y'x'');
\end{aligned}$$

worin

$$\Delta=x'''(y'z''-z'y'')+y'''(z'x''-x'z'')+z'''(x'y''-y'z'')$$

ist.

Setzt man der Kürze wegen noch

$$\begin{aligned}
y'z''-z'y''&=A,\\
z'x''-x'z''&=B, \qquad (2)\\
x'y''-y'x''&=C;
\end{aligned}$$

so wird, wie man sieht:

$$\begin{aligned}
y'z'''-z'y'''&=A',\\
z'x'''-x'z'''&=B', \qquad (3)\\
x'y'''-y'x'''&=C';
\end{aligned}$$

wo wieder A', B', C' die Derivirten von A, B, C bedeuten. Dadurch nehmen unsere Formeln folgende, etwas gedrängtere Form an:

$$\frac{\Delta}{s'}\cdot(\xi-x)=-s'A'+3s''A,$$

$$\frac{\Delta}{s'}\cdot(\eta-y)=-s'B'+3s''B, \qquad (4)$$

$$\frac{\Delta}{s'}\cdot(\zeta-z)=-s'C'+3s''C;$$

$$\Delta=x'''A+y'''B+z'''C. \qquad (5)$$

Bezeichnen wir mit $\hat{\varrho}$ den Radius der Schmiegungskugel, so ist sein Quadrat gleich

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2,$$

oder, wenn wir für $\xi-x$, $\eta-y$, $\zeta-z$ ihre aus (4) folgenden Werthe setzen:

$$\hat{\varrho}^2=\frac{s'^2}{\Delta^2}\cdot\{(s'A'-3s''A)^2+(s'B'-3s''B)^2+(s'C'-3s''C)^2\}.$$

Führt man endlich noch die Bezeichnungen ein:

$$s'A'-3s''A=L,$$

$$s'B'-3s''B=M, \qquad (6)$$

$$s'C'-3s''C=N;$$

so erhält man aus (4) die Coordinaten ξ, η, ζ des Mittelpunkts der Schmiegungskugel als:

$$\xi=x-\frac{s'L}{\Delta},$$

$$\eta=y-\frac{s'M}{\Delta}, \qquad (7)$$

$$\zeta=z-\frac{s'N}{\Delta};$$

und den Radius dieser Kugel als

$$\hat{\varrho}=\frac{s'}{\Delta}\sqrt{L^2+M^2+N^2}. \qquad (8)$$

Bei Anwendung dieser Formeln auf gegebene Curven berechnet man zuerst A, B, C nach (2), bildet hievon die Derivirten A', B', C', und erhält dann aus (6) L, M, N, sowie die Grösse Δ aus (5).

Der durch den Punkt x, y, z gehende Radius der Schmiegungskugel macht mit den Coordinatenaxen drei Winkel λ, μ, ν, deren Cosinusse angegeben werden durch die Formeln:

$$\cos\lambda = \frac{\xi - x}{\hat{\varrho}}, \quad \cos\mu = \frac{\eta - y}{\hat{\varrho}}, \quad \cos\nu = \frac{\zeta - z}{\hat{\varrho}};$$

und wenn wir hierin für $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, $\hat{\varrho}$ die Werthe aus (7) und (8) einfügen, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= -\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \\ \cos\mu &= -\frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \\ \cos\nu &= -\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

3. Die Normalebenen einer Curve doppelter Krümmung erzeugen durch ihre aufeinanderfolgenden Intersectionen (Krümmungsaxen) eine abwickelbare Fläche; die Rückgratcurve dieser Fläche ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Schmiegungskugeln. Bei einer sphärischen Curve gehen die Normalebenen sämmtlich durch den Mittelpunkt der Kugel und folglich auch alle Krümmungsaxen. Die abwickelbare Fläche der Normalebenen ist hier also eine Kegelfläche und der Mittelpunkt dieses Kegels fällt mit dem Kugelmittelpunkte zusammen. Die Rückgratcurve reducirt sich auf diesen Punkt. In ihn fallen die Mittelpunkte aller Schmiegungskugeln der Curve. Eine sphärische Curve hat daher für alle ihre Punkte eine gemeinschaftliche Schmiegungskugel. Für eine ebene Curve entfernt sich der Mittelpunkt des Kegels, welcher bei den sphärischen Curven die Rückgratcurve der abwickelbaren Fläche der Normalebenen bildet, ins Unendliche, und da er der Mittelpunkt aller Schmiegungskugeln sein muss, so hat eine ebene Curve gleichfalls eine einzige Schmiegungskugel, deren Radius aber unendlich ist, nämlich die Ebene, in welcher sie liegt. Ist aber eine Curve weder eben noch sphärisch, so sind die Krümmungsaxen weder alle mit einander parallel, noch schneiden sie sich alle in einem Punkte, sondern ihre aufeinanderfolgenden Intersectionen bilden eine wirkliche Rückgratcurve, welche der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln ist. Dadurch, dass nun jeder folgende Punkt der Curve eine andere Schmiegungskugel hat als der vorhergehende, entfernt sich jeder fünfte Punkt von der Kugel, auf welcher die vier ihm vorhergehenden liegen. Dieser Umstand begründet eine eigenthümliche Art der Krümmung jeder Curve, welche in dem Abweichen von der sphärischen Gestalt beruht. Dieses Abweichen von der sphärischen Gestalt wollen wir die **sphärische Torsion** der Curve nennen. Legt man an

zwei aufeinanderfolgende Punkte einer Curve die Schmiegungskugeln und verbindet ihre Centra mit diesen Punkten, so bilden die Verbindungslinien einen unendlich kleinen Winkel mit einander, welchen wir den Winkel der sphärischen Torsion nennen wollen. Das Verhältniss dieses unendlich kleinen Winkels zum Bogenelemente der Curve soll das Mass der sphärischen Torsion und der reciproke Werth dieses Verhältnisses der Radius der sphärischen Torsion heissen.

4. Die Verbindungslinie des ersten Punktes xyz der Curve mit dem Centrum der ihm zugehörenden Schmiegungskugel bildet mit den Axen die Winkel λ, μ, ν, welche durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda = -\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\mu = -\frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\nu = -\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

bestimmt werden. Die Winkel, welche die Verbindungslinie des nächstfolgenden Punktes und des Centrums der ihm entsprechenden Schmiegungskugel mit den Axen bildet, sind $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$. Ziehen wir nun vom Coordinatenursprung zwei Linien parallel und von gleicher Richtung mit jenen beiden Verbindungslinien und legen auf jeder von ihnen von demselben Punkte aus die Linieneinheit auf, so haben die Endpunkte dieser Strecken die Coordinaten

$$\cos\lambda,\quad \cos\mu,\quad \cos\nu;$$

$$\cos\lambda + d\cos\lambda,\quad \cos\mu + d\cos\mu,\quad \cos\nu + d\cos\nu;$$

und das Quadrat der unendlich kleinen Entfernung beider Endpunkte ist

$$(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2.$$

Diese kleine Linie kann als Element eines Kreisbogens vom Radius $=1$ betrachtet werden und misst also den Winkel der beiden durch den Ursprung mit jenen Verbindungslinien parallel gezogenen Graden oder also auch die Neigung der Verbindungslinien selbst und demzufolge den Winkel der sphärischen Torsion. Bezeichnen wir diesen Winkel mit $d\Omega$, so wird

$$d\Omega^2 = (d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2.$$

Nun ist aber:

$$d.\cos\lambda = \frac{-L'(L^2+M^2+N^2)+L(LL'+MM'+NN')}{(L^2+M^2+N^2)^{\frac{3}{2}}}.dt,$$

$$d.\cos\mu = \frac{-M'(L^2+M^2+N^2)+M(LL'+MM'+NN')}{(L^2+M^2+N^2)^{\frac{3}{2}}}.dt,$$

$$d.\cos\nu = \frac{-N'(L^2+M^2+N^2)+N(LL'+MM'+NN')}{(L^2+M^2+N^2)^{\frac{3}{2}}}.dt;$$

oder kürzer, wenn man

$$L^2+M^2+N^2=P^2 \qquad (10)$$

setzt, wodurch

$$LL'+MM'+NN'=PP' \qquad (11)$$

wird:

$$d.\cos\lambda = \frac{-L'P+LP'}{P^2}dt,$$

$$d.\cos\mu = \frac{-M'P+MP'}{P^2}.dt,$$

$$d.\cos\nu = \frac{-N'P+NP'}{P^2}.dt.$$

Quadriren wir diese Grössen und addiren, so erhalten wir zunächst

$$\frac{(L'^2+M'^2+N'^2)P^2+(L^2+M^2+N^2)P'^2-2(LL'+MM'+NN')PP'}{P^4}dt^2,$$

oder zufolge der eingeführten Abkürzungen:

$$\frac{L'^2+M'^2+N'^2-P'^2}{P^2}dt^2.$$

Daher ist also der Winkel der sphärischen Torsion:

$$d\Omega = \frac{dt}{P}.\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2-P'^2}, \qquad (12)$$

und das Mass derselben:

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{1}{s'P}.\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2-P'^2}, \qquad (13)$$

sowie der Radius der sphärischen Torsion, den wir mit $\hat{\pi}$ bezeichnen wollen:

$$\hat{\pi} = \frac{s'P}{\sqrt{L'^2 + M'^2 + N'^2 - P'^2}}. \qquad (14)$$

Noch möge bemerkt werden, dass zufolge (8)

$$L^2 + M^2 + N^2 = \frac{\hat{\varrho}^2 \Delta^2}{s'^2}$$

ist; daher ist also auch

$$P = \frac{\hat{\varrho}\Delta}{s'}.$$

5. Will man nicht die Grösse t, sondern den Bogen s als Independente annehmen, so wird

$$s' = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{ds} = 1,$$

$s'' = 0$, $L = A'$, $M = B'$, $N = C'$, $L' = A''$, $M' = B''$, $N' = C''$, und man erhält für die Coordinaten des Mittelpunktes der Schmiegungskugel die Formeln:

$$\xi = x - \frac{A'}{\Delta},$$

$$\eta = y - \frac{B'}{\Delta},$$

$$\zeta = z - \frac{C'}{\Delta};$$

sowie für den Radius der Schmiegungskugel:

$$\hat{\varrho} = \frac{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}{\Delta}.$$

Die Winkel λ, μ, ν werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda = -\frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos\mu = -\frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos\nu = -\frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Weiter wird der Winkel der sphärischen Torsion, wegen $P=\overset{\wedge}{\varrho}\Delta = \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}$:

$$d\Omega=\frac{ds}{\overset{\wedge}{\varrho}^2\Delta^2}\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)(A'^2+B'^2+C'^2)-(A'A''+B'B''+C'C'')^2}$$

oder

$$d\Omega$$

$$=\frac{ds}{A'^2+B'^2+C'^2}\cdot\sqrt{(B'C''-C'B'')^2+(C'A''-A'C'')^2+(A'B''-B'A'')^2}$$

und folglich die sphärische Torsion:

$$\frac{d\Omega}{ds}=\frac{\sqrt{(B'C''-C'B'')^2+(C'A''-A'C'')^2+(A'B''-B'A'')^2}}{A'^2+B'^2+C'^2},$$

sowie der Radius der sphärischen Torsion:

$$\overset{\wedge}{\pi}=\frac{A'^2+B'^2+C'^2}{\sqrt{(B'C''-C'B'')^2+(C'A''-A'C'')^2+(A'B''-B'A'')^2}}.$$

6. Die aufeinanderfolgenden Verbindungslinien der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln mit den ihnen entsprechenden Punkten der Curve werden sich im Allgemeinen nicht schneiden, sondern erzeugen eine windschiefe Fläche, deren Gleichung auf folgende Art erhalten werden kann. Da λ, μ, ν die Winkel sind, welche die Lage einer solchen Verbindungslinie gegen die Axen bestimmt, so sind die Gleichungen derselben:

$$\xi-x=\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}(\zeta-z),$$

$$\eta-y=\frac{\cos\mu}{\cos\nu}(\zeta-z)$$

oder

$$(\xi-x)\cos\nu-(\zeta-z)\cos\lambda=0,$$

$$(\eta-y)\cos\nu-(\zeta-z)\cos\mu=0.$$

Eliminirt man aus ihnen die Grösse t, so erhält man eine Gleichung zwischen ξ, η, ζ, welche die Gleichung der gesuchten Fläche ist. Nur in einem bestimmten Fall kann diese Fläche in eine abwickelbare übergehen. Es bilden nämlich das Bogenelement der gegebenen Curve, das Element der Rückgratcurve der abwickelbaren Fläche der Normalebenen und die beiden Ver-

bindungslinien, welche nach den Endpunkten dieser Elemente gehen, ein Viereck, welches im Allgemeinen windschief ist. Liegen nun zufällig die beiden Bogenelemente in einer Ebene, so fallen die zwei Verbindungslinien in dieselbe Ebene, und die Fläche wird abwickelbar. Die Endpunkte des Bogenelements der Rückgratcurve sind nun die Durchschnittspunkte der dem zweiten Punkt der Curve entsprechenden Krümmungsaxe mit den Krümmungsaxen des ersten und dritten Punktes der Curve; dies Element liegt also in der zweiten Krümmungsaxe und seine Richtung steht senkrecht auf der Schmiegungsebene des zweiten Punkts. Soll es nun mit dem Bogenelemente der Curve in einer Ebene liegen, so muss letzteres also mit der Krümmungsaxe seines Endpunktes in dieselbe Ebene fallen. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird unsere Fläche abwickelbar. Diese Bedingung ist immer erfüllt bei den sphärischen Curven; die fragliche Fläche ist der Centralkegel der sphärischen Curve.

7. Besondere Punkte der Curven doppelter Krümmung sind solche, für welche die Tangente, die Hauptnormale, Krümmungsaxe u. s. w. besonders ausgezeichnete Lagen haben, oder auch für welche die Krümmung und Torsion Merkwürdigkeiten darbietet. Durch die Einführung der sphärischen Torsion können gleichfalls sich hier neue Eigenthümlichkeiten darbieten, die wir ein andermal näher untersuchen wollen.

8. Als ein einfaches Beispiel für die Anwendung der im Obigen entwickelten Formeln wollen wir die gemeine Cylinderschraube behandeln. Ihre Gleichungen sind:

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t,\quad z = art;$$

wenn die Axe des Cylinders zur z-Axe genommen wird, r den Radius des kreisförmigen Querschnittes, a eine absolute Zahl und t der variable Winkel ist, den ein von dem Punkt der Curve auf die Cylinderaxe gefälltes Perpendikel mit der x-Axe bildet. Man hat durch Differentiation:

$$x' = -r\sin t,\quad y' = r\cos t,\quad z' = ar,\quad s' = r\sqrt{1+a^2};$$

$$x'' = -r\cos t,\quad y'' = -r\sin t,\quad z'' = 0,\quad s'' = 0;$$

$$x''' = r\sin t,\quad y''' = -r\cos t,\quad z''' = 0,\quad \Delta = ar^3;$$

$$A = ar^2\sin t,\quad B = -ar^2\cos t,\quad C = r^2;$$

$$A' = ar^2\cos t,\quad B' = ar^2\sin t,\quad C' = 0;$$

$$L = ar^3\sqrt{1+a^2}.\cos t,\quad M = ar^3\sqrt{1+a^2}.\sin t,\quad N = 0,$$
$$P = ar^3\sqrt{1+a^2};$$

$$L' = -ar^3\sqrt{1+a^2}.\sin t,\quad M' = ar^3\sqrt{1+a^2}.\cos t,\quad N' = 0,\quad P' = 0.$$

Daher werden die Coordinaten des Mittelpunktes der Schmiegungskugel:

$$\xi = -a^2 r \cos t,$$

$$\eta = -a^2 r \sin t,$$

$$\zeta = art.$$

Hieraus ergibt sich, dass die Curve der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln selbst wieder eine gemeine Cylinderschraube ist, für welche die negativen Axen der x, y die positiven Axen der η, ξ sind. Der Radius der Basis des Cylinders, auf welchem sie liegt, ist $a^2 r$, die Höhe des Schraubenganges ist aber dieselbe. Der Radius der Schmiegungskugel ist

$$\hat{\varrho} = r\sqrt{1+a^2},$$

also constant und gleich dem Krümmungshalbmesser der Curve. Die Cosinusse der Winkel, welche diese Grade mit den Axen bildet, sind

$$\cos\lambda = -\cos t, \quad \cos\mu = -\sin t, \quad \cos\nu = 0.$$

Der Radius der Schmiegungskugel steht also senkrecht auf der Axe des Cylinders.

Die sphärische Torsion ist

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{1}{r\sqrt{1+a^2}},$$

und der Radius derselben

$$\hat{\pi} = r\sqrt{1+a^2},$$

also ebenfalls gleich dem Krümmungshalbmesser.

XXVII.

Ueber den Einfluss, welchen die Ordnung in der Ausführung der Integrationen auf den Werth eines doppelten Integrals hat.

Von

Herrn Professor G. Decher

an der polytechnischen Schule in Augsburg.

Unter dem obigen Titel befindet sich in dem ersten Bande der „Exercices de Mathematiques," année 1826, ein Aufsatz, worin Herr Cauchy zu beweisen sucht, dass ein doppeltes Integral in dem Falle, wo das gegebene Aenderungsgesetz zweiter Ordnung zwischen den Grenzen der Veränderlichen unendlich werde, einen verschiedenen Werth erhalten könne, je nachdem man zuerst in Bezug auf die eine, oder in Bezug auf die andere dieser Veränderlichen integrire. Dieser Satz schliesst sich an den in der Einleitung zu meinem Handbuch der rationellen Mechanik besprochenen über die einfachen Integrale an und ist eben so unhaltbar, wie jener. Ohne mich indessen in eine allgemeine Besprechung desselben einzulassen, da uns diese in den Streit über die Theorie der Integrale führen würde, beschränke ich mich einfach darauf, das erste von Cauchy in dem genannten Werke, Seite 87., angeführte Beispiel zu beleuchten, weil der unrichtige Satz, mittelst dessen derselbe für dieses Beispiel die Wahrheit seiner obigen Behauptung darthut, auch anderweits zu Irrthümern Veranlassung geben könnte.

Herr Cauchy wählt nämlich die imaginäre Function (eine reelle scheint derselbe zur Begründung seines Satzes nicht gefunden zu haben):

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=\frac{-\sqrt{-1}}{(x-a+(y-b)\sqrt{-1})^2},$$

und zieht daraus für den Unterschied Δ in den Werthen des Integrals dieser Function, je nachdem man zuerst in Bezug auf x oder zuerst in Bezug auf y integrirt, die Gleichung:

$$\Delta=\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} dy\cdot\left(\frac{1}{X-a+(y-b)\sqrt{-1}}-\frac{1}{x_0-a+(y-b)\sqrt{-1}}\right)$$
$$-\int_{x_0}^{X} dx\cdot\left(\frac{1}{x-a+(Y-b)\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-a+(y_0-b)\sqrt{-1}}\right),$$

worin X und x_0 die Grenzen für x, Y und y_0 diejenigen für y bezeichnen. Führt man aber die Integration dieses Ausdruckes, so wie er dasteht, aus, und es ist für mich kein Grund denkbar, welcher gegen die Zulässigkeit dieser Ausführung erhoben werden könnte, da die einzelnen Functionen zwischen den Grenzen der Veränderlichen niemals unendlich werden können, so findet man:

$$\Delta=\text{logn}\,\frac{[X-a+(Y-b)\sqrt{-1}][x_0-a+(y_0-b)\sqrt{-1}]}{[X-a+(y_0-b)\sqrt{-1}][x_0-a+(Y-b\sqrt{-1}]}$$
$$-\text{logn}\,\frac{[X-a+(Y-b)\sqrt{-1}][x_0-a+(y_0-b)\sqrt{-1}]}{[x_0-a+(Y-b)\sqrt{-1}][X-a+(y_0-b)\sqrt{-1}]},$$

also $\Delta=0$, welches auch die Werthe der Grössen X, x_0 und a, Y, y_0 und b sein mögen.

Statt dieser einfachen und natürlichen Behandlung des obigen Ausdruckes, deren Ergebniss freilich nicht mit dem aufgestellten Satze übereinstimmt, bringt ihn Cauchy durch das bekannte Mittel, den Nenner rational zu machen, unter die Form:

1)

$$\Delta=\int_{y_0}^{Y} dy\cdot\frac{y-b}{(X-a)^2+(y-b)^2}-\int_{y_0}^{Y} dy\cdot\frac{y-b}{(x_0-a)^2+(y-b)^2}$$
$$-\int_{x_0}^{X} dx\cdot\frac{x-a}{(x-a)^2+(Y-b)^2}+\int_{x_0}^{X} dx\cdot\frac{x-a}{(x-a)^2+(y_0-b)^2}$$
$$+\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{y_0}^{Y} dy\,\frac{X-a}{(X-a)^2+(y-b)^2}+\int_{y_0}^{Y} dy\,\frac{a-x_0}{(a-x_0)^2+(y-b)^2}\\ \displaystyle+\int_{x_0}^{X} dx\,\frac{Y-b}{(x-a)^2+(Y-b)^2}+\int_{x_0}^{X} dx\,\frac{b-y_0}{(x-a)^2+(y_0-b)^2}\end{array}\right\},$$

leitet daraus durch Integration den Ausdruck ab:

$$\Delta = \left\{\begin{array}{l} \operatorname{arc\,tang}\frac{Y-b}{X-a}+\operatorname{arc\,tang}\frac{b-y_0}{X-a}+\operatorname{arc\,tang}\frac{Y-b}{a-x_0}+\operatorname{arc\,tang}\frac{b-y_0}{a-x_0} \\ +\operatorname{arc\,tang}\frac{X-a}{Y-b}+\operatorname{arc\,tang}\frac{X-a}{b-y_0}+\operatorname{arc\,tang}\frac{a-x_0}{Y-b}+\operatorname{arc\,tang}\frac{a-x_0}{b-y_0} \end{array}\right\}\sqrt{-1},$$

und fährt dann weiter fort: „Wenn man nun zulässt, dass $\operatorname{arc\,tang} x$ denjenigen Bogen zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ berzeichnet, dessen Tangente x ist, so hat man für positive Werthe von x:

$$\operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\pi,$$

und für negative Werthe von x:

$$\operatorname{arc\,tang} x + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\pi;$$

man schliesst also aus den vorhergehenden Gleichungen, indem man a zwischen den Grenzen X und x_0, b zwischen den Grenzen Y und y_0 liegend voraussetzt:

$$\Delta = 2\pi\sqrt{-1};$$

man findet dagegen, wie man es erwarten musste,

$$\Delta = 0,$$

wenn die Grösse a ausserhalb der Grenzen X und x_0, oder b ausserhalb der Grenzen Y und y_0 liegt.

Dieser Schluss ist aber gänzlich unrichtig, weil er auf der irrigen Voraussetzung beruht, dass man unbedingt

$$\operatorname{arc\,tang}(-x) = -\operatorname{arc\,tang} x$$

und zugleich

$$\operatorname{arc\,tang}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}$$

setzen könne. Untersucht man aber den Gang der Function $y = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}$, so findet man als Aenderungsgesetz derselben den Ausdruck:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},$$

welcher für alle Werthe von x negativ bleibt, und niemals unendlich wird; die y müssen also für abnehmende x fortwährend wachsen und können niemals negativ werden; für $x=0$ hat man insbesondere $y=\frac{1}{2}\pi$, $\frac{dy}{dx}=-1$; es schneidet also die entsprechende Linie CDE (Taf.X. Fig. 6.) die Achse der y in einem Abstande $\frac{1}{2}\pi$ vom Anfangspunkte und unter einem Winkel $\frac{1}{4}\pi$ gegen die Seite der negativen x, und die y reichen für negative x in den zweiten Quadranten; man hat daher nicht

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{-x}=-\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x},$$

sondern vielmehr

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{-x}=\frac{1}{2}\pi+\operatorname{arc\,tang}x,$$

also für jeden Werth von x, ob positiv oder negativ,*)

$$\operatorname{arc\,tang}x+\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}=+\frac{1}{2}\pi,$$

natürlich immer unter der von Cauchy gemachten Voraussetzung, dass unter $\operatorname{arc\,tang}x$ bloss ein Bogen zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ verstanden wird.

Die Function:

$$y=\operatorname{arc\,tang}x+\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\pi$$

---

*) Es geht diess übrigens sehr einfach auch aus den ersten Eigenschaften der Winkelfunctionen hervor. Denn hat man

$$x=\operatorname{tang}z,$$

so ist für alle Werthe von x

$$\frac{1}{x}=\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi-z),$$

also umgekehrt

$$z=\operatorname{arc\,tang}x,$$

$$\frac{1}{2}\pi-z=\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x},$$

und folglich

$$\frac{1}{2}\pi=\operatorname{arc\,tang}x+\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}.$$

stellt demnach die zur Achse der x parallele Gerade AB, und nicht die beiden getrennten Stücke AD und GH vor, und die Gerade FH, deren gewöhnliche Gleichung

$$y=-\frac{1}{2}\pi$$

ist, müsste durch die Function

$$y=\operatorname{arc\,tang} x-\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{-x}$$

ausgedrückt werden. In dieser Beziehung dürfte es indessen eleganter sein, eine zur Achse der x parallele Gerade durch die homogene Function

$$y=\frac{1}{2}\beta\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha}+\operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha}{x}\right)=\frac{1}{4}\beta\pi$$

vorzustellen; in diesem Falle geht die Gerade durch den Schnittpunkt der beiden Curven:

$$y=\beta\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha}\text{ und }y=\beta\operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha}{x}$$

und halbirt immer den Abstand zweier entsprechenden Punkte derselben, so wie es bei der einfachen Kettenlinie in Bezug auf die logarithmischen Curven

$$y=pe^{\frac{x}{p}}\qquad y=pe^{-\frac{x}{p}}$$

der Fall und in Taf.X. Fig. 6. durch die Grade LM dargestellt ist.

Kehren wir nun nach dieser Erörterung wieder zu unserm doppelten Integral zurück, so werden wir dem imaginären Theil der Gleichung (1) die Form geben müssen:

$$\Delta=$$
$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{arc\,tang}\frac{Y-b}{X-a}-\operatorname{arc\,tang}\frac{y_0-b}{X-a}-\operatorname{arc\,tang}\frac{Y-b}{x_0-a}+\operatorname{arc\,tang}\frac{y_0-b}{x_0-a}\\+\operatorname{arc\,tang}\frac{X-a}{Y-b}-\operatorname{arc\,tang}\frac{X-a}{y_0-b}-\operatorname{arc\,tang}\frac{x_0-a}{Y-b}+\operatorname{arc\,tang}\frac{x_0-a}{y_0-b}\end{array}\right\}\sqrt{-1}.$$

Ob dann a und b zwischen den entsprechenden Grenzen X und x_0, Y und y_0 liegt oder ausserhalb derselben, man erhält immer für jedes Paar übereinanderstehender Glieder ohne Rücksicht auf ihr Zeichen den Werth $\frac{1}{2}\pi$ und daher auch immer

$$\Delta=0.$$

Mit diesem Beispiel fällt aber der ganze obige Satz von Cauchy zusammen, da sich alles Folgende auf dieses erste Beispiel stützt, und der Satz selbst von der Art ist, dass er zuvor für irgend eine besondere Function nachgewiesen werden muss, bevor man sich in eine allgemeine Untersuchung desselben einzulassen für nothwendig finden dürfte.

XXVIII.

Untersuchungen über die Anzahl der kubischen Klassen, welche zu einer determinirenden quadratischen Klasse gehören.

Von

Herrn Dr. F. Arndt,

Lehrer an der Realschule zu Stralsund.

Im 19. Theil des Archivs S. 19 ff. habe ich gezeigt, dass alle kubischen Formen, welche zu einer gegebenen Charakteristik (A, B, C) von der Determinante D gehören, im Allgemeinen in mehrere Systeme zerfallen, so dass alle Formen des nämlichen Systems aus einer beliebigen Form desselben vermittelst der Werthe X, Y, welche die Gleichung $XX-DYY=mm$ giebt, sich herleiten lassen, wo m das gr. g. Maass von A, $2B$, C bedeutet. Ich habe ferner nachgewiesen (§. 31.), dass kubische Formen aus verschiedenen Systemen auch verschiedenen Klassen angehören, und dass alle Formen desselben Systems in den Fällen $D=-\frac{3}{4}m^2$, $D>0$ drei verschiedene Klassen, in den übrigen Fällen aber eine Klasse erzeugen. Um also die Menge der verschiedenen kubischen Klassen, welche zu einer determinirenden quadratischen Klasse gehören, zu bestimmen, hat man nur die Anzahl der verschiedenen Systeme, von denen wir so eben gesprochen, zu ermitteln.

In §. 22. ist der Satz erwiesen, das alle kubischen Formen $f=(a, b, c, d)$ zur Charakteristik $\varphi=(A, B, C)$, wo $B>0$ vorausgesetzt wird, gefunden werden, wenn man alle eigentlichen Transformationen b, d, a, c der Form $\psi=(A, -B, C)$ in die Form

$$\Psi=(\tfrac{1}{2}AA,\ BB-\tfrac{1}{2}AC,\ \tfrac{1}{2}CC)$$

bestimmt. Dies Problem der Einschliessung ist in Th. XIII. p. 105 ff. gelöst; die Auflösung beruht auf der Bestimmung einer endlichen Menge quadratischer Formen, welche mit ψ eigentlich äquivalent sein müssen. Die Anzahl dieser Formen ergiebt sich nun um so grösser, je mehr Theiler von B es giebt, deren Quadrate in $\frac{1}{2}AA$ aufgehen; durch eine geschickte Transformation der Form φ kann diese Anzahl aber, wie wir nun zeigen wollen, auf ihr Minimum beschränkt werden.

Es sind drei wesentlich verschiedene Fälle zu betrachten.

Erster Fall. Die gegebene Charakteristik $\varphi=(2\mathfrak{A}, B, 2\mathfrak{C})$ sei so beschaffen, dass B ungerade ist; ferner sei $\mathfrak{M}$ das gr. g. Maass von $\mathfrak{A}, B, \mathfrak{C}$; $\mathfrak{A}=\mathfrak{M}\mathfrak{A}'$, $B=\mathfrak{M}B'$, $\mathfrak{C}=\mathfrak{M}\mathfrak{C}'$. Nach XIII. S. 105. ff. hat man nun alle eigentlichen Transformationen der Form $\psi=(2\mathfrak{A}, -B, 2\mathfrak{C})$ von der Determinante D in die Form $(2\mathfrak{A}^2, B^2-2\mathfrak{A}\mathfrak{C}, 2\mathfrak{C}^2)$ von der Determinante DB^2, oder, was auf Dasselbe hinauskommt, alle eigentlichen Transformationen der Form $\chi=(2\mathfrak{A}', -B', 2\mathfrak{C}')$ von der Determinante $D\mathfrak{M}^{-2}$ in die Form

$$(2\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2, \mathfrak{M}(B'^2-2\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'), 2\mathfrak{M}\mathfrak{C}'^2)$$

von der Determinante $D\mathfrak{M}^{-2}(\mathfrak{M}B')^2$ zu bestimmen. Zu dem Ende ist von folgenden Formeln auszugehen:

$$\mathfrak{M}B'=\vartheta\vartheta',\quad P'=\frac{2\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2}{\vartheta^2},\quad Q'=\frac{(B'^2-2\mathfrak{A}'\mathfrak{C}')\mathfrak{M}-k\vartheta P'}{\vartheta\vartheta'},$$

$$R'=\frac{Q'^2-D\mathfrak{M}^{-2}}{P'};$$

wo die Werthe von k nach dem Mod. ϑ' incongruent, P', Q', R' ganze Zahlen, die Formen χ, $X=(P', Q', R')$ eigentlich äquivalent sein müssen.

Durch die uneigentlich primitive Form χ sind unendlich viele Zahlen darstellbar, welche gegen jede gegebene ungerade Zahl prim sind, und zwar auf eine solche Art, dass die Unbestimmten relative Primzahlen werden; folglich kann man, wie leicht erhellt, die Form χ in eine eigentlich äquivalente Form transformiren, deren Anfangsglied gegen irgend eine gegebene ungerade Zahl prim ist, und da zu eigentlich äquivalenten Charakteristiken dieselben Klassen kubischer Formen gehören, so kann man annehmen, dass $\mathfrak{A}'$ prim gegen $D\mathfrak{M}^{-2}$ und gegen $\mathfrak{M}$ sei ($\mathfrak{M}$ ist als Theiler von B ungerade). Unter dieser Voraussetzung wird $\mathfrak{A}'$ prim gegen B' sein, wegen der Gleichung $B'^2-4\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'=D\mathfrak{M}^{-2}$.

Da $\mathfrak{M}B'$, $2\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2$ durch ϑ theilbar sein sollen, $\mathfrak{M}B'$ aber ungerade ist, so werden $\mathfrak{M}B'$, $\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2$ ebenfalls durch ϑ theilbar sein; nun sind B', $\mathfrak{A}'$ relative Primzahlen, folglich ϑ Theiler von $\mathfrak{M}$. Da ferner $\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2$ durch ϑ^2 theilbar, ϑ aber als Theiler von $\mathfrak{M}$ prim gegen $\mathfrak{A}'$ ist, so folgt, dass ϑ^2 Theiler von $\mathfrak{M}$ ist, oder

$$\mathfrak{M}=\vartheta^2\mathfrak{M}^0.$$

Hiernach ist

$$\vartheta\mathfrak{M}^0 B'=\vartheta',\ \ P'=2\mathfrak{M}^0\mathfrak{A}'^2,\ \ Q'=\frac{(B'^2-2\mathfrak{A}'\mathfrak{C}')\vartheta-2k\mathfrak{A}'^2}{\vartheta B'};$$

folglich k durch ϑ theilbar, oder

$$k=\vartheta k^0,\ Q'=B'-\frac{2\mathfrak{A}'(\mathfrak{C}'+k^0\mathfrak{A}')}{B'};$$

wo die Werthe von k^0 nach dem mod. $\mathfrak{M}^0 B'$ incongruent sein müssen. Hieraus folgt, dass

$$\frac{\mathfrak{C}'+k^0\mathfrak{A}'}{B'}=L,\qquad \frac{Q'^2-D\mathfrak{M}^{-2}}{\mathfrak{M}^0}$$

ganze Zahlen sind, und $Q'=B'-2\mathfrak{A}'L$, also $B'L\equiv\mathfrak{C}' (\bmod \mathfrak{A}')$ und $Q'^2\equiv D\mathfrak{M}^{-2} (\bmod \mathfrak{M}^0)$. Bedeutet z den Inbegriff der *verschiedenen* Wurzeln der Congruenz

$$z^2\equiv D\mathfrak{M}^{-2} (\bmod \mathfrak{M}^0)$$

so folgt $Q'\equiv z (\bmod \mathfrak{M}^0)$, also $2\mathfrak{A}'L\equiv B'-z (\bmod \mathfrak{M}^0)$. Es giebt nun immer einen Werth von L, welcher den beiden Congruenzen

$$2\mathfrak{A}'L\equiv B'-z (\bmod \mathfrak{M}^0)$$

$$B'L\equiv\mathfrak{C}' (\bmod \mathfrak{A}')$$

Genüge leistet, während alle übrigen Werthe von L demselben nach dem mod. $\mathfrak{M}^0\mathfrak{A}'$ congruent sind, da $2\mathfrak{A}'$ prim gegen $\mathfrak{M}^0$, B' prim gegen $\mathfrak{A}'$ ist. Ist $L=L_0+\varrho\mathfrak{M}^0\mathfrak{A}'$, so folgt

$$k^0=\frac{B'L_0-\mathfrak{C}'}{\mathfrak{A}'}+\varrho\mathfrak{M}^0 B';$$

folglich hat man nur *einen* Werth von L zu nehmen, indem die Werthe von k^0 nach dem mod. $\mathfrak{M}^0 B'$ incongruent sein sollen.

Diesen Bestimmungen zufolge wird nun auch

$$R'=\frac{Q'^2-D\mathfrak{M}^{-2}}{2\mathfrak{M}^0\mathfrak{A}'^2}$$

eine ganze Zahl werden. In der That es findet sich, wenn man

$$Q'^2-D\mathfrak{M}^{-2}=(B'-2\mathfrak{A}'L)^2-(B'^2-4\mathfrak{A}'\mathfrak{C}')$$

entwickelt, und für $B'L-\mathfrak{C}'$ den Werth $k^0\mathfrak{A}'$ setzt:

$$Q'^2-D\mathfrak{M}^{-2}=4\mathfrak{A}'^2(L^2-k^0);$$

ferner

$$Q' \equiv B' - (B' - z) \equiv z (\mathrm{mod}\, \mathfrak{M}^0),$$

$$Q'^2 - D\mathfrak{M}^{-2} \equiv z^2 - D\mathfrak{M}^{-2} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \mathfrak{M}^0);$$

folglich ist $Q'^2 - D\mathfrak{M}^{-2}$ durch die beiden Zahlen $4\mathfrak{A}'^2$, $\mathfrak{M}^0$ zugleich theilber, folglich durch deren Produkt, da sie relative Primzahlen sind, d. i. $Q'^2 - D\mathfrak{M}^{-2} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2P')$, also ist R' eine ganze gerade Zahl, und man hat

$$X = (2\mathfrak{M}^0\mathfrak{A}'^2,\ B' - 2\mathfrak{A}'L,\ 2\frac{L^2 - k^0}{\mathfrak{M}^0}).$$

Ist jetzt α, β, γ, δ der Inbegriff der sämmtlichen eigentlichen Substitutionen, durch welche χ in X übergeht, so ist bekanntlich die Form $(\vartheta\gamma,\ \vartheta\alpha,\ \vartheta'\delta + k\gamma,\ \vartheta'\beta + k\alpha)$ der Inbegriff aller kubischen Formen zur Charakteristik φ; diese Form wird nun, wenn man für ϑ', k ihre obigen Werthe substituirt:

$$(\vartheta\gamma,\ \vartheta\alpha,\ \vartheta(\mathfrak{M}^0 B'\delta + k^0\gamma),\ \vartheta(\mathfrak{M}^0 B'\beta + k^0\alpha)),$$

ist folglich keine primitive Form, wenn ϑ nicht den Werth 1 hat. Wir beschränken unsere Untersuchung auf die primitiven kubischen Klassen, da die Anzahl der nicht primitiven Klassen sich auf die Mengen der primitiven Klassen von kleinern Determinanten reducirt; daher setzen wir $\vartheta = 1$, und die Berechnung der Systeme der kubischen Klassen wird sich mittelst der folgenden Formeln bewerkstelligen:

$$[1] \left\{ \begin{array}{l} z^2 \equiv D\mathfrak{M}^{-2} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{M}), \\ 2\mathfrak{A}'L \equiv B' - z (\mathrm{mod}\, \mathfrak{M}) \text{ und } B'L \equiv \mathfrak{C}' (\mathrm{mod}\, \mathfrak{A}'), \\ k = \dfrac{B'L - \mathfrak{C}'}{\mathfrak{A}'} \\ \chi = (2\mathfrak{A}',\ -B',\ 2\mathfrak{C}') \text{ und } X = (2\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2,\ B' - 2\mathfrak{A}'L,\ 2\dfrac{L^2 - k}{\mathfrak{M}}), \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ die Substitutionen aus } \chi \text{ in } X, \\ f = (\gamma,\ \alpha,\ \mathfrak{M}B'\delta + k\gamma,\ \mathfrak{M}B'\beta + k\alpha). \end{array} \right.$$

Die Form X muss vor Allem eine uneigentlich primitive sein, ebenso wie χ; dieserhalb sind nicht alle verschiedenen Wurzeln der Congruenz $z^2 \equiv D\mathfrak{M}^{-2} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{M})$ ohne Unterschied zulässig. Um in dieser Hinsicht die nöthige Bestimmung zu treffen, entwickeln wir folgende, aus dem Obigen sich leicht ergebende Relationen:

$$P' = 2\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2,$$

$$Q' = z + \varrho\mathfrak{M} (= B' - 2\mathfrak{A}'L),$$

$$2\mathfrak{A}'^2 R' = u + 2\varrho z + \mathfrak{M}\varrho^2;$$

aus denen man ohne Mühe folgern wird, dass das gr. g. Maass von $\mathfrak{M}$, z, u dem gr. g. Maass von P', Q', R' gleich ist; nun soll (P', Q', R') eine uneigentlich primitive Form sein, also ist, da $\mathfrak{M}$ ungerade, $(\mathfrak{M}, z, u)$ von der Determinante $D\mathfrak{M}^{-2}$ eine eigentlich primitive Form, und umgekehrt, wenn diese Bedingung statt findet, so ist X eine uneigentlich primitive Form.

Zwischen der hier entwickelten Theorie und der Theorie der Composition der quadratischen Formen findet nun ein merkwürdiger Zusammenhang statt. Wir wollen in dieser Hinsicht zuerst die Form bestimmen, welche durch Duplication der Form $\overline{\omega}=(2\mathfrak{A}', B', 2\mathfrak{C}')$ entsteht*). Dabei bediene ich mich der von mir in der Abhandlung „Mémoire sur la théorie des formes quadratiques" (Archiv XIII. S. 410 ff.) gelehrten Methode.

In der dortigen Bezeichnung ist $n=n'=\frac{1}{2}$, $P=Q=\mathfrak{A}'$, $R=B'$, $S=0$, $T=U=\mathfrak{C}'$, $\lambda=1$, $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$ sei $=\mathfrak{r}_0$, also $\mathfrak{r}_0\mathfrak{A}'+\mathfrak{r}B'=1$. Man kann ferner $p=1$, $q=0$, $\varphi=1$, $\psi=k\mathfrak{r}+L\mathfrak{r}_0$ setzen, und alsdann ergiebt sich

$$2\overline{\omega}=(4\mathfrak{A}'^2,\ 2B'-4\mathfrak{A}'L,\ 4(L^2-k)),$$

wo die Form

$$4\mathfrak{A}'^2X^2+2(2B'-4\mathfrak{A}'L)XY+4(L^2-k)Y^2$$

in das Produkt

$$(2\mathfrak{A}'x^2+2B'xy+2\mathfrak{C}'y^2)\times(2\mathfrak{A}'x'^2+2B'x'y'+2\mathfrak{C}'y'^2)$$

durch die Substitution

$$X=xx'+Lxy'+Lyx'+kyy',\quad Y=\mathfrak{A}'xy'+\mathfrak{A}'yx'+B'yy'$$

übergeht.

Ferner wollen wir die Formen $(2\mathfrak{A}'^2, B'-2\mathfrak{A}'L, 2(L^2-k))$ und $(\mathfrak{M}, z, u)$ von derselben Determinante $D\mathfrak{M}^{-2}$ zusammensetzen. Nach XIII. p. 410 ff. ist, indem wir zugleich alle obigen Bezeichnungen festhalten, $n=n'=1$, $P=2\mathfrak{A}'^2$, $Q=\mathfrak{M}$, $R=2z+\varrho\mathfrak{M}$, $S=-\varrho\mathfrak{M}$, $T=u$, $U=2(L^2-k)$, $\lambda=1$, $\varphi=1$, $p=1$, $q=0$, $\mathfrak{r}=0$, $2\mathfrak{A}'^2\mathfrak{p}+\mathfrak{M}\mathfrak{q}=1$; nimmt man nun die Willkührliche $\psi=-\mathfrak{p}\varrho$, so kommt

$$(2\mathfrak{A}'^2,\ B'-2\mathfrak{A}'L,\ 2(L^2-k))+(\mathfrak{M},\ z,\ u)$$

$$=(2\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2,\ B'-2\mathfrak{A}'L,\ 2\frac{L^2-k}{\mathfrak{M}})=X,$$

---

*) Die Zusammensetzung der quadratischen Formen deuten wir im Folgenden mit Gauss durch das Zeichen + an, wonach also $2\overline{\omega}$ durch Duplication, $3\overline{\omega}$ durch Triplication von $\overline{\omega}$ entsteht.

oder

$$[2]\qquad \text{Stamm}\,(2\bar{\omega})+(\mathfrak{M},\ z,\ u)=X\,{}^{*});$$

die Substitution, durch welche X in das Produkt der Formen Stamm $(2\bar{\omega})$, $(\mathfrak{M},\ z,\ u)$ übergeht, ist $1,\ -\varrho,\ 0,\ -R'$; $0,\ 2\mathfrak{A}'^2,\ \mathfrak{M},\ 2z+\varrho\mathfrak{M}$, nach der Gauss'schen Bezeichnung. Hierbei ist nun zu beachten, dass X mit der Entgegengesetzten von $\bar{\omega}$ eigentlich äquivalent sein muss.

Zweiter Fall. Es sei $\varphi=(2\mathfrak{A},\ 2\mathfrak{B},\ 2\mathfrak{C})$, die Determinante $D=4(\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C})=4\Delta$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{M}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{M}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}=\mathfrak{M}\mathfrak{C}'$, wo $\mathfrak{A}',\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}'$ relative Primzahlen sind. Wir nehmen zuförderst an, dass $(\mathfrak{A}',\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}')$ eine eigentlich primitive Form ist.

Um alle eigentlichen Transformationen der Form $(\mathfrak{A}',\ -\mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}')$ von der Determinante $\Delta\mathfrak{M}^{-2}$ in die Form

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2,\ \mathfrak{M}(2\mathfrak{B}'^2-\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'),\ \mathfrak{M}\mathfrak{C}'^2)$$

von der Determinante $\Delta\mathfrak{M}^{-2}(2\mathfrak{B}'\mathfrak{M})^2$ zu bestimmen, muss man setzen:

$$2\mathfrak{B}'\mathfrak{M}=\vartheta\vartheta',\ P'=\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2}{\vartheta^2},\ Q'=\frac{(2\mathfrak{B}'^2-\mathfrak{A}'\mathfrak{C}')\mathfrak{M}-k\vartheta P'}{\vartheta\vartheta'},$$

$$R'=\frac{Q'^2-\Delta\mathfrak{M}^{-2}}{P'};$$

wo die k nach dem mod. ϑ' incongruent sein müssen.

Da durch die eigentlich primitive Form $(\mathfrak{A}',\ -\mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}')$ unendlich viele Zahlen darstellbar sind, welche gegen jede gegebene Zahl prim sind, so kann man annehmen, dass $\mathfrak{A}'$ ungerade, prim gegen $\Delta\mathfrak{M}^{-2}$ und gegen $\mathfrak{M}$ sei. Alsdann ist $\mathfrak{A}'$ prim gegen $2\mathfrak{B}'$. Auf ähnliche Art, wie oben, beweist man, dass

$$\mathfrak{M}=\vartheta^2\mathfrak{M}^0,\ k=\vartheta k^0$$

zu setzen ist, und findet

$$P'=\mathfrak{M}^0\mathfrak{A}'^2,\ Q'=\mathfrak{B}'-\mathfrak{A}'L,\ \text{wo}\ L=\frac{\mathfrak{C}'+k^0\mathfrak{A}'}{2\mathfrak{B}'}.$$

Die Zahl L bestimmt sich hier durch die beiden Congruenzen

$$\mathfrak{A}'L\equiv\mathfrak{B}'-z\ (\text{mod}\ \mathfrak{M}^0),$$

$$2\mathfrak{B}'L\equiv\mathfrak{C}'\ (\text{mod}\ \mathfrak{A}');$$

---

*) Durch Vorsetzung des Wortes Stamm bezeichnen wir diejenige primitive Form oder Klasse, aus welcher die Form oder Klasse abgeleitet ist.

wo z den Inbegrrff der verschiedenen Wurzeln der Congruenz

$$z^2 \equiv \Delta\mathfrak{M}^{-2} \pmod{\mathfrak{M}^0}$$

bedeutet; ferner ist $k^0 = \frac{2\mathfrak{B}'L - \mathfrak{C}'}{\mathfrak{A}'}$. Dass R' eine ganze Zahl wird, folgt aus

$$Q'^2 - \Delta\mathfrak{M}^{-2} = \mathfrak{A}'^2(L^2 - k^0) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}^0};$$

ferner kommt

$$X = \left(\mathfrak{M}^0\mathfrak{A}'^2,\ \mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'L,\ \frac{L^2 - k^0}{\mathfrak{M}^0}\right),$$

$$f = (\vartheta\gamma,\ \vartheta\alpha,\ \vartheta(2\mathfrak{B}'\mathfrak{M}^0\delta + k^0\gamma),\ \vartheta(2\mathfrak{B}'\mathfrak{M}^0\beta + k^0\alpha));$$

folglich $\vartheta = 1$, und dem Systeme [1] entspricht folgendes:

$$[1'] \left\{ \begin{array}{l} z^2 \equiv \Delta\mathfrak{M}^{-2} \pmod{\mathfrak{M}}, \\ \mathfrak{A}'L \equiv \mathfrak{B}' - z \pmod{\mathfrak{M}} \text{ und } 2\mathfrak{B}'L \equiv \mathfrak{C}' \pmod{\mathfrak{A}'}, \\ k = \frac{2\mathfrak{B}'L - \mathfrak{C}'}{\mathfrak{A}'}, \\ \chi = (\mathfrak{A}',\ -\mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}'),\ X = \left(\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2,\ \mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'L,\ \frac{L^2 - k}{\mathfrak{M}}\right), \\ f = (\gamma,\ \alpha,\ 2\mathfrak{B}'\mathfrak{M}\delta + k\gamma,\ 2\mathfrak{B}'\mathfrak{M}\beta + k\alpha). \end{array} \right.$$

Da die Form X, ebenso wie χ, eine eigentlich primitive sein muss, so muss die Form $(\mathfrak{M}, z, u)$ von der Determinante $\Delta\mathfrak{M}^{-2}$ ebenfalls eigentlich primitiv sein, und umgekehrt*).

Durch Anwendung der Theorie der Composition quadratischer Formen finde ich ferner, dass die Form $(\mathfrak{A}'^2, \mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'L, L^2 - k)$ durch die Substitution $1, L, L, k; 0, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}', 2\mathfrak{B}'$ in das Produkt der Formen $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}$ übergeht, wo

$$\bar{\omega} = (\mathfrak{A}',\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{C}');$$

und dass die Form $\left(\mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2, \mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'L, \frac{L^2 - k}{\mathfrak{M}}\right)$ durch die Substitution $1, -\varrho, 0, -R'; 0, \mathfrak{A}'^2, \mathfrak{M}, 2z + \varrho\mathfrak{M}$ in das Produkt der Formen $(\mathfrak{A}'^2, \mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'L, L^2 - k)$, $(\mathfrak{M}, z, u)$ übergeht. Da-

---

*) Dies erhellt aus den leicht zu entwickelnden Formeln:

$$P' = \mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2,$$
$$Q' = \mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'L = z + \varrho\mathfrak{M},$$
$$\mathfrak{A}'^2 R' = u + 2\varrho z + \mathfrak{M}\varrho^2.$$

her ist

$$2\bar{\omega} = (\mathfrak{A}'^2,\ \mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'L,\ L^2 - k),$$

$$[2'] \qquad 2\bar{\omega} + (\mathfrak{M},\ z,\ u) = X;$$

wo nun X mit der Entgegengesetzten von $\bar{\omega}$ in eine Klasse gehören wird.

Dritter Fall. Die im zweiten Fall betrachtete Form $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}')$ sei jetzt eine uneigentlich primitive, also $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'$ gerade, $\mathfrak{B}'$ ungerade; setzen wir $\mathfrak{A}' = 2\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{C}' = 2\mathfrak{C}''$ Es sind die eigentlichen Transformationen der Form $(2\mathfrak{A}'', -\mathfrak{B}', 2\mathfrak{C}'')$ von der Determinante $\Delta\mathfrak{M}^{-2}$ in die Form $(4\mathfrak{M}\mathfrak{A}''^2, 2\mathfrak{M}(\mathfrak{B}'^2 - 2\mathfrak{A}''\mathfrak{C}''), 4\mathfrak{M}\mathfrak{C}''^2)$ von der Determinante $\Delta\mathfrak{M}^{-2}(2\mathfrak{B}'\mathfrak{M})^2$ zu bestimmen, und man hat in dieser Beziehung folgende Formeln:

$$2\mathfrak{B}'\mathfrak{M} = \vartheta\vartheta',\quad P' = \frac{4\mathfrak{M}\mathfrak{A}''^2}{\vartheta^2},\quad Q' = \frac{(\mathfrak{B}'^2 - 2\mathfrak{A}''\mathfrak{C}'')\mathfrak{M} - k\vartheta P'}{\vartheta\vartheta'},$$

$$R' = \frac{Q'^2 - \Delta\mathfrak{M}^{-2}}{P'}.$$

Durch die Form $\mathfrak{A}''x^2 - \mathfrak{B}'xy + \mathfrak{C}''y^2$ sind nun unendlich viele Zahlen darstellbar, welche gegen jede gegebene Zahl prim sind; wir können also annehmen, dass $\mathfrak{A}''$ ungerade, und prim gegen $\Delta\mathfrak{M}^{-2}$ und gegen $\mathfrak{M}$ sei. Alsdann ist $\mathfrak{A}''$ prim gegen $\mathfrak{B}'$. Da die Form (P', Q', R') mit $(2\mathfrak{A}'', -\mathfrak{B}', 2\mathfrak{C}'')$ eigentlich äquivalent sein soll, so muss sie, ebenso wie diese, uneigentlich primitiv sein, folglich P' gerade, oder $2\mathfrak{M}\mathfrak{A}''^2$ durch ϑ^2 theilbar. Da nun $2\mathfrak{M}\mathfrak{B}'$, $2\mathfrak{M}\mathfrak{A}''^2$ durch ϑ theilbar sind, so ist ϑ ein Theiler von $2\mathfrak{M}$; da ferner ϑ prim gegen $\mathfrak{A}''$, so ist ϑ^2 ein Theiler von $2\mathfrak{M}$; also hat man

$$2\mathfrak{M} = \vartheta^2\mathfrak{M}^0,\quad \vartheta\mathfrak{M}^0\mathfrak{B}' = \vartheta',\quad P' = 2\mathfrak{M}^0\mathfrak{A}''^2,$$

$$Q' = \frac{(\mathfrak{B}'^2 - 2\mathfrak{A}''\mathfrak{C}'')\vartheta - 2k\mathfrak{A}''^2}{\vartheta\mathfrak{B}'};$$

da aber Q' ungerade sein muss, so ergiebt sich, dass k durch ϑ theilbar ist, folglich

$$k = \vartheta k^0,\quad \frac{\mathfrak{C}'' + k^0\mathfrak{A}''}{\mathfrak{B}'} = L,\quad Q' = \mathfrak{B}' - 2\mathfrak{A}''L,\quad \mathfrak{A}''L \equiv \frac{1}{2}(\mathfrak{B}' - z) (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M}^0),$$

$$\mathfrak{B}''L \equiv \mathfrak{C}'' (\mathrm{mod}\ \mathfrak{A}'');$$

wo z der Inbegriff der verschiedenen Wurzeln der Congruenz $z^2 \equiv \Delta\mathfrak{M}^{-2} (\mathrm{mod}\ 2\mathfrak{M}^0)$. — Hat man L durch die beiden vorhergehenden Congruenzen, k^0 nach der Gleichung $k^0 = \frac{\mathfrak{B}'L - \mathfrak{C}''}{\mathfrak{A}''}$ bestimmt, so folgt aus $Q'^2 - \Delta\mathfrak{M}^{-2} = 4\mathfrak{A}''^2(L^2 - k^0) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M}^0)$, dass R' eine ganze Zahl wird, und es kommt:

$$X=(2\mathfrak{M}^0\mathfrak{A}''^2,\ \mathfrak{B}'-2\mathfrak{A}''L,\ 2\frac{L^2-k^0}{\mathfrak{M}^0}),$$

$$f=(\vartheta\gamma,\ \vartheta\alpha,\ \vartheta(\mathfrak{M}^0\mathfrak{B}'\delta+k^0\gamma),\ \vartheta(\mathfrak{M}^0\mathfrak{B}'\beta+k^0\alpha));$$

folglich, da wir nur **primitive** kubische Klassen betrachten, $\vartheta=1$. Die Berechnung der Systeme bewerkstelligt sich also nach folgenden Formeln:

$$[1''] \left\{ \begin{aligned} & z^2 \equiv \Delta\mathfrak{M}^{-2} (\text{mod}.\, 4\mathfrak{M}), \\ & \mathfrak{A}''L \equiv \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}'-z)(\text{mod}\, 2\mathfrak{M}) \text{ und } \mathfrak{B}'L \equiv \mathfrak{C}''(\text{mod}\, \mathfrak{A}''), \\ & k=\frac{\mathfrak{B}'L-\mathfrak{C}''}{\mathfrak{A}''}, \\ & \chi=(2\mathfrak{A}'',\ -\mathfrak{B}',\ 2\mathfrak{C}''),\ X=(4\mathfrak{M}\mathfrak{A}''^2,\ \mathfrak{B}'-2\mathfrak{A}''L,\ \frac{L^2-k}{\mathfrak{M}}), \\ & f=(\gamma,\ \alpha,\ 2\mathfrak{M}\mathfrak{B}'\delta+k\gamma,\ 2\mathfrak{M}\mathfrak{B}'\beta+k\alpha). \end{aligned} \right.$$

Die Form $(4\mathfrak{M},\ z,\ u)$ von der Determinante $\Delta\mathfrak{M}^{-2}$ muss hier eine **uneigentlich primitive** sein, und umgekehrt, wenn sie dieses ist, so wird X eine uneigentlich primitive Form*).

Durch Duplication von $\bar{\omega}=(2\mathfrak{A}'',\ \mathfrak{B}',\ 2\mathfrak{C}'')$ findet sich

$$2\bar{\omega}=(4\mathfrak{A}''^2,\ 2\mathfrak{B}'-4\mathfrak{A}''L,\ 4(L^2-k)),$$

wo $1,\ L,\ L,\ k;\ 0,\ \mathfrak{A}'',\ \mathfrak{A}'',\ \mathfrak{B}'$ die geeignete Substitution ist; ferner findet sich, dass die Form $(2P',\ 2Q',\ 2R')$ durch die Substitution $1,\ -\varrho,\ 0,\ -\frac{1}{2}R';\ 0,\ \mathfrak{A}''^2,\ 2\mathfrak{M},\ z+2\varrho\mathfrak{M}$ in das Produkt der Formen Stamm $(2\bar{\omega})$, $(4\mathfrak{M},\ z,\ u)$ übergeht; folglich ist

$$[2'']\qquad \text{Stamm}\ \{2\bar{\omega}+(4\mathfrak{M},\ z,\ u)\}=X,$$

wo nun X mit der Entgegengesetzten von $\bar{\omega}$ in **eine** Klasse gehören wird.

Alle vorhergehenden Schlüsse setzen voraus, dass das Mittelglied der Charakteristik $\varphi=(A,B,C)$ grösser als Null ist. Wäre es nun gleich Null, so könnte man φ durch die Substitution $1,\ \pm h,\ 0,\ -1$ in die eigentlich äquivalente Form $(A,\ \pm hA,\ h^2A+C)$ verwandeln, deren Mittelglied positiv sein wird, wenn man der Willkührlichen h das Zeichen der Zahl A giebt.

---

*) Dies folgt aus den leicht zu entwickelnden Relationen:

$$P'=4\mathfrak{M}\mathfrak{A}''^2,$$
$$Q'=\mathfrak{B}'-2\mathfrak{A}''L=z+4\varrho\mathfrak{M}$$
$$\mathfrak{A}''^2R'=u+2z\varrho+4\mathfrak{M}\varrho^2.$$

In den Formeln [1], [2], [1'], [2'], [1''], [2''] ist nun folgender allgemeiner Lehrsatz enthalten (die entgegengesetzte Klasse von $\bar{\omega}$ bezeichnen wir mit $-\bar{\omega}$).

I. Es sei $D \equiv 1 \pmod 4$, K eine gegebene quadratische Klasse von der Determinante D; $\bar{\omega}$ die uneigentlich primitive Klasse von der Determinante $\frac{D}{\mathfrak{M}^2}$, aus welcher sie abgeleitet ist; die Anzahl der *Systeme* der primitiven kubischen Klassen, welche zu der determinirenden quadratischen Klasse K gehören, ist ebenso gross als die Menge der eigentlich primitiven Formen $(\mathfrak{M}, z, u)$ von der Determinante $\frac{D}{\mathfrak{M}^2}$, welche der folgenden Bedingung genügen:

$$\text{Stamm } (2\bar{\omega}) + (\mathfrak{M}, z, u) = -\bar{\omega},$$

indem nur die nach dem mod. $\mathfrak{M}$ incongruenten Werthe von z berücksichtigt werden.

II. Es sei $D \equiv 0 \pmod 4$, K eine gegebene quadratische Klasse von der Determinante D; $\bar{\omega}$ die *eigentlich* primitive Klasse von der Determinante $\frac{D}{4\mathfrak{M}^2}$, aus welcher sie abgeleitet ist; die Anzahl der *Systeme* der primitiven kubischen Klassen, welche zu der determinirenden quadratischen Klasse K gehören, ist ebenso gross als die Menge der eigentlich primitiven Formen $(\mathfrak{M}, z, u)$ von der Determinante $\frac{D}{4\mathfrak{M}^2}$, welche der folgenden Bedingung genügen:

$$2\bar{\omega} + (\mathfrak{M}, z, u) = -\bar{\omega},$$

indem nur die nach dem mod. $\mathfrak{M}$ incongruenten Werthe von z berücksichtigt werden.

III. Es sei $D \equiv 0 \pmod 4$, K eine gegebene quadratische Klasse von der Determinante D; $\bar{\omega}$ die *uneigentlich* primitive Klasse von der Determinante $\frac{D}{4\mathfrak{M}^2}$, aus welcher sie abgeleitet ist; die Anzahl der *Systeme* der primitiven kubischen Klassen, welche zu der determinirenden quadratischen Klasse K gehören, ist ebenso gross als die Menge der uneigentlich primitiven Formen $(4\mathfrak{M}, z, u)$ von der Determinante $\frac{D}{4\mathfrak{M}^2}$, welche der folgenden Bedingung genügen:

$$\text{Stamm } \{2\bar{\omega} + (4\mathfrak{M}, z, u)\} = -\bar{\omega},$$

indem nur die nach dem mod. $4\mathfrak{M}$ incongruenten Werthe von z berücksichtigt werden.

Gauss hat bewiesen, dass durch Zusammensetzung zweier entgegengesetzter eigentlich primitiver Klassen die Hauptklasse entsteht; es lässt sich auch zeigen, dass durch Zusammensetzung zweier entgegengesetzter uneigentlich primitiver Klassen eine Klasse entsteht, welche aus der Hauptklasse in der uneigentlich primitiven Ordnung abgeleitet ist, d. h. $\bar{\omega}+(-\bar{\omega})=H_{pp}$, oder Stamm $\{\bar{\omega}+(-\bar{\omega})\}=H_{impp}$, wo H_{pp} die Hauptklasse in der eigentlich primitiven, H_{impp}, die Hauptklasse in der uneigentlich primitiven Ordnung bedeutet. — Hiernach lässt sich der obige Lehrsatz auch unter folgender Form darstellen:

$$\text{(I) Stamm } (3\bar{\omega})+(\mathfrak{M},\ z,\ u)=H_{impp},$$

$$\text{(II) } 3\bar{\omega}+(\mathfrak{M},\ z,\ u)=H_{pp}^{*},$$

$$\text{(III) Stamm } \{3\bar{\omega}+(4\mathfrak{M},\ z,\ u)\}=H_{impp}.$$

Schlussbemerkung. Ist $D\equiv 0 \pmod 4$ und K aus einer eigentlich primitiven Klasse von der Determinante $\frac{1}{4}D$ abgeleitet, so hat man nach (II), da die Hauptklasse $(1,\ 0,\ -\frac{1}{4}D)$ bei der Zusammensetzung übergangen werden kann, $3\bar{\omega}=H_{pp}$, d. h. zur Klasse K gehört in diesem Falle ein System primit. kubischer Klassen, wenn durch Triplication von $\bar{\omega}$ die Hauptklasse entsteht, während zu jeder Klasse $\bar{\omega}$, die der Bedingung $3\bar{\omega}=H_{pp}$ nicht genügt, keine kubischen Klassen gehören. Das eine System macht eine Klasse, wenn D nicht >0, dagegen drei Klassen, wenn $D>0$.

Herr Dr. Eisenstein hat diesen Satz für den besondern Fall $D=-4p$ bewiesen, wo p eine positive Primzahl von der Form $4m+3$ ist (Crelle's Journal Band 27. S. 103); die von ihm angewandte Methode erfordert jedoch die besondere Annahme, dass $-p$ zu den regelmässigen Determinanten gehöre, durch welchen Zusatz die Allgemeinheit des Satzes beeinträchtigt wird. — Auf Seite 76 des nämlichen Bandes erweitert Herr Eisenstein den betreffenden Satz auf jede beliebige, aber durch kein Quadrat theilbare, Determinante, ohne indessen den Beweis hinzuzufügen. Uebrigens ist es nicht allgemein richtig, dass nur eine kubische Klasse zu einer gegebenen quadratischen Klasse gehört, vielmehr drei Klassen in den Fällen $D=-\frac{3}{4}m^2$, $D>0$, eine in den übrigen Fällen. — Jedenfalls gebührt diesem ausgezeichneten Gelehrten das Verdienst, auf den Zusammenhang zwischen der Klassification der kubischen Formen, und der Zusammensetzung der quadratischen Formen zuerst hingewiesen zu haben.

XXIX.

Beiträge zur Theorie des Integrallogarithmus.

Von

Herrn Doctor R. Beez,

Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften an der Königlichen Gewerbschule zu Plauen.

I.

Relation zwischen $\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x$ und $\int_{\alpha+\beta}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x$.

Die numerische Berechnung einer ganzen Klasse von bestimmten Integralen kann in letzter Instanz auf die der Transcendenten:

$$\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x = C - \lg\alpha + \frac{\alpha}{1} - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{\alpha^3}{1.2.3} - \frac{1}{4}\,\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \ldots \qquad 1)$$

$$C = -0,5772156(6)$$

zurückgeführt werden, welche mit $-\mathrm{li}(e^{-\alpha})$ oder für reelle α mit $-\mathrm{Ei}(-\alpha)$ (s. Schlömilch, Analytische Studien. 2. Th. p. 148.) zusammenfällt. In dem angeführten Werke finden sich (2. Th. p. 196.) die Werthe der Funktion $\mathrm{Ei}(-\alpha)$ für α bezüglich

$$= 1,\ 2,\ 3,\ \ldots 10,$$

in einer vom Herrn Prof. Bretschneider in Gotha berechneten Tafel zusammengestellt. Um aber auch für dazwischenliegende, hauptsächlich aber für grössere α die zugehörigen Werthe der

genannten Funktion auf schnellere Weise bestimmen zu können, als diess durch Formel 1) möglich ist, suchen wir im Folgenden eine Beziehungsgleichung zwischen:

$$\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x \text{ und } \int_{\alpha+\beta}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x$$

herzustellen.

Setzen wir zu diesem Zwecke im zweiten Integral stat x, $x+\beta$ ein, so werden die Grenzen übergehen in α und ∞ und das Integral selbst wird:

$$2)\quad \int_{\alpha+\beta}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-(x+\beta)}}{x+\beta}\partial x=e^{-\beta}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\cdot\frac{\partial x}{1+\frac{\beta}{x}}.$$

Da x das Intervall von α bis ∞ durchläuft, so können wir unter der Voraussetzung, dass $\beta<\alpha$ ist, den Quotienten $\frac{1}{1+\frac{\beta}{x}}$ in eine convergente Reihe entwickeln. Mit Berücksichtigung also, dass

$$\frac{1}{1+\frac{\beta}{x}}=1-\frac{\beta}{x}+\frac{\beta^2}{x^2}-\frac{\beta^3}{x^3}+\ldots,$$

geben wir der Gleichung 2) folgende Gestalt:

$$3)\quad \int_{\alpha+\beta}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x$$

$$=e^{-\beta}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\left\{1-\frac{\beta}{x}+\frac{\beta^2}{x^2}-\frac{\beta^3}{x^3}+\ldots\right\}\partial x$$

$$=e^{-\beta}\left\{\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x-\beta\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}\partial x+\beta^2\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x^3}\partial x\ldots\right\}$$

$$\beta<\alpha.$$

Nun findet man vermöge der bekannten Reduktionsformel:

$$\int uv\partial x=u\int v\partial x-\int\partial u\int v\partial x,$$

wenn man $u=e^{-x}$, $v=x^{-(m+1)}$ setzt:

$$\int\frac{\partial x}{x^{m+1}}e^{-x}=-\frac{e^{-x}}{mx^m}-\frac{1}{m}\int\frac{\partial x}{x^m}e^{-x};$$

und vertauscht man hierin m mit $m-1$:

$$\int \frac{\partial x}{x^m} e^{-x} = -\frac{e^{-x}}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{m-1} \int \frac{\partial x}{x^{m-1}} e^{-x};$$

ferner auf gleiche Weise:

$$\int \frac{\partial x}{x^{m-1}} e^{-x} = -\frac{e^{-x}}{(m-2)x^{m-2}} - \frac{1}{m-2} \int \frac{\partial x}{x^{m-2}} e^{-x};$$

u. s. f.

Da nun m eine ganze positive Zahl bedeutet, so kann man in dieser Reduktion bis auf

$$\int \frac{\partial x}{x^2} e^{-x} = -\frac{e^{-x}}{x} - \int \frac{\partial x}{x} e^{-x}$$

zurückgehen. Durch Substitution jeder Gleichung in die vorhergehende erhält man ohne Mühe:

$$\int \frac{e^{-x}}{x^{m+1}} \partial x =$$

$$-e^{-x} \left\{ \frac{1}{mx^m} - \frac{1}{m(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m(m-1)(m-2)x^{m-2}} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{m(m-1)\ldots 2.1.x} \right\} + \frac{(-1)^m}{m(m-1)\ldots.2.1} \int \frac{e^{-x}}{x} \partial x,$$

und, wenn man das Integral zwischen die Grenzen α und Unendlich einschliesst:

$$4) \quad \int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x^{m+1}} \partial x =$$

$$e^{-\alpha} \left\{ \frac{1}{m\alpha^m} - \frac{1}{m(m-1)\alpha^{m-1}} + \frac{1}{m(m-1)(m-2)\alpha^{m-3}} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{m(m-1)\ldots 2.1.\alpha} \right\} + \frac{(-1)^m}{m(m-1)\ldots.2.1} \int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x} \partial x.$$

Setzt man statt m der Reihe nach:

$$1, 2, 3, \ldots\ldots. n$$

und multiplicirt bezüglich mit:

$$-\beta, +\beta^2, -\beta^3, \ldots\ldots (-1)^n\beta^n;$$

so kommt mit Wiederholung des ersten Integrals:

$$\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x = \int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x,$$

$$-\beta\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}\partial x = \frac{\beta}{1}\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x - \frac{\beta}{1}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha},$$

$$+\beta^2\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x^3}\partial x = \frac{\beta^2}{1.2}\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x - \frac{\beta^2}{1.2}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{\beta^2}{2}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2},$$

$$-\beta^3\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x^4}\partial x = \frac{\beta^3}{1.2.3}\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x - \frac{\beta^3}{1.2.3}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{\beta^3}{2.3}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2} - \frac{\beta^3}{3}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^3},$$

$$+\beta^4\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x^5}\partial x = \frac{\beta^4}{1.2.3.4}\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x - \frac{\beta^4}{1.2.3.4}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{\beta^4}{2.3.4}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2} - \frac{\beta^4}{3.4}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^3} + \frac{\beta^4}{4}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^4},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(-1)^n\beta^n\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}\partial x = \frac{\beta^n}{1.2.....n}\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x - \frac{\beta^n}{1.2.....n}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{\beta^n}{2.3.....n}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^2} - \frac{\beta^n}{3.4.....n}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^3} + \frac{\beta^n}{4.5.....n}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^4} \ldots + \frac{(-1)^n\beta^n}{n}\frac{e^{-\alpha}}{\alpha^n}.$$

Summiren wir diese sämmtlichen Ausdrücke und bedenken, dass für

$$n = \infty:$$

$$1 + \frac{\beta}{1} + \frac{\beta^2}{1.2} + \frac{\beta^3}{1.2.3} + \ldots\ldots + \frac{\beta^n}{1.2.....n} = e^\beta,$$

folglich:

$$\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}+\frac{\beta^3}{1.2.3}+\frac{\beta^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots+\frac{\beta^n}{1.2\ldots n}=e^\beta-1,$$

$$\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{2.3}+\frac{\beta^4}{2.3.4}+\ldots\ldots+\frac{\beta^n}{2,3\ldots n}=e^\beta-(1+\frac{\beta}{1}),$$

$$\frac{\beta^3}{3}+\frac{\beta^4}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{\beta^n}{3.4\ldots n}=\{e^\beta-(1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2})\}1.2,$$

$$\frac{\beta^4}{4}+\ldots\ldots+\frac{\beta^n}{4\ldots n}=$$

$$\{e^\beta-(1+\frac{\beta}{1}+\frac{\beta^2}{1.2}+\frac{\beta^3}{1.2.3})\}1.2.3;$$

u. s. f.

so erhalten wir, wenn wir diese Summen von der zweiten ab bezüglich mit

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

bezeichnen, die Relation:

$$\int_{\alpha+\beta}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x-\frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{\alpha}\Big\{a_0-\frac{a_1}{\alpha}+\frac{a_2}{\alpha^2}-\frac{a_3}{\alpha^3}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{(-1)^n a_n}{\alpha^n}\Big\}\ \ldots\ldots\ 5)$$

Bemerken wir ferner, dass

$$a_n=\frac{\beta^n}{n},$$

so ergiebt sich auf der Stelle, da

$$\text{Lim } a_n=\text{Lim}\frac{\beta^n}{n}=0$$

$$\beta \overline{\overline{<}} 1,\ n=\infty$$

dagegen:

$$\text{Lim } a_n=\text{Lim}\frac{\beta^n}{n}=\infty$$

$$\beta>1,\ n=\infty;$$

dass wir, um ein brauchbares Resultat zu erlangen, β nicht grösser als die Einheit annehmen dürfen. Vereinigen wir mit dieser Be-

dingung die zweite, dass $\alpha \geqq 1$, so haben wir nicht nöthig die Convergenz der Reihe:

$$a_0 - \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} - \frac{a_3}{\alpha^3} + \ldots$$

noch besonders zu erweisen.

Um nun wenigstens an einem Beispiel die Brauchbarkeit der Formel 5) zu zeigen, sei zunächst $\beta = 1$, dann sind die Coëfficienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= e - 1, \\ a_1 &= e - 2, \\ a_2 &= 2e - 5, \\ a_3 &= 6e - 16, \\ a_4 &= 24e - 65, \\ &\vdots \end{aligned}$$

zwischen welchen im Allgemeinen folgende Rekursionsgleichung stattfindet:

$$a_{\nu+1} = (\nu + 1)a_\nu - 1.$$

In diesem Falle lässt sich eine noch stärkere Convergenz obiger Reihe erzielen, wenn man zu ihr die Identität:

$$0 = -\lg(1 + \frac{1}{\alpha}) + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{3\alpha^3} - \frac{1}{4\alpha^4} + \ldots\ldots$$

hinzufügt, deren Richtigkeit sofort erkannt wird, als man $\lg(1 + \frac{1}{\alpha})$, d. h. den natürlichen Logarithmus von $1 + \frac{1}{\alpha}$, in eine nach steigenden Potenzen des ächten Bruchs $\frac{1}{\alpha}$ geordnete Reihe entwickelt. Hierdurch geht 5) über in:

$$\int_{\alpha+1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \partial x = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \partial x - \frac{1}{\alpha e^{\alpha+1}} (a_0 - \lg(1 + \frac{1}{\alpha}) + \frac{b_1}{\alpha} - \frac{b_2}{\alpha^2} + \frac{b_3}{\alpha^3} \ldots\ldots)$$

wo nunmehr die Werthe der Coefficienten sind:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0{,}28171\ 81715\ 4096 \ldots \\ b_2 &= 0{,}06343\ 63430\ 8190 \ldots \\ b_3 &= 0{,}02364\ 23625\ 7906 \ldots \\ b_4 &= 0{,}01123\ 61169\ 8291 \ldots \end{aligned}$$

$b_5 = 0{,}00618\ 05849\ 1459\ldots.$
$b_6 = 0{,}00375\ 01761\ 5426\ldots.$
$b_7 = 0{,}00244\ 17092\ 7034\ldots.$
$b_8 = 0{,}00167\ 65313\ 0550\ldots.$
$b_9 = 0{,}00119\ 98928\ 6151\ldots.$

Sei z. B. $\alpha = 9$, so ergibt sich:

$$\int_{10}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \partial x = \int_{9}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \partial x - \frac{1}{9.e^{10}} \left\{ a_0 - \lg \frac{10}{9} + \frac{b_1}{9} - \frac{b_2}{9^2} + \frac{b_3}{9^3} - \frac{b_4}{9^4} + \ldots. \right\}$$

und wenn man mit gewöhnlichen siebenstelligen Logarithmen rechnet:

$$a_0 = 1{,}7182818(3) \qquad \frac{\mathrm{Lg}\frac{10}{9}}{\mathrm{Lg}\, e} = 0{,}1053603\ldots$$

$$\frac{b_1}{9} = 0{,}0313020(2) \qquad \frac{b_2}{9^2} = 0{,}0007831(6)$$

$$\frac{b_3}{9^3} = 0{,}0000324(3) \qquad \frac{b_4}{9^4} = 0{,}0000017(1)$$

$$\frac{b_5}{9^5} = 0{,}0000001(0) \qquad \overline{0{,}1061452}$$

$$\overline{1{,}7496164}$$
$$0{,}1061452$$
$$\mathrm{Lg}\,\overline{1{,}6434712} \quad = 0{,}2157622\ldots$$

$$\mathrm{Lg}\frac{1}{9.e^{10}} = 0{,}7028126 - 6$$

$$\int_{9}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \partial x - \int_{10}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \partial x = \mathrm{N.}\ (\mathrm{Lg} = 0{,}9185748 - 6) = 0{,}000008290387.$$

Die **Bretschneider**sche Tafel gibt:

$$\int_{9}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \partial x = 0{,}000012447354\ldots.$$

$$\int_{10}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \partial x = 0{,}000004156989\ldots.$$

deren Differenz

$$0{,}000008290365$$

also erst in der eilften Decimale von dem durch die Formel berechneten Werthe abweicht.

II.

Ueber die Summation der Transcendenten Ei$(-x)$.

Da der Werth des bestimmten Integrals $\int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x$ für ein wachsendes a sich immer mehr der Null nähert, also die Transcendenten:

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x,\ \int_{2a}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x,\ \int_{3a}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x, \text{ etc.}$$

eine abnehmende Reihe bilden, so liegt der Gedanke nahe, eine Summation derselben zu versuchen.

Nun ist allgemein, wenn r eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$\int_{ra}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x = \int_a^\infty \frac{e^{-rx}}{x}\partial x,$$

wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man wieder rx mit x vertauscht und demgemäss die Grenzen des Integrals verändert: folglich wenn man statt r successive

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ n$$

setzt, und die einzelnen Gleichungen addirt:

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x + \int_{2a}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x + \int_{3a}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x + \ldots + \int_{na}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x$$

$$= \int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x + \int_a^\infty \frac{e^{-2x}}{x}\partial x + \int_a^\infty \frac{e^{-3x}}{x}\partial x + \ldots + \int_a^\infty \frac{e^{-nx}}{x}\partial x.$$

Wegen der gleichen Integrationsgrenzen rechts kann man diese Integrale in ein einziges zusammenfassen und mit Anwendung des Summenzeichens Σ auch schreiben:

$$\Sigma_{r=1}^{r=n}\int_{ra}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x = \int_a^\infty \frac{\partial x}{x}\,\Sigma_{r=1}^{r=n} e^{-rx}.$$

Bemerkt man aber, dass

$$e^{-x},\ e^{-2x},\ \ldots\ldots\ e^{-nx}$$

eine, nach steigenden Potenzen von e^{-x} geordnete geometrische Progression darstellt, so ergibt sich deren Summe sofort:

$$\sum_{r=1}^{r=n} e^{-rx} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx}$$
$$= e^{-x}\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}.$$

Führt man diesen Ausdruck statt der entsprechenden Summe ein, so erhält man:

$$1) \quad \sum_{r=1}^{r=n}\int_{r\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x = \int_{\alpha}^{\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{e^{-x}}{x}\partial x$$
$$= \int_{\alpha}^{\infty}\frac{\partial x}{x(e^{x}-1)} - \int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{x(e^{x}-1)}\partial x.$$

Für wachsende n nähert sich das zweite Integral der rechten Seite ohne Ende der Null. Denn da α stets >0 sein muss, indem für $\alpha=0$, $\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x$ unendlich ist, so wird auch der kleinste Werth, den $x(e^{x}-1)$ in dem Intervall von $x=\alpha$ bis $x=\infty$ annehmen kann, eine endliche Grösse >0 sein müssen. Bezeichnen wir diese mit Q, den grössten Werth dagegen, den $x(e^{x}-1)$ in dem eben angeführten Intervall erlangen kann, mit P, so ist offenbar

$$\frac{e^{-nx}}{Q} > \frac{e^{-nx}}{x(e^{x}-1)} > \frac{e^{-nx}}{P},$$

folglich, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen:

$$\frac{1}{nQ}e^{-nx} > \int\frac{e^{-nx}}{x(e^{x}-1)}\partial x > \frac{1}{nP}e^{-nx}.$$

Für jedes beliebige, positive $x>0$ aber ist, weil

$$Q>0,\ P=\infty:$$

$$\left.\begin{aligned}\text{Lim}\frac{1}{nP}e^{-nx}=0\\ \text{Lim}\frac{1}{nQ}e^{-nx}=0\end{aligned}\right\}\ (n=\infty)$$

folglich auch das dazwischenliegende:

$$\text{Lim}\int\frac{e^{-nx}}{x(e^{x}-1)}\partial x=0$$
$$(n=\infty)$$

und ebenso.

$$\text{Lim}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{x(e^x-1)}\partial x=0. \qquad 2)$$

Mit Berücksichtigung dieses Grenzwerthes können wir jetzt die Gleichung 1) einfacher schreiben:

$$\Sigma_{r=1}^{r=\infty}\int_{r\alpha}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\partial x=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{\partial x}{x(e^x-1)}. \qquad 3)$$

Wiewohl es mit Anwendung der Fourierschen Reihen nicht schwer hält, das vorliegende Integral zu bestimmen, so ziehen wir es doch vor, eine von der Theorie jener Reihen unabhängige Ableitung, die freilich etwas weitläufiger ausfallen muss, zu geben. Da die neue Funktion von α, welche gegeben ist durch die Gleichung:

$$F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{\partial x}{x(e^x-1)}=\int_{1}^{\infty}\frac{\partial x}{x(e^{\alpha x}-1)}$$

sich auf keine der bekannten Transcendenten zurückführen lässt, so entwickeln wir den Bruch

$$\frac{1}{e^x-1}$$

in eine unendliche Folge von Partialbrüchen. Durch eine leichte Transformation erhalten wir nämlich:

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}-1\right);$$

da aber:

$$e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}=2\cos\frac{x}{2}\sqrt{-1},$$

$$e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}=-2\sqrt{-1}\sin\frac{x}{2}\sqrt{-1};$$

so wird

$$4) \qquad \frac{1}{x(e^x-1)}=\frac{1}{2x}\left(\sqrt{-1}\,\cot\frac{x}{2}\sqrt{-1}-1\right).$$

Für ein beliebiges u gilt ferner die Entwickelung:

$$\cot u = \frac{1}{u} - 2u\left(\frac{1}{\pi^2 - u^2} + \frac{1}{2^2\pi^2 - u^2} + \frac{1}{3^2\pi^2 - u^2} + \ldots\right)$$

(M. s. Cauchy cours d'analyse p. 575.)

Setzt man hierin $u = \frac{x}{2}\sqrt{-1}$ und dividirt durch $2x$, so erhält man:

$$\frac{1}{2x}\cot\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left\{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi^2 + \frac{x^2}{2^2}} + \frac{1}{2^2\pi^2 + \frac{x^2}{2^2}} + \frac{1}{3^2\pi^2 + \frac{x^2}{2^2}} + \ldots\ldots\right)\right\}$$

$$= \sqrt{-1}\left\{-\frac{1}{x^2} - 2\left(\frac{1}{2^2\pi^2 + x^2} + \frac{1}{4^2\pi^2 + x^2} + \frac{1}{6^2\pi^2 + x^2} + \ldots\right)\right\},$$

also schliesslich, wenn man noch wegen 4) den Faktor $\sqrt{-1}$ hinzufügt, und $\frac{1}{2x}$ subtrahirt:

$$\frac{1}{x(e^x - 1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + 2\left(\frac{1}{2^2\pi^2 + x^2} + \frac{1}{4^2\pi^2 + x^2} + \frac{1}{6^2\pi^2 + x^2} + \ldots\right) \quad 5)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂x und integrirt vorläufig noch ohne Rücksicht auf die Grenzen, so ergibt sich, weil allgemein

$$\int \frac{\partial x}{(2k\pi)^2 + x^2} = \frac{1}{2k\pi}\left[\arctan\frac{x}{2k\pi}\right]:$$

$$\int \frac{\partial x}{x(e^x - 1)} = C - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\lg x + 2\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\arctan\frac{x}{2\pi}\right] + \frac{1}{4\pi}\left[\arctan\frac{x}{4\pi}\right] + \ldots\ldots + \frac{1}{2n\pi}\left[\arctan\frac{x}{2n\pi}\right]\right\} \quad 6)$$

wo

$$\left[\arctan\frac{x}{2k\pi}\right]$$

eine vieldeutige Funktion von x ist, die, wenn $\arctan\frac{x}{2k\pi}$ die kleinste derselben darstellt, auch ausgedrückt werden kann durch:

$$\left[\arctan\frac{x}{2k\pi}\right] = r\pi + \arctan\frac{x}{2k\pi}.$$

Nimmt man als obere Grenze β, als untere α an, so kommt:

$$7)\quad \int_\alpha^\beta \frac{\partial x}{x(e^x-1)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2}\lg\frac{\alpha}{\beta} + 2\left\{\frac{1}{2\pi}\left(\arctan\frac{\beta}{2\pi} - \arctan\frac{\alpha}{2\pi}\right)\right.$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left(\arctan\frac{\beta}{4\pi} - \arctan\frac{\alpha}{4\pi}\right)$$

$$\vdots$$

$$\left. + \frac{1}{2n\pi}\left(\arctan\frac{\beta}{2n\pi} - \arctan\frac{\alpha}{2n\pi}\right)\right\}$$

in welchem Ausdrucke die eben angezeigte Vieldeutigkeit wieder verschwunden ist. Sei nun $\beta = 2m\pi$ und wachse m ins Unendliche, so finden wir als nächste Lösung der uns gestellten Aufgabe:

$$8)\qquad F(\alpha) = \int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\lg(\alpha) - 2\left(\frac{1}{2\pi}\arctan\frac{\alpha}{2\pi}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi}\arctan\frac{\alpha}{4\pi} + \ldots\ldots\right) + K$$

wo die beständige Grösse K gegeben ist durch einen noch zu ermittelnden Grenzwerth, nämlich:

$$8^*)\qquad K = \operatorname{Lim}\left\{-\frac{1}{2}\lg 2m\pi + \frac{1}{\pi}\left(\arctan m + \frac{1}{2}\arctan\frac{m}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3}\arctan\frac{m}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\arctan\frac{m}{n}\right)\right\}$$

$$m = \infty,\ n = \infty.$$

Zur Bestimmung dieses Grenzausdruckes ist es vor Allem nothwendig, das Verhältniss, in welchem die beiden wachsenden Grössen m und n zu einander stehen, scharf aufzufassen. Es wäre ungerechtfertigt, da beide unabhängig von einander sind, irgend welche Beziehung, $m = f(n)$, zwischen ihnen anzunehmen. Man würde sonst für jede derartige Substitution ein anderes Resultat erhalten, von denen keines den wahren Werth des obigen Limes angäbe. Vielmehr ist es klar, dass m gegen n als constant anzusehen ist, und somit für ein noch so grosses m

$$\operatorname{Lim}\frac{m}{n} = 0. \qquad (9$$

Dann kommt jedenfalls, sobald wir m als ganze Zahl betrachten, unter den Werthen von n auch einer $= m$ vor, wodurch die Reihe:

$$\operatorname{arctan} m + \frac{1}{2}\operatorname{arctan}\frac{m}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctan}\frac{m}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\operatorname{arctan}\frac{m}{n} = S \ldots \quad 10)$$

zunächst in zwei Theile zerfällt:

$$\frac{1}{m}\operatorname{arctan} 1 + \frac{1}{m+1}\operatorname{arctan}\frac{m}{m+1} + \frac{1}{m+2}\operatorname{arctan}\frac{m}{m+2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n}\operatorname{arctan}\frac{m}{n} = S_1 \ldots \quad 11)$$

und

$$\operatorname{arctan} m + \frac{1}{2}\operatorname{arctan}\frac{m}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctan}\frac{m}{3} + \ldots\ldots + \frac{m}{m-1}\operatorname{arctan}\frac{m}{m-1} = S_2 \ldots 12)$$

die wir beide, abgesondert von einander, betrachten wollen.

Die Reihe in 11) ist convergent und ihre Summe S_1 nähert sich einem bestimmten Werthe, der zwischen 0 und 1 liegt, so dass

$$1 > S_1 > 0;$$

denn es ist für positive z:

$$z > \operatorname{arctan} z > 0,,$$

also:

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{m}\operatorname{arctan} 1 > 0\,,$$

$$\frac{1}{m(1+\frac{1}{m})^2} > \frac{1}{m+1}\operatorname{arctan}\frac{m}{m+1} > 0\,,$$

$$\frac{1}{m(1+\frac{2}{m})^2} > \frac{1}{m+2}\operatorname{arctan}\frac{m}{m+2} > 0\,,$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{m(\frac{n}{m})^2} > \frac{1}{n}\operatorname{arctan}\frac{m}{n} > 0 \ldots;$$

Summirt man alle diese Ungleichungen, so erhält man:

$$\Sigma_{r=0}^{r=n}\frac{1}{m}\,\frac{1}{(1+\frac{r}{m})^2} > S_1 > 0.$$

Das Zeichen Σ geht aber, wenn m unendlich gross wird, in das Integralzeichen $\int$ über, und es ergibt sich mit Rücksicht auf Gleichung 9):

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)^2} > S_1 > 0;$$

und da

$$13) \qquad \int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)^m} = \frac{1}{m-1}$$

für $m=2$:

$$1 > S_1 > 0,$$

wie behauptet wurde. Entwickelt man nun die einzelnen Glieder von S_1 in convergente Reihen, so kommt:

$$\frac{1}{m}\operatorname{arctan}1 = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots\right),$$

$$\frac{1}{m+1}\operatorname{arctan}\frac{m}{m+1} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{m})^2} - \frac{1}{3(1+\frac{1}{m})^4} + \frac{1}{5(1+\frac{1}{m})^6} - \frac{1}{7(1+\frac{1}{m})^8} \ldots\right),$$

$$\frac{1}{m+2}\operatorname{arctan}\frac{m}{m+2} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{(1+\frac{2}{m})^2} - \frac{1}{3(1+\frac{2}{m})^4} + \frac{1}{5(1+\frac{2}{m})^6} - \frac{1}{7(1+\frac{2}{m})^8} \ldots\right),$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n}\operatorname{arctan}\frac{m}{n} = \left(\frac{1}{(\frac{n}{m})^2} - \frac{1}{3(\frac{n}{m})^4} + \frac{1}{5(\frac{n}{m})^6} - \frac{1}{7(\frac{n}{m})^8} + \ldots\ldots\right).$$

Man erkennt sofort, mit Berücksichtigung von 13), dass sämmtliche Verticalcolonnen dieser unendlichen Doppelreihe convergent sind und dass nicht minder die aus ihnen gebildete Reihe

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}\ldots\ldots$$

sich einer bestimmten Grenze nähert. Es ist daher:

$$\text{Lim } S_1 = 1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\ldots \qquad 14)$$

Um weiter die Summation der Reihe S_2 bewerkstelligen zu können, benutzen wir die Gleichung:

$$\arctan a - \arctan b = \arctan\frac{a-b}{1+ab}.$$

Wird hierin $a=\frac{m}{r}$, $b=\frac{m}{r+1}$ gesetzt, so folgt:

$$\arctan\frac{m}{r} - \arctan\frac{m}{r+1} = \arctan\frac{m}{r(r+1)+m^2}$$

oder

$$\arctan\frac{m}{r+1} = \arctan\frac{m}{r} - \arctan\frac{m}{r(r+1)+m^2}.$$

Nehmen wir r der Reihe nach

$$=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ (m-2)$$

und dividiren bezüglich durch

$$2,\ 3,\ \ldots\ldots\ (m-1),$$

so ergibt sich, wenn wir das erste Glied der Reihe S_2 hinzuziehen:

$$\arctan m = \arctan m,$$

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{m}{2} = \frac{1}{2}\arctan m - \frac{1}{2}\arctan\frac{m}{1.2+m^2},$$

$$\frac{1}{3}\arctan\frac{m}{3} = \frac{1}{3}\arctan m - \frac{1}{3}\arctan\frac{m}{1.2+m^2}$$
$$-\frac{1}{3}\arctan\frac{m}{2.3+m^2},$$

Das Zeichen Σ geht aber, wenn m …
Integralzeichen $\int$ über, und es er…
Gleichung 9):

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)^2} > \ldots$$

und da

$$13)\qquad \int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)^m} \ldots$$

für $m=2$:

$$1 > S_1 \ldots$$

wie behauptet wurde. Entwickelt …
von S_1 in convergente Reihen, so …

$$\frac{1}{m}\arctan 1 = \frac{1}{m}\Big(1 - \frac{1}{3} + \ldots$$

$$\frac{1}{m+1}\arctan\frac{m}{m+1} = \frac{1}{m}\Big(\frac{1}{(1+\frac{1}{m})^2} \ldots$$

$$\frac{1}{m+2}\arctan\frac{m}{m+2} = \frac{1}{m}\Big(\frac{1}{(1+\frac{2}{m})^2} \ldots$$

$$\frac{1}{n}\arctan\frac{m}{n} = \Big(\frac{1}{(\frac{n}{m})^2} - \frac{\ldots}{3\ldots} \ldots$$

Man erkennt sofort, mit Berück…
liche Verticalcolonnen dieser une…
sind und dass nicht minder die …

$$\frac{m}{r(r+1)+m^2}<1$$

$$+m^2 = \frac{m}{1.2+m^2} - \frac{1}{3m^3}\varepsilon_2,$$

$$m^2 = \frac{m}{2.3+m^2} - \frac{1}{3m^3}\varepsilon_3,$$

$$\vdots$$

$$m^2 = \frac{m}{(m-2)(m-1)+m^2} - \frac{1}{3m^3}\varepsilon_{m-1};$$

nach mit a_2, a_3, etc. multipliciren und

$$a_3\frac{m}{2.3+m^2} + \ldots a_{m-1}\frac{m}{(m-2)(m-1)+m^2}$$

$$\varepsilon_3 + a_4\varepsilon_4 + \ldots\ldots a_{m-1}\varepsilon_{m-1}\}.$$

Grössen ε_2, ε_3, $\varepsilon_4 \ldots \varepsilon_{m-1}$, d. h. liegt 1, so kann man nach einem bekann-

$$_1\varepsilon_{m-1} = (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_{m-1})\varepsilon;$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots \frac{m-2}{m-1} < m,$$

$$+ a_4\varepsilon_4 + \ldots\ldots a_{m-1}\varepsilon_{m-1})$$

der Null.

die Quotienten:

$$\frac{m}{+m^2}, \ldots \frac{m}{(m-\ldots)}$$

n von:

$$\frac{2.3}{m^2}, \ldots \frac{(m-\ldots)}{}$$

$$\frac{1}{4}\arctan\frac{m}{4}=\frac{1}{4}\arctan m-\frac{1}{4}\arctan\frac{m}{1.2+m^2}$$
$$-\frac{1}{4}\arctan\frac{m}{2.3+m^2}-\frac{1}{4}\arctan\frac{m}{3.4+m^2},$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{m-1}\arctan\frac{1}{m-1}=\frac{1}{m-1}\arctan m-\frac{1}{m-1}\arctan\frac{m}{1.2+m^2}$$
$$-\frac{1}{m-1}\arctan\frac{m}{2.3+m^2}\ldots-\frac{1}{m-1}\arctan\frac{m}{(m-3)(m-2)+m^2}$$
$$-\frac{1}{m-1}\arctan\frac{m}{(m-2)(m-1)+m^2};$$

wobei das Fortschreitungsgesetz von selbst klar ist.

Addiren wir diese sämmtlichen Ausdrücke und setzen:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m-1}=a_1,$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m-1}=a_2,$$
$$\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m-1}=a_3,$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{m-1}=a_{m-1};$$

so kommt:

$$S_2=a_1\arctan m-\left\{a_2\arctan\frac{m}{1.2+m^2}+a_3\arctan\frac{m}{2.3+m^2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+a_{m-1}\arctan\frac{m}{(m-2)(m-1)+m^2}\right\} \qquad 15)$$

folglich, wenn wir vorläufig das subtractive Glied in 15) mit S'_2 bezeichnen:

$$S_2=a_1\arctan m-S'_2. \qquad 15)^*$$

Mögen nun

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\ \ldots\ \varepsilon_{m-2}$$

Grössen bedeuten, die zwischen 0 und 1 liegen, so ist; weil

$$\frac{m}{r(r+1)+m^2}<1$$

ist:

$$\arctan\frac{m}{1.2+m^2}=\frac{m}{1.2+m^2}-\frac{1}{3m^3}\varepsilon_2,$$

$$\arctan\frac{m}{2.3+m^2}=\frac{m}{2.3+m^2}-\frac{1}{3m^3}\varepsilon_3,$$

$$\vdots$$

$$\arctan\frac{m}{(m-2)(m-1)+m^2}=\frac{m}{(m-2)(m-1)+m^2}-\frac{1}{3m^3}\varepsilon_{m-1};$$

also, wenn wir der Reihe nach mit a_2, a_3, etc. multipliciren und addiren:

$$16)\qquad S'_2=a_2\frac{m}{1.2+m^2}+a_3\frac{m}{2.3+m^2}+\ldots\, a_{m-1}\frac{m}{(m-2)(m-1)+m^2}$$
$$-\frac{1}{3m^3}\{a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+a_4\varepsilon_4+\ldots\ldots\, a_{m-1}\varepsilon_{m-1}\}.$$

Ist nun ε ein Mittleres der Grössen ε_2, ε_3, $\varepsilon_4 \ldots\ldots \varepsilon_{m-1}$, d. h. liegt ε ebenfalls zwischen 0 und 1, so kann man nach einem bekannten Satze schreiben:

$$a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+a_4\varepsilon_4+\ldots\ldots\, a_{m-1}\varepsilon_{m-1}=(a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots\, a_{m-1})\varepsilon;$$

es ist aber

$$a_2+a_3+a_4+\ldots\, a_{m-1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots\frac{m-2}{m-1}<m,$$

folglich nähert sich:

$$\frac{1}{3m^3}(a_2\varepsilon_2+a_3\varepsilon_3+a_4\varepsilon_4+\ldots\ldots\, a_{m-1}\varepsilon_{m-1})$$

für wachsende m ohne Ende der Null.

Entwickelt man weiter die Quotienten:

$$\frac{m}{1.2+m^2},\quad \frac{m}{2.3+m^2},\ldots\frac{m}{(m-2)(m-1)+m^2}$$

nach steigenden Potenzen von:

$$\frac{1.2}{m^2},\quad \frac{2.3}{m^2},\ldots\frac{(m-2)(m-1)}{m^2};$$

so ergibt sich:

$$S'_2 = \frac{1}{m}(a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_{m-1})$$

$$- \frac{1}{m^3}(1.2a_2 + 2.3a_3 + 3.4a_4 + \ldots . (m-2)(m-1)a_{m-1})$$

$$+ \frac{1}{m^5}(1^2.2^2a_2 + 2^2.3^2a_3 + 3^2.4^2a_4 + \ldots (m-2)^2(m-1)^2a_{m-1}) \quad 17)$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{(-1)^k}{m^{2k+1}}(1^k.2^ka_2 + 2^k.3^ka_3 + 3^k.4^ka_4 + \ldots . (m-2)^k(m-1)^ka_{m-1}).$$

$$\vdots$$

Es hat keine Schwierigkeit den Grenzwerth des allgemeinen Gliedes u_k dieser Doppelreihe zu bestimmen. Vermöge einer sehr einfachen Transformation nämlich ist, wenn wir statt a_2, a_3, etc. wiederum ihre Werthe setzen:

$$u_k = \frac{1}{m^{2k+1}}\left\{1^k.2^k(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{m-1}) + 2^k.3^k(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots . \frac{1}{m-1}) \right.$$
$$\left. + \ldots . (m-2)^k(m-1)^k\frac{1}{m-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{m^{2k+1}}\left\{\frac{1}{2}1^k2^k + \frac{1}{3}(1^k2^k + 2^k3^k) + \frac{1}{4}(1^k2^k + 2^k3^k + 3^k4^k) + \ldots . \right. \quad 18)$$
$$\left. + \frac{1}{m-1}(1^k2^k + 2^k3^k + \ldots\ldots (m-2)^k(m-1)^k)\right\}.$$

Offenbar liegt der Werth des letzten Ausdrucks zwischen den beiden andern:

$$19) \begin{cases} u'_k = \frac{1}{m^{2k+1}}\left\{\frac{1}{2}.2^{2k} + \frac{1}{3}(2^{2k} + 3^{2k}) + \frac{1}{4}(2^{2k} + 3^{2k} + 4^{2k}) + \ldots \right. \\ \qquad \left. \ldots . + \frac{1}{m-1}(2^{2k} + 3^{2k} + \ldots (m-1)^{2k})\right\} \\ \text{und} \\ u''_k = \frac{1}{m^{2k+1}}\left\{\frac{1}{2}.1^{2k} + \frac{1}{3}(1^{2k} + 2^{2k}) + \frac{1}{4}(1^{2k} + 2^{2k} + 3^{2k}) + \ldots \right. \\ \qquad \left. \ldots . + \frac{1}{m-1}(1^{2k} + 2^{2k} + \ldots . (m-2)^{2k})\right\}, \end{cases}$$

welche für ein wachsendes m gegen dieselbe Grenze convergiren. Denn es ist:

$$\text{Lim}\,(u'_k - u''_k) = \text{Lim}\,\frac{1}{m^{2k+1}}\{2^{2k-1} + 3^{2k-1} + 4^{2k-1} + \ldots. (m-1)^{2k-1}\}$$

$$- \text{Lim}\,\frac{1}{m^{2k+1}}\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.. \frac{1}{m-1}\}.$$

Man hat aber nach einem bekannten Satze:

$$20) \qquad \text{Lim}\,\frac{1^{2k-1} + 2^{2k-1} + 3^{2k-1} + \ldots. + (m-1)^{2k-1}}{m^{2k}} = \frac{1}{2k},$$

folglich auf der Stelle:

$$21) \qquad \text{Lim}\,\frac{1}{m^{2k+1}}\{2^{2k-1} + 3^{2k-1} + 4^{2k-1} + \ldots. + (m-1)^{2k-1}\} = 0.$$

Ebenso ist, wie man leicht sieht:

$$\text{Lim}\,\frac{1}{m^{2k+1}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.. \frac{1}{m-1}\right) = 0,$$

also

$$\text{Lim}\,(u'_k - u''_k) = 0,$$

woraus sich das Behauptete

$$\text{Lim}\,u'_k = \text{Lim}\,u''_k$$

von selbst ergibt. Da es nun gleichgültig ist, welchen dieser beiden Grenzwerthe wir bestimmen, so wählen wir den bequemeren Lim u''_k. Hiebei beziehen wir uns auf eine Abhandlung des Herrn Prof. Schlömilch im Archiv f. Math. Th. XIV. p. 452. ff. wo unter Formel 6) die Relation aufgestellt wird:

$$\frac{(s+1)^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + \ldots. + s^m > \frac{s^{m+1}}{m+1},$$

welche für jedes positive m gültig ist. Sonach ist allgemein:

$$\frac{(r+1)^{2k+1}}{2k+1} > 1^{2k} + 2^{2k} + 3^{2k} + \ldots. r^{2k} > \frac{r^{2k+1}}{2k+1};$$

folglich, wenn wir mit $r+1$ dividiren:

$$\frac{(r+1)^{2k}}{2k+1} > \frac{1}{r+1}(1^{2k} + 2^{2k} + 3^{2k} + \ldots\ldots r^{2k}) > \frac{r^{2k}}{2k+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{r}}$$

$$> \frac{r^{2k}}{2k+1}(1 - \frac{1}{r}\varepsilon_r)$$

wo ε_r wiederum eine Grösse bedeutet, die zwischen 0 und 1 liegt. Setzen wir hierin der Reihe nach für r

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ (m-2),$$

so erhalten wir:

$$\frac{2^{2k}}{2k+1} > \frac{1}{2}1^{2k} > \frac{1^{2k}}{2k+1} - \frac{1^{2k-1}}{2k+1}\varepsilon_1,$$

$$\frac{3^{2k}}{2k+1} > \frac{1}{3}(1^{2k}+2^{2k}) > \frac{2^{2k}}{2k+1} - \frac{2^{2k-1}}{2k+1}\varepsilon_2,$$

$$\frac{4^{2k}}{2k+1} > \frac{1}{4}(1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}) > \frac{3^{2k}}{2k+1} - \frac{3^{2k-1}}{2k+1}\varepsilon_3,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{(m-1)^{2k}}{2k+1} > \frac{1}{m-1}(1^{2k}+2^{2k}+\ldots+(m-1)^{2k}) > \frac{(m-2)^{2k}}{2k+1} - \frac{(m-2)^{2k-1}}{2k+1}\varepsilon_{m-2}.$$

Summiren wir diese sämmtlichen Ungleichungen und dividiren durch m^{2k+1}, so kommt:

$$\frac{1}{2k+1}\left(\frac{2^{2k}+3^{2k}+4^{2k}+\ldots.+(m-1)^{2k}}{m^{2k+1}}\right) > u''_k >$$

$$\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\ldots.+(m-2)^{2k}}{m^{2k+1}}\right)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2k+1}\left(\frac{1^{2k-1}+2^{2k-1}+\ldots+(m-2)^{2k-1}}{m^{2k+1}}\right)$$

wo ε ebenfalls ein ächter Bruch ist. Mit Rücksicht auf 20) und 21) ergibt sich sofort, wenn wir zur Grenze für wachsende m übergehen:

$$\frac{1}{(2k+1)^2} > \text{Lim}\, u''_k > \frac{1}{(2k+1)^2},$$

d. h.

$$\text{Lim}\, u''_k = \frac{1}{(2k+1)^2};$$

also auch:

$$\text{Lim}\, u_k = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Durch Specialisirung dieses allgemeinen Ausdruckes nach Massgabe der Gleichung 17) ergibt sich auf der Stelle:

$$\text{Lim}\, S'_2 = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots. = \text{Lim}\, S_1 \quad \text{(s. Gleichung 14))}. \qquad 23)$$

Fassen wir jetzt Gleichung 14), 15)*, 22) zusammen, so wird 8*) einfacher:

$$K = \text{Lim}\{-\frac{1}{2}\lg 2m\pi + \frac{1}{\pi}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots. \frac{1}{m-1})\,\text{arctan}\, m\}$$

$$m = \infty\,.$$

Für ein unendliches m ist aber:

$$\text{arctan}\, m = \frac{\pi}{2},$$

also

$$K = \text{Lim}\{-\frac{1}{2}\lg 2\pi + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots. \frac{1}{m-1} - \lg m)\}$$

$$= -\frac{1}{2}(\lg 2\pi + C), \qquad 23)$$

wo C die bereits im Eingange erwähnte Constante des Integrallogarithmus bedeutet. Wir können somit als endliches Resultat schreiben

$$\Sigma_{r=1}^{r=\infty} \int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x = \int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x - 1)}$$

$$= -\frac{1}{2}\, C + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\lg\frac{\alpha}{2\pi}$$

$$-2(\frac{1}{2\pi}\text{arctan}\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\text{arctan}\frac{\alpha}{4\pi} + \ldots.) \qquad 24)$$

Ist $\alpha \leqq 2\pi$, so lassen sich die arctan in convergente Reihen entwickeln, deren Summe ebenfalls einem endlichen Werthe sich nähert. Man findet ohne Mühe:

25)

$$\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x - 1)} = -\frac{1}{2}\, C + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\lg\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\alpha s_2}{2\pi^2} + \frac{\alpha^3 s_4}{3.2^3\pi^4} - \frac{\alpha^5 s_6}{5.2^5\pi^6} + \ldots.$$

wo

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots..$$

Führt man die Bernoulli'schen Zahlen ein und bedenkt, dass allgemein:

$$s_{2n} = \frac{2^{2n-1} B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2.3\ldots.(2n)}$$

oder

$$\frac{s_{2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}} = \frac{B_{2n-1}}{1.2.3..(2n)};$$

so haben wir die einfache Formel:

26)

$$\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} = -\frac{1}{2}C + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\lg\frac{\alpha}{2\pi} - \alpha\frac{B_1}{1.2} + \frac{\alpha_3}{3}\frac{B_3}{1.2..4} - \frac{\alpha^5}{5}\frac{B_5}{1.2..6} + \ldots$$

$$0 < \alpha \leqq 2\pi.$$

Zugleich ergeben sich noch einige andere Summen, die nicht ohne Interesse sind. Man findet leicht, wenn

$$f(a) + f(2a) + f(3a) + \ldots. = F(a)$$

gesetzt wird, die ebenfalls gültigen Gleichungen:

$$f(a) + f(3a) + f(5a) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = F(a) - F(2a) \ldots.. \qquad 27)$$

$$f(a) - f(2a) + f(3a) - f(4a) + \ldots.. = Fa - 2F(2a). \qquad 28)$$

So lange nun α reell und, wie wir stets vorausgesetzt haben, positiv ist, fällt

$$\int_\alpha^\infty \frac{e^{-x}}{x}\partial x \text{ mit } -\mathrm{Ei}(-x)$$

zusammen, und wir können unter dieser Beschränkung schreiben:

$$\mathrm{Ei}(-\alpha) + \mathrm{Ei}(-2\alpha) + \mathrm{Ei}(-3\alpha) + \ldots = -\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)}$$

$$= \frac{1}{2}C - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\lg\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\alpha}{1}\frac{B_1}{1.2} - \frac{\alpha^3}{3}\frac{B_3}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^5}{5}\frac{B_5}{1.2..6}\ldots \qquad 29)$$

Ferner ist mit Rücksicht auf 27)

$$\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} - \int_{2\alpha}^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} = \int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} - \int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^{2x}-1)}$$

$$= \int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-e^{-x})},$$

folglich ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Ei}(-\alpha)+\mathrm{Ei}(-3\alpha)+\mathrm{Ei}(-5\alpha)+\ldots &= -\left(\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} - \int_{2\alpha}^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)}\right)\\ &= -\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-e^{-x})}\\ &= -\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}\lg 2-\frac{(2^1-1)\alpha B_1}{1.2}+\frac{(2^3-1)\alpha^3 B_3}{1.2.3.4}-\frac{(2^5-1)\alpha^5 B_5}{1.2..5}+\ldots\end{aligned}\right\} 30)$$

Da endlich

$$\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} - 2\int_{2\alpha}^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} = \int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} - 2\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^{2x}-1)} = \int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x+1)},$$

so kommt

31) $\mathrm{Ei}(-\alpha)-\mathrm{Ei}(-2\alpha)+\mathrm{Ei}(-3\alpha)-\mathrm{Ei}(-4\alpha)+\ldots$

$$= -\left(\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)} - 2\int_{2\alpha}^\infty \frac{\partial x}{x(e^x-1)}\right)$$

$$= -\int_\alpha^\infty \frac{\partial x}{x(e^x+1)}$$

$$= -\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\lg\frac{2\alpha}{\pi}-\frac{(2^2-1)\alpha B_1}{1.2}+\frac{(2^4-1)\alpha^3 B_3}{1.2.2.4} - \frac{(2^6-1)\alpha^5 B_5}{1.2\ldots6}+\ldots$$

Lässt man α imaginär werden, so erhält man mit geringen Modificationen ganz analoge Ausdrücke für die Summen. sowohl das Integralcosinus $\mathrm{Ci}(\alpha)$, als das Integralsinus $\mathrm{Si}(\alpha)$, von denen bereits eine mit Hülfe Fourier'scher Reihen vom Herrn Professor Schlömilch im Archiv der Math. Bd. XI. p. 389 ff. entwickelt worden ist. Eine weitere Auseinandersetzung dieses Gegenstandes behalten wir uns jedoch für eine andere Abhandlung vor.

XXX.

Ueber das Gesetz der Primzahlen.

Von

Herrn Dr. Burhenne,

Lehrer der Mathematik an der höhern Gewerbschule zu Cassel.

Da bis jetzt keine allgemeine Formel für die Primzahlen bekannt ist, so sind die folgenden Betrachtungen vielleicht nicht ohne Interesse.

Wird die Function

$$(1)\qquad \frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots+\frac{x^k}{1-x^k}+\ldots$$

nach steigenden Potenzen von x entwickelt, so entsteht die Reihe

$$(2)\qquad x+2x^2+2x^3+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+\ldots$$

Man überzeugt sich hier leicht, dass in jedem Gliede dieser Reihe der Coefficient so viele Einheiten hat als der Exponent Divisoren. Der Exponent der Glieder, welche den Coefficienten 2 haben, ist eine Primzahl, und alle Primzahlen treten successive auf. Diese Reihe wird schon von Lambert in seiner Architectonik beiläufig erwähnt, ist aber nicht weiter benutzt worden. Im Folgenden strebe ich, darauf allgemeine zur Theorie der Zahlen gehörige Formeln zu gründen.

Der $n$te Coefficient der Reihe (2) ist gleich der Anzahl der Divisoren der ganzen Zahl n. Wir drücken diesen Coefficienten allgemein aus, wie die Maclaurin'sche Reihe lehrt. Wenn $\frac{x^k}{1-x^k}$ kurz durch $F(x)$ bezeichnet wird, und $F^n(0)$ den $n$ten Differentialquotienten von $F(x)$ bedeutet, wo $x=0$ gesetzt ist, so drückt

$$(3) \qquad \frac{1}{1.2.3\ldots n}\sum_{k=1}^{k=n} F^n(0), \text{ wo } F(x)=\frac{x^k}{1-x^k} \text{ ist,}$$

den $n$ten Coefficienten der Reihe (2) aus. Diese Formel (3) ist ein allgemeiner Ausdruck für die Anzahl der Divisoren einer jeden ganzen Zahl n. Wird dieser Ausdruck gleich 2 gesetzt, so hat man die allgemeine Gleichung für jede Primzahl n, nämlich

$$(4) \qquad \frac{1}{1.2.3\ldots n}\sum_{k=1}^{k=n} F^n(0)=2, \text{ wo } F(x)=\frac{x^k}{1-x^k},$$

welche Gleichung, wie die Betrachtung der Reihe (2) lehrt, für alle Primzahlen und nur für solche gilt, also für die Primzahlen charakteristisch ist. Nur ist dabei die 1 ausgeschlossen, weil dies die einzige Primzahl ist, welche keine zwei Divisoren hat. Für $n=1$ wird natürlich $\frac{1}{1.2.3\ldots n}F^n(0)=1$.

Es wäre nun die Formel (3) weiter zu entwickeln. Deshalb wenden wir uns zur independenten Darstellung des $n$ten Differentialquotienten der Function $\frac{x^k}{1-x^k}$, welchen wir durch $F^n(x)$ bezeichnen. Die dazu nöthigen Formeln finden sich in Sohncke's Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Man erhält

für ein ungerades k:

$$(5) \qquad F^n(x)=(-1)^{n+1}.\frac{1.2.3\ldots n}{k}.\frac{1}{(x-1)^{n+1}}$$
$$+(-1)^{n+1}.\frac{1.2.3\ldots n}{\frac{1}{2}k}.\sum_{h=1}^{h=\frac{k-1}{2}}\frac{\cos\left(\frac{2h\pi}{k}+(n+1)\Phi_h\right)}{\sqrt{\left(x^2-2x\cos\frac{2h\pi}{n}+1\right)^{n+1}}};$$

für ein gerades k:

$$(6) \qquad F^n(x)=(-1)^{n+1}.\frac{1.2.3\ldots n}{k}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$
$$+(-1)^{n+1}.\frac{1.2.3\ldots n}{\frac{1}{2}k}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}k-1}\frac{\cos\left(\frac{2h\pi}{k}+(n+1)\Phi_h\right)}{\sqrt{\left(x^2-2x\cos\frac{2h\pi}{n}+1\right)^{n+1}}};$$

wobei

$$\cos\Phi_h = \frac{x - \cos\frac{2h\pi}{k}}{\sqrt{x^2 - 2x\cos\frac{2h\pi}{k} + 1}}, \quad \sin\Phi_h = \frac{\sin\frac{2h\pi}{k}}{\sqrt{x^2 - 2x\cos\frac{2h\pi}{k} + 1}}$$

zu setzen ist.

Es ist nun, um $F^n(0)$ zu erhalten, in den Ausdrücken (5) und (6) $x=0$ zu setzen. Dann wird

$$\cos\Phi_h = -\cos\frac{2h\pi}{k}, \quad \sin\Phi_h = \sin\frac{2h\pi}{k};$$

also

$$\Phi_h = \pi - \frac{2h\pi}{k},$$

folglich

$$\cos\left(\frac{2h\pi}{k} + (n+1)\Phi_h\right) = \cos\left(\frac{2nh\pi}{k} - (n+1)\pi\right) = (-1)^{n+1}.\cos\frac{2nh\pi}{k},$$

so dass sich ergiebt:

für ein ungerades k:

$$(7) \qquad F^n(0) = \frac{1.2.3\ldots n}{k} + \frac{1.2.3\ldots n}{\frac{1}{2}k} \sum_{h=1}^{h=\frac{k-1}{2}} \cos\frac{2nh\pi}{k};$$

für ein gerades k:

$$(8) \qquad F^n(0) = \frac{1.2.3\ldots n}{k} \cdot (1-(-1)^{n+1}) + \frac{1.2.3\ldots n}{\frac{1}{2}k} \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}k-1} \cos\frac{2nh\pi}{k}.$$

Substituirt man diese Formeln (7) und (8) in (3), so erhält man den entwickelten Ausdruck für den $n$ten Coefficienten der Reihe (2), nämlich

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} \sum_{k=1}^{k=n} F^n(0) =$$

$$(9) \qquad \sum_{t,\,p} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{t} + \frac{2}{t} \sum_{h=1}^{h=\frac{t-1}{2}} \cos\frac{2nh\pi}{t} \\ + \frac{1}{p}(1-(-1)^{n+1}) + \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}p-1} \cos\frac{2nh\pi}{p} \end{array} \right\}$$

wo für t jede ungerade Zahl, die nicht grösser als n, und für p jede gerade Zahl, die nicht grösser als n ist, zu setzen wäre. Diese Formel (9) drückt die Anzahl der Divisoren einer jeden ganzen Zahl n aus. Es folgen einige Beispiele, wobei wir die Formel (9) kurz durch ΣU bezeichnen.

$$\text{Für } n=1 \text{ ist } \Sigma U = \left\{ \begin{matrix} 1+0 \\ +0+0 \end{matrix} \right\} = 1$$

$$\text{Für } n=2 \text{ ist } \Sigma U = \left\{ \begin{matrix} 1+0 \\ +1+0 \end{matrix} \right\} = 2$$

$$\text{Für } n=3 \text{ ist } \Sigma U = \left\{ \begin{matrix} \frac{4}{3}+\frac{2}{3} \\ 0+0 \end{matrix} \right\} = 2$$

$$\text{Für } n=4 \text{ ist } \Sigma U = \left\{ \begin{matrix} \frac{4}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2} \end{matrix} \right\} = 3$$

$$\text{Für } n=5 \text{ ist } \Sigma U = \left\{ \begin{matrix} \frac{23}{15}+\frac{7}{15} \\ 0+0 \end{matrix} \right\} = 2$$

$$\text{Für } n=6 \text{ ist } \Sigma U = \left\{ \begin{matrix} \frac{23}{15}+\frac{7}{15} \\ \frac{11}{6}+\frac{1}{6} \end{matrix} \right\} = 4$$

u. s. w.

Uebrigens zeigt sich die Formel (9) in ihrer wahren Einfachheit, wenn man die einzelnen Substitutionen für t und p separirt. Wir bezeichnen jetzt die Formel (9) näher durch $\Sigma \left\{ \begin{matrix} v+w \\ v_1+w_1 \end{matrix} \right\}$. Zum Beispiel sei

$$n=7,$$

dann ist für

$$\begin{aligned} t&=1;\; v+w=1+0 \\ p&=2;\; v_1+w_1=0+0 \\ t&=3;\; v+w=\frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ p&=4;\; v_1+w_1=0+0 \end{aligned}$$

$$t=5;\ v+w=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}$$
$$p=6;\ v_1+w_1=0+0$$
$$t=7;\ v+w=\frac{1}{7}+\frac{6}{7}$$

also

$$\Sigma\left\{\begin{matrix} v+w \\ v_1+w_1 \end{matrix}\right\}=2.$$

Es sei

$$n=8,$$

dann ist für

$$t=1;\ v+w=1+0$$
$$p=2;\ v_1+w_1=1+0$$
$$t=3;\ v+w=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$$
$$p=4;\ v_1+w_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
$$t=5;\ v+w=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}$$
$$p=6;\ v_1+w_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$$
$$t=7;\ v+w=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}$$
$$p=8;\ v_1+w_1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$

also

$$\Sigma\left\{\begin{matrix} v+w \\ v_1+w_1 \end{matrix}\right\}=4.$$

Es sei

$$n=9,$$

dann ist für

$$t=1;\ v+w=1+0$$
$$p=2;\ v_1+w_1=0+0$$
$$t=3;\ v+w=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$$
$$p=4;\ v_1+w_1=0+0$$

$$t=5;\ v+w=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}$$

$$p=6;\ v_1+w_1=0+0$$

$$t=7;\ v\ +w=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}$$

$$p=8;\ v_1+w_1=0+0$$

$$t=9;\ v\ +w=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}$$

also

$$\Sigma\left\{\begin{matrix} v+w \\ v_1+w_1 \end{matrix}\right\}=3$$

u. s. w.

Die Formel (9) enthält Summen von Cosinus, deren Bogen eine arithmetische Progression bilden. Nun ist aus der Goniometrie bekannt, dass die Summe der Reihe

$$(10)\qquad \cos a+\cos 2a+\cos 3a+\ldots+\cos ma$$

$$=\frac{\sin(m+\frac{1}{2})a-\sin\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a}$$

ist. Da aber diese Summenformel in dem Falle unbrauchbar erscheint, wo der Nenner zu Null wird, indem $\frac{1}{2}a$ ein ganzes Vielfaches von π wird, so lässt sie sich nicht in unsere Formel (9) substituiren, wie wir gleich näher sehen wollen. Setzt man in der Gleichung (10) $a=\frac{2n\pi}{t}$, und $m=\frac{t-1}{2}$, so wird

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{t-1}{2}}\cos\frac{2nh\pi}{t}=-\frac{1}{2}.$$

Wenn dagegen t in n aufgeht (oder gleich n ist), so erscheint Null im Nenner des Bruches (10), aber es sind dann alle Glieder der Summe gleich 1, also

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{t-1}{2}}\cos\frac{2nh\pi}{t}=\frac{t-1}{2}.$$

Setzt man in der Gleichung (10) $a=\frac{2n\pi}{p}$, und $m=\frac{1}{2}p-1$, so wird

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}p-1} \cos\frac{2nh\pi}{p} = -\frac{1}{2}(1+\cos n\pi)\,.$$

Diese Summe, wo p eine gerade Zahl bedeutet, hat also, wenn n eine ungerade Zahl ist, den Werth Null; wenn n eine gerade Zahl und nicht durch p theilbar ist, so ist diese Summe gleich -1. Ist dagegen n durch p theilbar (oder gleich p), so erscheint Null im Nenner des Bruches (10), aber es sind dann alle Glieder der Summe gleich 1, also

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}p-1} \cos\frac{2nh\pi}{p} = \frac{1}{2}p-1\,.$$

Man sieht, dass die in der Formel (9) vorkommenden Summen von Cosinus vielfacher Bogen immer rationale Werthe haben.

Beschränkt man die Formel (9) auf ungerade Zahlen n, wobei alle Primzahlen eingeschlossen bleiben (ausgenommen die Primzahl 2), so vereinfacht sich diese Formel. Nämlich das dritte Glied $\frac{1}{p}(1-(-1)^{n+1})$ wird, wenn n ungerade ist, zu Null. Auch das vierte Glied wird hier immer Null, wie wir eben gesehen haben. Demnach geht die Formel (9), wenn n ungerade ist, über in

$$\text{(11)} \qquad \sum_t \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t} \sum_{h=1}^{h=\frac{t-1}{2}} \cos\frac{2nh\pi}{t}\right)$$

wo t jede ungerade Zahl von 1 bis n (inclusive) bedeutet. Diese Formel (11) drückt die Anzahl der Divisoren für jede ungerade Zahl n aus.

Wird die Formel (11) gleich 2 gesetzt, so hat man die Gleichung der Primzahlen N

$$\text{(12)} \qquad \sum_t \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t} \sum_{h=1}^{h=\frac{t-1}{2}} \cos\frac{2Nh\pi}{t}\right) = 2$$

wo t jede ungerade Zahl von 1 bis N (inclusive) bedeutet. Diese Gleichung gilt, wie aus dem Anfange der Entwickelung erhellt, für alle Primzahlen N und nur für solche. Dabei sind die Primzahlen 1 und 2 ausgeschlossen, weil 1 die einzige Primzahl ist, die keine zwei Divisoren hat, und 2 die einzige gerade Primzahl ist. Man könnte die 2 noch in die Gleichung aufnehmen, aber es wäre unzweckmässig, wegen dieser einzigen Zahl der Gleichung noch einen Zusatz zu geben.

Die Gleichung (12) aller Primzahlen von 3 an, die wir kurz durch $\sum_t (v+w) = 2$ bezeichnen, zerlegt sich nun in folgende Eigenschaften:

(a) Für $t=1$ ist $v+w=1+0=1$.

(b) Für $t=N$ ist $v+w=\frac{1}{N}+\frac{2}{N}\cdot\frac{N-1}{2}=1$.

(c) Für alle übrigen ungeraden Werthe von t zwischen 1 und N ist

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{t-1}{2}} \cos\frac{2Nh\pi}{t}=-\frac{1}{2},$$

also

$$v+w=\frac{1}{t}+\frac{2}{t}\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Die erste und zweite dieser Eigenschaften findet nicht blos für Primzahlen N, sondern für alle ganzen Zahlen n Statt. Die dritte Eigenschaft ist für die Primzahlen charakteristisch. Also die Primzahlen N von 5 an sind dadurch ausgezeichnet, dass

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{t-1}{2}} \cos\frac{2Nh\pi}{t}$$

den Werth $-\frac{1}{2}$ hat, für jede ungerade ganze Zahl t zwischen 1 und N. Die Anzahl aller ungeraden Zahlen zwischen 1 und der ungeraden Zahl N beträgt $\frac{N-3}{2}$. Man kann also die Gleichung der Primzahlen N von 5 an auch in folgender Form schreiben:

$$\sum_{t}\sum_{h=1}^{h=\frac{t-1}{2}} \cos\frac{2Nh\pi}{t}=\frac{3-N}{4},$$

wo t jede ungerade Zahl zwischen 1 und N bedeutet.

Bemerkung. Ich halte mich verpflichtet zu bemerken, dass auch Herr Prof. Scherk in Crelle's Journal Thl. IX. S. 162. 1832. einen Aufsatz über die Lambert'sche Reihe und ihren Zusammenhang mit den Primzahlen geliefert hat. Mit diesem Aufsatze hat aber der obige Aufsatz nichts gemein, und sein Verdienst kann dadurch nicht geschmälert werden.

Der Herausgeber.

XXXI.

Ueber eine gewisse Gattung geometrischer Aufgaben über Maxima und Minima.

Von

Herrn Dr. Schell,

Privatdocenten an der Universität zu Marburg.

Viele geometrische Aufgaben verlangen, einen Punkt auf einem ebenen oder räumlichen Gebilde so zu bestimmen, dass eine von seiner Lage und anderen gegebenen Bedingungen abhängige Grösse ein Maximum oder Minimum werde. Für die Lösung derselben soll im Folgenden eine allgemeine Regel entwickelt werden, welche sie auf das Problem der Berührungen zurückführt. Um jedoch einen möglichst synthetischen Gang einzuhalten, beginnen wir mit einigen speciellen Fällen, durch deren Verallgemeinerung wir leicht zu jener Regel gelangen werden.

1. Das System zweier congruenter Kreisbogen ASB und $AS'B$ (Taf. X. Fig. 1.), welche sich in denselben zwei festen Punkten A und B endigen, bildet in der Ebene den geometrischen Ort der Scheitel S aller Winkel ASB von constanter Grösse, deren Schenkel durch die Punkte A und B gehen. Die constante Grösse dieser Winkel, die wir mit α bezeichnen wollen, ist gleich dem halben Winkel, unter welchem sich die Kreisbogen treffen, und hängt von der Länge dieser ab, so dass, wenn b die Länge eines von ihnen und r ihr gemeinsamer Radius ist, die Gleichung besteht

$$\alpha = \pi - \frac{b}{2r}.$$

2. Das System der beiden Bogen theilt die Ebene in zwei Räume, einen inneren von ihnen begrenzten und einen äusseren

unbegrenzten. Ersterer werde mit R, letzterer mit R' bezeichnet. Für alle Punkte S des inneren Raumes R ist $\angle ASB > \alpha$, für alle Punkte des äusseren Raumes R' aber $< \alpha$, und nur auf dem Umfange der Figur ist $\angle ASB = \alpha$. — Ziehen wir durch die Punkte A und B eine Grade, so ist insbesondere für alle Punkte S, welche auf derselben zwischen A und B liegen, $\angle ASB = \pi$, für alle Punkte S dieser Graden aber, welche ausserhalb dieser Strecke liegen, $= 0$; für einen Punkt S, welcher mit A oder B zusammenfällt, wird $\angle ASB = \alpha$.

3. Lässt man die Figur um die Grade AB rotiren, so entsteht eine Ringfläche (4ten Grades), welche gleichfalls die Eigenschaft hat, dass für jeden in ihr gelegenen Pnnkt S der Winkel ASB gleich α wird. Diese Fläche theilt den Raum in zwei Theile, einen inneren, von ihr umschlossenen und einen äusseren unbegrenzten. Ersterer werde wieder mit R, letzterer mit R' bezeichnet. Für alle Punkte S des inneren Raumes wird $\angle ASB > \alpha$, für alle Punkte S des äusseren $< \alpha$. Für die Punkte, welche auf der Graden AB liegen, gilt dasselbe, was unter 2. bemerkt wurde.

4. Berührt nun unser System zweier Kreisbogen oder überhaupt ein Kreis, welcher durch die beiden Punkte A und B geht, irgend eine in seiner Ebene liegende Curve in einem Punkte S (Taf. X. Fig. 2.) und gehören die zu beiden Seiten von S liegenden Nachbarpunkte der Curve ein und demselben Raume R oder R' an, so wird für diese Lage des Punktes S auf der Curve der Winkel ASB, dessen Schenkel durch die beiden festen Punkte A und B gehen, ein Maximum oder ein Minimum. Das erstere tritt ein, wenn die Nachbarpunkte von S dem inneren Raume R, das letztere, wenn sie dem äusseren Raume R' angehören. Ist nämlich S' ein solcher Nachbarpunkt, so ist zufolge 2. der Winkel $AS'B < ASB$, wenn S' dem Raume R' angehört, und $AS'B > ASB$, wenn S' in den Raum R fällt.

Ganz dasselbe gilt von der Ringfläche, wenn sie eine Curve oder eine Fläche in einem Punkte S berührt.

5. Wir erhalten daher folgende zwei Sätze, welche zur Aufsuchung der Punkte S auf Curven und Flächen, für welche der Winkel ASB ein Maximum oder Minimum wird, brauchbar sind:

I. Bewegt sich der Scheitel S eines Winkels ASB, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte A und B gehen, auf irgend einer mit A und B in derselben Ebene liegenden Curve, so kann der Winkel einen grössten oder kleinsten Werth erreichen, wenn er mit einem Punkte zusammentrifft, in welchem ein durch die Punkte A und B gelegter Kreis die Curve berührt, und zwar tritt das erstere ein, wenn die zu beiden Seiten von S gelegenen Nachbarpunkte der Curve dem äusseren Raume des Kreises angehören, das letztere dagegen, wenn sie in den inneren Raum desslben fallen.

II. Bewegt sich der Scheitel S eines Winkels

ASB, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte A und B gehen, auf irgend einer Curve oder Fläche im Raum, so kann der Winkel einen grössten oder kleinsten Werth erreichen, wenn er mit einem Punkte zusammentrifft, in welchem eine durch die Punkte A und B gehende Ringfläche, deren Axe die Grade AB ist, die Curve (oder Fläche) berührt, und zwar tritt das erstere ein, wenn die zu beiden Seiten von S liegenden Nachbarpunkte der Curve (oder die rings um S liegenden Nachbarpunkte der Fläche) in den äusseren, letzteres, wenn sie in den inneren Raum der Ringfläche fallen.

6. Schneidet die Grade AB die Curve oder die Fläche, auf welcher die Punkte S liegen, so liefern die Durchschnittspunkte absolute Maxima oder Minima für den Winkel ASB. Es ist nämlich für einen solchen die Grösse des Winkels π oder 0, je nachdem dieser Punkt zwischen A und B liegt oder nicht.

---

7. Wir wollen nun die Sätze I. und II. zur Lösung einiger Aufgaben benutzen.

I.

In einer Ebene sind gegeben eine Grade G und zwei Punkte A und B (Taf. X. Fig. 3), man sucht auf G die Punkte S, für welche der Winkel ASB ein Maximum oder Minimum wird.

Liegen A und B auf entgegengesetzten Seiten von G, so liefert der Durchschnittspunkt S dieser Graden mit der Graden AB ein absolutes Maximum $\angle ASB = \pi$. — Liegen aber A und B auf derselben Seite von G, so lege man durch diese Punkte die beiden die Grade G berührenden Kreise. Die Berührungspunkte S und S' liefern die Winkelmaxima ASB und $AS'B$. Es liegen nämlich die Nachbarpunkte von S und S' in den äusseren Räumen R der Kreise (s. oben 2.). Der Durchschnittspunkt S'' von G mit AB liefert das absolute Winkelminimum $AS''B=0$.

Die Punkte S und S' findet man, wenn man einen beliebigen Kreis durch A und B legt, an ihn von S'' aus eine Tangente $S''\sigma$ zieht und mit dieser Länge um denselben Punkt einen Kreis beschreibt. Die Durchschnitte desselben mit der Graden G sind alsdann die Punkte S, S'. Es muss nämlich zufolge der angegebenen Construction $\overline{S''S}^2 = \overline{S''S'}^2 = \overline{S''A}.\overline{S''B}$ sein, und da auch $\overline{S''\sigma}^2 = \overline{S''A}.\overline{S''B}$ ist, so wird $\overline{S''S} = \overline{S''S'} = \overline{S''\sigma}$.

Coroll. Die Punkte S, S' liegen auf der Graden G zu beiden Seiten von S'' und zwar in gleichem Abstande von diesem

Punkte. Da nun die Construction von der Neigung der Graden G gegen AB unabhängig ist, so folgt, dass die Punkte der Winkelmaxima für alle Graden, welche durch den Punkt S'' gezogen werden können, in einem um S'' beschriebenen Kreise liegen, dessen Radius das geometrische Mittel aus den Segmenten $S''A$, $S''B$ ist. Ist C der Mittelpunkt eines Stralenbüschels, so liegen auf jedem Stral desselben zwei Punkte des Winkelmaximums. Die Gesammtheit aller dieser Punkte bildet eine Curve vierten Grades, welche in einen Kreis übergeht, sobald der Mittelpunkt des Stralenbüschels in die Grade AB, aber nicht zwischen A und B fällt. Die Punkte A, B, C gehören der Curve an.

II.

In einer Ebene sind gegeben ein Kreis K und zwei Punkte A und B, man sucht auf dem Umfange des Kreises die Punkte S, für welche der Winkel ASB ein Maximum oder Minimum wird.

Liegen beide Punkte ausserhalb des Kreises (Taf. X. Fig. 4.), so sind nach dem Obigen die gesuchten Punkte die Berührungspunkte S, S' zweier durch A und B gehender Kreise mit K. Von diesen Kreisen berührt, falls die Linie AB den Kreis K nicht schneidet, der eine K von aussen, der andere umschliesst K; der Berührungspunkt S des ersteren liefert daher ein Winkelmaximum ASB, der Berührungspunkt S' des zweiten ein Winkelminimum $AS'B$. Schneidet aber die Linie AB den Kreis K in den beiden Punkten D, D', so berühren beide Kreise K von aussen und ihre Berührungspunkte liefern zwei Winkelmaxima, die Punkte D, D' aber zwei Minima, nämlich Null. Berührt die Grade AB den Kreis K, fallen also die Punkte D, D' in einen einzigen zusammen, so geht der eine der beiden von aussen berührenden Kreise in die Grade AB selbst über, welche in diesem Falle als ein Kreis zu betrachten ist, welcher K umschliesst.

Liegt der Punkt A ausserhalb, B innerhalb K, so sind keine berührenden Kreise möglich, aber von den Durchschnittspunkten D, D' der Graden AB mit K liefert der auf der Strecke AB liegende ein Winkelmaximum π, der andere ein Winkelminimum Null.

Liegen beide Punkte A und B innerhalb K, so erhält man vier Minima, zwei liefern die beiden durch A und B gehenden K berührenden Kreise, die beiden andern die Durchschnitte D, D', der Graden AB mit K.

Die Berührungspunkte S, S' zweier Kreise, welche durch A und B gehen, mit einem dritten Kreise K findet man leicht, wenn man bedenkt, dass die gemeinschaftlichen Sehnen aller Kreise, welche durch A und B gehen und K schneiden, durch einen festen Punkt F der Linie AB gehen. Legt man also von

diesem Punkte an K die beiden Tangenten, so sind deren Berührungspunkte die Punkte S, S'.

III.

Es seien gegeben eine Ebene E und zwei Punkte A und B, man sucht in der Ebene E die Punkte S, für welche der Winkel ASB ein Maximum oder Minimum wird.

Liegen A und B auf derselben Seite von E, so sind dem Obigen zufolge die gesuchten Punkte die Berührungspunkte von Ringflächen, welche durch A und B gehen und die Grade AB zur Rotationsaxe haben, mit der Ebene E. In diesen Punkten haben die Ringflächen und die Ebene gemeinschaftliche Normalen. Nun schneiden alle Normalen einer Rotationsfläche die Axe; es können daher die gesuchten Punkte der Ebene E nur solche sein, in denen die Normale der Ebene die Linie AB trifft. Alle solche Punkte liegen aber in der Durchschnittslinie G einer durch AB zu E senkrecht gelegten Ebene. Hiedurch ist die Aufgabe auf I. zurückgeführt und man hat nur nöthig durch A und B zwei die Grade G berührende Kreise zu legen; ihre Berührungspunkte S, S' sind die gesuchten Punkte. Beide Winkel ASB und $AS'B$ werden ein Maximum, da die Nachbarpunkte ihrer Scheitel den äusseren Räumen der Ringflächen angehören. Die Punkte S, S' liegen auf entgegengesetzten Seiten des Durchschnittspunktes D der Linie AB mit der Ebene E und stehen von D gleichweit ab.

Liegen A und B auf entgegengesetzten Seiten von E, so liefert der Durchschnitt der Graden AB mit E ein Winkelmaximum π.

Coroll. Dreht sich die Ebene E um eine durch D gehende Grade um, so ist der Ort aller Graden G eine Kegelfläche zweiten Grades, auf welcher die Punkte S, S' einen sphärischen Kegelschnitt zeichnen. Dreht sich die Ebene E um irgend eine nicht durch D gehende Axe, so ist der Ort der Graden G ein einfaches Hyperboloid *).

IV.

Es sei gegeben eine Kugelfläche K und zwei Punkte A und B, man sucht auf K die Punkte S, für welche der Winkel ASB ein Maximum oder Minimum wird.

---

*) S. Chasles, Analogie entre les propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions im Journal des mathem. T. I. p. 324.

Liegen beide Punkte im inneren oder im äusseren Raum der Kugelfläche, so sind dem Obigen zufolge die Punkte S Berührungspunkte zweier Ringflächen, welche durch A und B gehen und AB zur Axe haben, mit der Kugel In diesen Punkten müssen nun die Ringflächen mit der Kugel gemeinschaftliche Normalen besitzen. Die Normalen der Ringflächen schneiden aber die Axe AB und die Normalen der Kugel gehen durch deren Mittelpunkt. Die gemeinschaftlichen Normalen liegen also in einer durch die Axe AB und den Kugelmittelpunkt gelegten Ebene; daher können die Punkte S nur auf dem Umfange desjenigen grössten Kreises liegen, in welchem diese Ebene die Kugel schneidet. Hiedurch ist diese Aufgabe auf die Aufgabe II. zurückgeführt.

Liegen beide Punkte A, B ausserhalb der Kugel, so erhält man, jenachdem die Grade AB dieselbe schneidet oder nicht schneidet, zwei Winkelmaxima oder ein Maximum und ein Minimum.

Liegen beide Punkte innerhalb der Kugel, so erhält man zwei Minima. Für die Durchschnitte der Graden AB mit der Kugel gilt dasselbe, wie oben unter II.

Liegen A, B auf einem Durchmesser der Kugel, so genügen alle Punkte eines gewissen Sphärenkreises der Aufgabe, dessen Ebene senkrecht auf AB steht.

---

8. Bei den im Vorstehenden behandelten Aufgaben hing die Grösse des Winkels ASB ab

1. von der Natur des Gebildes G, auf welchem der Scheitel S lag;

2. von der Lage der beiden Punkte A und B gegen einander und gegen G; es sollte der Scheitel S gefunden werden, so dass der Winkel ASB unter diesen unveränderlichen Bedingungen einen grössten oder kleinsten Werth annehme. Wir lösten diese Aufgaben dadurch, dass wir

1. den Ort der Scheitel S suchten, für welche ASB einen constanten Werth α annahm und dann

2. diesen Constanten solche Werthe beilegten, für welche der Ort das Gebilde G berührt.

Es war alsdann die Möglichkeit vorhanden, dass die Berührungspunkte ein Maximum oder Minimum des Winkels ASB lieferten. Damit dies wirklich eintrete, war erforderlich, dass die zu beiden Seiten eines solchen Berührungspunktes resp. rings um ihn liegenden Nachbarpunkte des Gebildes G gleichzeitig entweder in den inneren oder äusseren Raum des Ortes fielen, in

welche der unendliche Raum durch denselben getheilt wird. War diese Bedingung erfüllt, so hing die Entscheidung, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliege, nur davon ab, in welchem dieser Räume die Nachbarpunkte gelegen waren.

Es ist nun leicht, diese Betrachtungen dahin zu verallgemeinern, dass an die Stelle des Winkels ASB eine beliebige geometrische Grösse tritt. Zu dem Ende möge folgende umfassendere Aufgabe gestellt werden:

Es sei gegeben ein geometrisches (lineäres oder Flächen-) Gebilde G und irgend welche andere Gebilde, welche eine feste Lage gegen G haben. Man soll die Punkte S auf G finden, für welche eine geometrische Grösse u, die von der Lage des Punktes S und den übrigen Gebilden abhängt, ein Maximum oder Minimum werde.

Zur Lösung dieser Aufgabe führen folgende Betrachtungen. Sucht man den Ort aller Punkte S, für welche die Grösse u einen constanten Werth k annimmt, so theilt dieser Ort den Raum in zwei Theile R, R', von denen der eine (R) alle Punkte S, für welche $u > k$, der andere aber alle die Punkte S enthält, für welche $u < k$ wird, während auf dem Orte selbst $u = k$ ist. Berührt nun ein solcher Ort $u = k$ das Gebilde G, so können die Berührungspunkte solche sein, die der Aufgabe entsprechen. Sie sind es allemal dann, wenn ihre Nachbarpunkte alle in den Raum R, oder alle in den Raum R' fallen. Im ersten Falle wird u ein Minimum, im zweiten ein Maximum.

9. Um die Anwendung dieser Methode noch an einem einfachen Beispiel zu zeigen, werde folgende allbekannte Aufgabe nach ihr gelöst.

Auf einer Graden G einen Punkt S so zu bestimmen, das die Summe der von ihm nach zwei festen Punkten A, B gezogenen Stralen ein Minimum werde. (Taf. X. Fig. 5).

Hier ist $u = \overline{SA} + \overline{SB}$ und der Ort $u = k$ eine Ellipse, deren Brennpunkte A und B sind. Der Punkt S ist also der Berührungspunkt einer Ellipse mit der Graden G, die A und B zu Brennpunkten hat.

Ist D der Durchschnitt von G mit der Graden AB und N der Durchschnitt der in N errichteten Normalen, so sind A, B, D, N vier harmonische Punkte. Sobald N gefunden, liefert ein Perpendikel aus diesem Punkte auf G den Punkt S.

XXXII.

Ueber eine vorzüglich zur Anwendung bei geodätischen Messungen geeignete Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite.

Von

dem Herausgeber.

In meiner früher erschienenen Schrift:

Versuch einer neuen Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite bei geodätischen Messungen. Von Johann August Grunert. Leipzig. 1844.

habe ich eine Methode zur Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite empfohlen und ausführlich theoretisch entwickelt, welche, mit völliger Beiseitesetzung einer Uhr und eines genauen Höhenkreises am Theodoliten, bloss die Anwendung eines vorzugsweise zur Messung von Horizontalwinkeln geeigneten Theodoliten in Anspruch nimmt, wie er sich in der Hand eines jeden Geodäten befindet oder wenigstens befinden sollte. Diese Methode besteht darin, dass man sich drei ihren Positionen auf der Sphäre nach genau bekannte Sterne aussucht, die zu der Zeit, wo man die Beobachtung anzustellen beabsichtigt, bald nach einander gleiche Höhen erreichen, wobei man sich, anderer Mittel nicht zu gedenken, zweckmässig eines Himmelsglobus bedienen kann. Indem man nun das Fernrohr des Theodoliten in einer dieser Höhe ungefähr entsprechenden Höhe am Höhenkreise des Theodoliten unveränderlich feststellt, fasst man jene drei Sterne nach einander, wenn sie die Höhe, in welcher das Fernrohr festgestellt worden ist, erreichen, in den Mittelpunkt des Fadenkreu-

zes, was leicht durch sanfte Fortbewegung des am Höhenkreise festgestellten Fernrohrs mittelst der Mikrometerschraube am Horizontal- oder Azimuthal-Kreise des Theodoliten geschehen kann, und misst auf dem letzteren Kreise die den in Rede stehenden drei gleichen Höhen der drei Sterne entsprechenden beiden Azimuthaldifferenzen derselben. Dann hat man alle Data, welche zur Bestimmung der Polhöhe, und ausserdem noch anderer astronomischer Elemente, erforderlich sind. Ob diese in ihrem Princip und ihrer Anwendung einfache Methode, die nur den Gebrauch des in der Hand jedes Geodäten befindlichen Azimuthal-Theodoliten voraussetzt, schon praktische Anwendung gefunden hat, weiss ich nicht; dass sie bei grösseren Messungen in Chile von dem eine Auswanderungsgesellschaft dorthin begleitenden Geometer angewandt werden sollte, ist mir geschrieben worden; ob dies aber wirklich geschehen ist, darüber bin ich gleichfalls noch in Ungewissheit. Um die Methode wieder in Erinnerung zu bringen, da sie sich namentlich auch zum Gebrauche für Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten eignen dürfte, die jetzt öfters im Besitz guter vorzugsweise zur Messung von Horizontalwinkeln geeigneter Theodoliten, aber nicht zugleich im Besitz guter Uhren sind, so will ich hier eine von der in der oben erwähnten Schrift gegebenen verschiedene analytische Auflösung des dieser Methode zum Grunde liegenden astronomischen Problems geben, indem ich mich rücksichtlich der weitern Betrachtungen über die Genauigkeit der Methode, über verschiedene bei deren Anwendung zu beobachtende Vorsichtsmassregeln, u. s. w. auf die obige Schrift beziehen muss.

Wir wollen den Mittelpunkt der Sphäre, d. h., weil wir es hier bloss mit den Fixsternen zu thun haben, das Auge des Beobachters, als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz annehmen. Vom Anfange der Coordinaten an sei der positive Theil der Axe der x nach dem Nullpunkte der Azimuthe, der positive Theil der Axe der y nach dem neunzigsten Grade der Azimuthe, der positive Theil der Axe der z nach dem Zenith des Beobachters hin gerichtet, so dass also die Ebene des Horizonts die Ebene der xy ist.

Die durch die als bekannt vorausgesetzten Declinationen der drei Sterne unmittelbar gegebenen Polardistanzen derselben seien $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}'$, $\overline{\omega}''$; die Azimuthe, in denen sie beobachtet worden sind, seien ω, ω', ω''; ihre gleichen Höhen seien h, h, h; und φ, ψ, χ seien die drei 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der über dem Horizonte liegende Theil der Weltaxe mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst.

Dies vorausgesetzt, haben wir nach bekannten Lehren der analytischen Geometrie offenbar die drei folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \cos\overline{\omega} = \cos\omega\cos h\cos\varphi + \sin\omega\cos h\cos\psi + \sin h\cos\chi, \\ \cos\overline{\omega}' = \cos\omega'\cos h\cos\varphi + \sin\omega'\cos h\cos\psi + \sin h\cos\chi, \\ \cos\overline{\omega}'' = \cos\omega''\cos h\cos\varphi + \sin\omega''\cos h\cos\psi + \sin h\cos\chi; \end{cases}$$

zu denen dann noch die bekannte Gleichung

$$2)\qquad \cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1$$

kommt.

Da es nun hier ganz willkührlich ist, von welchem Punkte an die Azimuthe gezählt werden, und die Beobachtungen die Azimuthaldifferenzen zwischen der ersten und zweiten und zwischen der zweiten und dritten Beobachtung liefern, so können offenbar die drei Azimuthe ω, ω', ω'' als bekannt angesehen werden, und die obigen vier Gleichungen reichen daher zur Bestimmung der vier unbekannten Grössen h, φ, ψ, χ gerade hin.

Aus den drei Gleichungen 1) folgt durch Subtraction:

$$\cos\bar{\omega}-\cos\bar{\omega}'=(\cos\omega-\cos\omega')\cos h\cos\varphi+(\sin\omega-\sin\omega')\cos h\cos\psi,$$

$$\cos\bar{\omega}'-\cos\bar{\omega}''=(\cos\omega'-\cos\omega'')\cos h\cos\varphi+(\sin\omega'-\sin\omega'')\cos h\cos\psi;$$

also

$$(\sin\omega'-\sin\omega'')(\cos\bar{\omega}-\cos\bar{\omega}')-(\sin\omega-\sin\omega')(\cos\bar{\omega}'-\cos\bar{\omega}'')$$
$$=\{(\cos\omega-\cos\omega')(\sin\omega'-\sin\omega'')-(\cos\omega'-\cos\omega'')(\sin\omega-\sin\omega')\}\cos h\cos\varphi,$$

$$(\cos\omega'-\cos\omega'')(\cos\bar{\omega}-\cos\bar{\omega}')-(\cos\omega-\cos\omega')(\cos\bar{\omega}'-\cos\bar{\omega}'')$$
$$=-\{(\cos\omega-\cos\omega')(\sin\omega'-\sin\omega'')-(\cos\omega'-\cos\omega'')(\sin\omega-\sin\omega')\}\cos h\cos\psi.$$

Es ist aber:

$$(\cos\omega-\cos\omega')(\sin\omega'-\sin\omega'')-(\cos\omega'-\cos\omega'')(\sin\omega-\sin\omega')$$
$$=-\sin(\omega-\omega')-\sin(\omega'-\omega'')-\sin(\omega''-\omega)$$
$$=-2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'')\cos\tfrac{1}{2}(\omega-2\omega'+\omega'')-2\sin\tfrac{1}{2}(\omega''-\omega)\cos\tfrac{1}{2}(\omega''-\omega)$$
$$=\quad 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega''-\omega)\{\cos\tfrac{1}{2}(\omega-2\omega'+\omega'')-\cos\tfrac{1}{2}(\omega''-\omega)\}$$
$$=\quad 4\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega'')\sin\tfrac{1}{2}(\omega''-\omega);$$

ferner

$$(\sin\omega' - \sin\omega'')(\cos\varpi - \cos\varpi') - (\sin\omega - \sin\omega')(\cos\varpi' - \cos\varpi'')$$
$$= (\sin\omega' - \sin\omega'')\cos\varpi + (\sin\omega'' - \sin\omega)\cos\varpi' + (\sin\omega - \sin\omega')\cos\varpi''$$
$$= -(\cos\varpi' - \cos\varpi'')\sin\omega - (\cos\varpi'' - \cos\varpi)\sin\omega' - (\cos\varpi - \cos\varpi')\sin\omega''$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega'')\cos\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega'')\cos\varpi$$
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'' - \omega)\cos\tfrac{1}{2}(\omega'' + \omega)\cos\varpi'$$
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\varpi''$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\varpi' - \varpi'')\sin\tfrac{1}{2}(\varpi' + \varpi'')\sin\omega$$
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2}(\varpi'' - \varpi)\sin\tfrac{1}{2}(\varpi'' + \varpi)\sin\omega'$$
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2}(\varpi - \varpi')\sin\tfrac{1}{2}(\varpi + \varpi')\sin\omega'',$$

und ganz ebenso:

$$(\cos\omega' - \cos\omega'')(\cos\varpi - \cos\varpi') - (\cos\omega - \cos\omega')(\cos\varpi' - \cos\varpi'')$$
$$= (\cos\omega' - \cos\omega'')\cos\varpi + (\cos\omega'' - \cos\omega)\cos\varpi' + (\cos\omega - \cos\omega')\cos\varpi''$$
$$= -(\cos\varpi' - \cos\varpi'')\cos\omega - (\cos\varpi'' - \cos\varpi)\cos\omega' - (\cos\varpi - \cos\varpi')\cos\omega''$$
$$= -2\sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega'')\sin\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega'')\cos\varpi$$
$$- 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega'' - \omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega'' + \omega)\cos\varpi'$$
$$- 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\varpi''$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\varpi' - \varpi'')\sin\tfrac{1}{2}(\varpi' + \varpi'')\cos\omega$$
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2}(\varpi'' - \varpi)\sin\tfrac{1}{2}(\varpi'' + \varpi)\cos\omega'$$
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2}(\varpi - \varpi')\sin\tfrac{1}{2}(\varpi + \varpi')\cos\omega''.$$

Setzen wir also der Kürze wegen:

$$3)\qquad M = \sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega'')\cos\tfrac{1}{2}(\omega' + \omega'')\cos\varpi$$
$$+ \sin\tfrac{1}{2}(\omega'' - \omega)\cos\tfrac{1}{2}(\omega'' + \omega)\cos\varpi'$$
$$+ \sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\varpi''$$

$$= \sin\frac{1}{2}(\bar\omega'-\bar\omega'')\sin\frac{1}{2}(\bar\omega'+\bar\omega'')\sin\omega$$

$$+\sin\frac{1}{2}(\bar\omega''-\bar\omega)\sin\frac{1}{2}(\bar\omega''+\bar\omega)\sin\omega'$$

$$+\sin\frac{1}{2}(\bar\omega-\bar\omega')\sin\frac{1}{2}(\bar\omega+\bar\omega')\sin\omega'',$$

4) $$M'= \sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega'')\cos\bar\omega$$

$$+\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)\sin\frac{1}{2}(\omega''+\omega)\cos\bar\omega'$$

$$+\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\bar\omega''$$

$$=-\sin\frac{1}{2}(\bar\omega'-\bar\omega'')\sin\frac{1}{2}(\bar\omega'+\bar\omega'')\cos\omega$$

$$-\sin\frac{1}{2}(\bar\omega''-\bar\omega)\sin\frac{1}{2}(\bar\omega''+\bar\omega)\cos\omega'$$

$$-\sin\frac{1}{2}(\bar\omega-\bar\omega')\sin\frac{1}{2}(\bar\omega+\bar\omega')\cos\omega'',$$

5) $$N=-\frac{1}{2}\{\sin(\omega-\omega')+\sin(\omega'-\omega'')+\sin(\omega''-\omega)\}$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega);$$

so haben wir nach dem Obigen die zwei folgenden Gleichungen:

6) $$\begin{cases} M=N\cos h\cos\varphi, \\ M'=N\cos h\cos\psi; \end{cases}$$

aus denen die Producte $\cos h\cos\varphi$ und $\cos h\cos\psi$ gefunden werden können.

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$\sin h\cos\chi=\cos\bar\omega-\cos\omega\cos h\cos\varphi-\sin\omega\cos h\cos\psi,$$

also

$$\sin h\cos\chi=\cos\bar\omega-\frac{M}{N}\cos\omega-\frac{M'}{N}\sin\omega$$

oder

$$N\sin h\cos\chi=N\cos\bar\omega-M\cos\omega-M'\sin\omega$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)\cos\varpi$$

$$-\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')\cos\frac{1}{2}(\omega'+\omega'')\cos\varpi\\ +\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega''+\omega)\cos\varpi'\\ +\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varpi''\end{array}\right\}\cos\omega$$

$$-\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega'')\cos\varpi\\ +\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)\sin\frac{1}{2}(\omega''+\omega)\cos\varpi'\\ +\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varpi''\end{array}\right\}\sin\omega$$

$$= \sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')\left\{\begin{array}{l}2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega).\\ -\cos(\omega-\frac{1}{2}(\omega'+\omega''))\end{array}\right\}\cos\varpi$$

$$-\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega''-\omega)\cos\varpi'$$

$$-\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\varpi'',$$

und weil nun

$$2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)-\cos(\omega-\frac{1}{2}(\omega'+\omega''))$$

$$=2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)-\cos(\frac{1}{2}(\omega-\omega')-\frac{1}{2}(\omega''-\omega))$$

$$=\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)-\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\frac{1}{2}(\omega''-\omega)$$

$$=-\cos\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')$$

ist, so ist

$$N\sin h\cos\chi=-\sin\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')\cos\frac{1}{2}(\omega'-\omega'')\cos\varpi$$

$$-\sin\frac{1}{2}(\omega''-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega''-\omega)\cos\varpi'$$

$$-\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\varpi''.$$

Setzen wir also

$$7)\quad M''=-\frac{1}{2}\{\sin(\omega'-\omega'')\cos\bar{\omega}+\sin(\omega''-\omega)\cos\bar{\omega}'+\sin(\omega-\omega')\cos\bar{\omega}''\},$$

so ist

$$8)\qquad M''=N\sin h\cos\chi,$$

mittelst welcher Gleichung das Product $\sin h\cos\chi$ gefunden werden kann.

Wir haben jetzt also die drei folgenden Gleichungen:

$$9)\qquad \begin{cases} M=N\cos h\cos\varphi, \\ M'=N\cos h\cos\psi, \\ M''=N\sin h\cos\chi; \end{cases}$$

aus denen sich

$$10)\qquad \cos\varphi=\frac{M}{N\cos h},\quad \cos\psi=\frac{M'}{N\cos h},\quad \cos\chi=\frac{M''}{N\sin h};$$

also wegen der Gleichung 2) die Gleichung

$$11)\qquad \frac{M^2+M'^2}{N^2\cos h^2}+\frac{M''^2}{N^2\sin h^2}=1$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die absoluten Werthe ven M'' und N durch (M'') und (N), so können wir vermöge der vorhergehenden Gleichung, wenn u einen zwischen 0 und 90° liegenden Winkel bezeichnet, so dass

$$0<u<90^0$$

ist,

$$12)\qquad \cos u=\frac{\sqrt{M^2+M'^2}}{(N)\cos h},\quad \sin u=\frac{(M'')}{(N)\sin h},$$

also

$$\cos h\cos u=\frac{\sqrt{M^2+M'^2}}{(N)},\quad \sin h\sin u=\frac{(M'')}{(N)}$$

setzen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Addition und Subtraction:

$$13)\quad \begin{cases} \cos(h-u)=\dfrac{\sqrt{M^2+M'^2}+(M'')}{(N)}, \\ \cos(h+u)=\dfrac{\sqrt{M^2+M'^2}-(M'')}{(N)}; \end{cases}$$

oder auch, wenn (M) noch den absoluten Werth von M bezeichnet:

$$14)\quad \begin{cases} \cos(h-u)=\dfrac{(M)}{(N)}\left\{\sqrt{1+\left(\dfrac{M'}{M}\right)^2}+\dfrac{(M'')}{(M)}\right\}, \\ \cos(h+u)=\dfrac{(M)}{(N)}\left\{\sqrt{1+\left(\dfrac{M'}{M}\right)^2}-\dfrac{(M'')}{(M)}\right\}; \end{cases}$$

und hat man mittelst dieser Gleichungen $h-u$ und $h+u$ gefunden, so erhält man auch leicht:

$$15)\quad h=\frac{1}{2}(h+u)+\frac{1}{2}(h-u),\; u=\frac{1}{2}(h+u)-\frac{1}{2}(h-u).$$

Es sind hierbei aber nun noch die folgenden Bemerkungen zu machen.

Weil

$$0<h<90^0,\; 0<u<90^0$$

ist, so ist offenbar

$$-90^0<h-u<+90^0,$$
$$0<h+u<180^0.$$

Ist nun θ der zwischen 0 und 90^0 liegende Werth von $h-u$, welcher der Gleichung

$$\cos(h-u)=\frac{\sqrt{M^2+M'^2}+(M'')}{(N)}$$

genügt, so ist

$$h-u=\pm\theta.$$

Und ist θ_1 der eine zwischen 0 und 180^0 liegende Werth von $h+u$, welcher der Gleichung

$$\cos(h+u)=\frac{\sqrt{M^2+M'^2}-(M'')}{(N)}$$

genügt, so ist

$$h+u=\theta_1.$$

Durch Verbindung der Gleichungen

$$h-u=\pm\theta,\ h+u=\theta_1$$

mittelst Addition erhält man:

$$2h=\theta_1\pm\theta,\ \text{also}\ h=\frac{\theta_1\pm\theta}{2}.$$

Ist nun

$$0<\theta_1<90^0,$$

so ist, weil offenbar $\theta<\theta_1$ ist:

$$0<\frac{\theta_1\pm\theta}{2}<90^0,$$

und es giebt also für h zwei Werthe, nämlich

$$h=\frac{\theta_1\pm\theta}{2}.$$

Ist dagegen

$$90^0<\theta_1<180^0,$$

so ist immer

$$\theta>\theta_1-180^0,$$

weil θ positiv, θ_1-180^0 negativ ist; also ist immer:

$$\theta_1-\theta<180^0,$$

und folglich, weil $\theta_1-\theta$ auch positiv ist:

$$0<\frac{\theta_1-\theta}{2}<90^0,$$

daher immer

$$h=\frac{\theta_1-\theta}{2}.$$

Der Werth

$$h=\frac{\theta_1+\theta}{2}$$

ist aber in diesem Falle nur dann zulässig, wenn

$$0 < \frac{\theta_1 + \theta}{2} < 90^\circ$$

st.

Wenn es zwei Werthe von h giebt, so wird man aus den Beobachtungen selbst den Werth von h doch gewiss immer so nahe kennen, dass kein Zweifel bleiben kann, welchen der beiden Werthe von h man in dem vorliegenden Falle zu nehmen hat.

Bezeichnen wir nun die Polhöhe durch Φ, und den Winkel, welchen die Projection der von dem Anfange der Coordinaten oder dem Auge nach dem Pol gezogenen Linie auf der Ebene des Horizonts mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° zählt, durch Ω; so hat man offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\cos\varphi = \cos\Omega\cos\Phi,$$

$$\cos\psi = \sin\Omega\cos\Phi,$$

$$\cos\chi = \sin\Phi;$$

also nach 9):

$$\cos\Omega\cos\Phi = \frac{M}{N\cos h},$$

$$\sin\Omega\cos\Phi = \frac{M'}{N\cos h},$$

$$\sin\Phi = \frac{M''}{N\sin h};$$

aus denen sich

$$16)\quad \sin\Phi = \frac{M''}{N\sin h},\quad \sin\Omega = \frac{M'}{N\cos h\cos\Phi},\quad \cos\Omega = \frac{M}{N\cos h\cos\Phi}$$

oder auch

$$17)\quad \sin\Phi = \frac{M''}{N\sin h},\quad \tang\Omega = \frac{M'}{M}$$

ergiebt, mittelst welcher Formeln man, nachdem man h gefunden, Φ und Ω immer ohne alle Zweideutigkeit bestimmen kann.

Durch den Winkel Ω wird offenbar die Lage der Mittagslinie gegen den positiven Theil der Axe der x bestimmt, und da man ω, ω', ω'' kennt, so wird man nun auch leicht die wirklichen Azimuthe der drei Sterne zu den Zeiten der drei Beobachtungen, d. h. ihre Azimuthe in Bezug auf den Südpunkt als Anfang der Azimuthe bestimmen können. Dann werden sich

aber aus den bekannten Azimuthen und Declinationen der drei Sterne und der Polhöhe auch leicht ihre Stundenwinkel zu den Zeiten der drei Beobachtungen berechnen lassen, und kennt man nun noch die Rectascensionen der drei Sterne, so lassen sich auch auf bekannte Weise die den Momenten der drei Beobachtungen entsprechenden Sternzeiten bestimmen, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Man braucht bei dieser Methode zur Bestimmung der Polhöhe nicht einmal im Besitze eines Theodoliten zu sein. Ein Reissbrett, das sich durch drei Stellschrauben horizontal stellen lässt, und eine Kippregel, wie man sie bei den Messungen mit dem Messtische gebraucht, überhaupt ein Fernrohr, das sich über der Schärfe eines Lineals in einer Vertikalebene bewegen, und mittelst einer Schraube in verschiedenen Höhen feststellen lässt, können schon ausreichen. Man stellt das Reissbrett horizontal, legt die Kippregel, an welcher man das Fernrohr in einer gewissen Höhe unveränderlich befestigt hat, darauf, bringt durch Verschiebung des Lineals der Kippregel auf dem Reissbrett nach und nach den ersten, zweiten und dritten Stern in den Mittelpunkt des Fadenkreuzes, und zieht jedesmal an der Schärfe des Lineals auf dem Reissbrett, dessen Lage natürlich nicht verrückt werden darf, mit einem etwas harten Bleistifte eine feine Linie. Dann sind die von der ersten und zweiten, zweiten und dritten Linie eingeschlossenen Winkel die beiden Azimuthaldifferenzen der drei Sterne, die man dann durch hinreichend bekannte graphische Methoden, etwa mit Hülfe eines genauen tausendtheiligen Maassstabes, genau messen, und daraus die Polhöhe, die Lage der Mittagslinie und die Zeit nach der im Obigen gegebenen Anweisung berechnen kann. Es scheint wir wünschenswerth, dass Liebhaber astronomischer Beobachtungen, die sich nur den vorher erwähnten äusserst geringen Instrumenten-Apparat anzuschaffen im Stande sind, sich der im Vorhergehenden entwickelten Methode zur Bestimmung der Polhöhe, des Meridians und der Sternzeit bedienen möchten, und auch Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten dürften dieselbe zu zweckmässigen Uebungen vorgerückterer und für solche Dinge sich interessirender Schüler sowohl im Beobachten, als auch im Rechnen, benutzen können, namentlich auf Lehranstalten wie die höheren Bürger- und Realschulen, welche das Hauptmittel der Bildung ihrer Schüler mit Recht in der Mathematik suchen und suchen müssen.

Noch will ich bemerken, dass sich die Formeln 13) auf folgende Art durch Einführung einiger Hülfswinkel zur logarithmischen Rechnung bequem einrichten lassen. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich auf der Stelle, dass die positiven Grössen

$$\frac{\sqrt{M^2+M'^2}}{(N)} \text{ und } \frac{(M'')}{(N)}$$

beide kleiner als die Einheit sind, so dass wir also

$$\cos G = \frac{\sqrt{M^2 + M'^2}}{(N)} = \frac{(M)}{(N)} \sqrt{1 + \left(\frac{M'}{M}\right)^2},$$

$$\cos H = \frac{(M'')}{(N)}$$

setzen können. Setzen wir dann noch

$$\tang F = \frac{M'}{M}$$

und nehmen F zwischen -90^0 und $+90^0$; so haben wir zur Berechnung der Hülfswinkel F, G, H die folgenden Formeln:

$$18) \qquad \tang F = \frac{M'}{M}, \quad \cos G = \frac{(M)}{(N)} \sec F, \quad \cos H = \frac{(M'')}{(N)};$$

und zur Bestimmung von $h-u$ und $h+u$ die Ausdrücke:

$$\cos(h-u) = \cos G + \cos H,$$

$$\cos(h+u) = \cos G - \cos H;$$

also die Formeln:

$$19) \quad \begin{cases} \cos(h-u) = \quad 2\cos\frac{1}{2}(G+H)\cos\frac{1}{2}(G-H), \\ \cos(h+u) = -2\sin\frac{1}{2}(G+H)\sin\frac{1}{2}(G-H); \end{cases}$$

welche zur Rechnung mit Logarithmen sehr bequem sind

XXXIII.

Problemata quaedam geometrica.

Auctore

Christiano Fr. Lindman,

Lectore Strengnes.

1.

Sectione conica data una cum puncto quodam in plano ejus sito, per quod punctum ductae rectae sectionem conicam secent; invenire locum geometricum punctorum, ubi eae rectarum partes, quae intra sectionem conicam sint, in duas partes aequales dividantur.

Notissima est aequatio

$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad (1)$$

in qua sectiones conicae omnes continentur, si axis abscissarum est axis per verticem transiens et origo in vertice jacet. Sit α $=$abscissae, $\beta=$ordinatae puncti dati et $\varphi=$angulo, quem recta per punctum datum transiens cum axi abscissarum constituit: aequatio rectae cujusvis per punctum datum ductae erit

$$y-\beta=(x-\alpha)\operatorname{tg}\varphi \qquad (2).$$

Ex his aequationibus inveniuntur coordinatae ($=x_1$, y_1; x_{11}, y_{11}) punctorum, ubi recta (2) sectionem conicam (1) secet. Si enim posuerimus

$$R=\sqrt{p^2-2p(\beta-\alpha\operatorname{tg}\varphi)\operatorname{tg}\varphi+q(\beta-\alpha\operatorname{tg}\varphi)^2},$$

eliminando habebimus:

$$x_1 = \frac{p-(\beta-\alpha \operatorname{tg}\varphi)\operatorname{tg}\varphi + R}{\operatorname{tg}^2\varphi - q},$$

$$y_1 = \frac{p \operatorname{tg}\varphi - q(\beta-\alpha \operatorname{tg}\varphi) + R \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi - q};$$

$$x_{11} = \frac{p-(\beta-\alpha \operatorname{tg}\varphi)\operatorname{tg}\varphi - R}{\operatorname{tg}^2\varphi - q},$$

$$y_{11} = \frac{p \operatorname{tg}\varphi - q(\beta-\alpha \operatorname{tg}\varphi) - R}{\operatorname{tg}^2\varphi - q}.$$

Positis coordinatis puncti, ubi chorda in duas partes aequales dividatur, $=\xi$, η, habebimus:

$$\xi = \frac{x_1 + x_{11}}{2} = \frac{p-(\beta-\alpha \operatorname{tg}\varphi)\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi - q}, \qquad (3)$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_{11}}{2} = \frac{p \operatorname{tg}\varphi - q(\beta-\alpha \operatorname{tg}\varphi)}{\operatorname{tg}^2\varphi - q}. \qquad (4)$$

Ut locus quaesitus inveniatur, ex his aequationibus exterminanda est $\operatorname{tg}\varphi$. Exterminatio hoc modo facillime fieri videtur. Si ab utroque membro aequationis (3) subtrahitur α, invenimus, reductione facta:

$$\xi - \alpha = \frac{p + q\alpha - \beta \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi - q},$$

quae aequatio, per (4) divisa, dabit:

$$\frac{\xi-\alpha}{\eta} = \frac{p + q\alpha - \beta \operatorname{tg}\varphi}{(p+q\alpha)\operatorname{tg}\varphi - q\beta},$$

unde invenitur

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{q\beta(\xi-\alpha) + \eta(p+q\alpha)}{(p+q\alpha)(\xi-\alpha) + \beta\eta}$$

vel, $c = \frac{\beta}{p+q\alpha}$ posito,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{cq(\xi-\alpha)+\eta}{\xi-\alpha+c\eta}.$$

Substituto c aequatio (4) in hanc abit:

$$\eta = \frac{\beta(\operatorname{tg}\varphi - cq)}{c(\operatorname{tg}^2\varphi - q)},$$

quae, valore nuper invento ipsius $\operatorname{tg}\varphi$ substituendo, rite concinnata et divisione a factoribus η, $1-c^2q$ utrique membro communibus liberata dabit

$$c\eta^2 - cq\xi^2 - c\beta\eta - (\beta - 2cq\alpha)\xi + \alpha(\beta - cq\alpha) = 0.$$

Divisione porro per c facta et valore ipsius c substituto, habebimus tandem

$$\eta^2 - q\xi^2 - \beta\eta - (p - q\alpha)\xi + p\alpha = 0, \qquad (5)$$

quae est aequatio loci quaesiti. Quia huic aequationi satisfaciunt coordinatae puncti dati, locus quaesitus per hoc punctum transeat, necesse est*).

Aequatio inventa est sectionis conicae, quippe quae sit secundi gradus. Quia genus curvarum, quae in aequatione generali

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

continentur, a valoribus coëfficientium A, B, C ita pendet, ut sit Ellipsis aut Parabola aut Hyperbola, prout sit

$$B^2 - 4AC \overset{<}{\underset{>}{=}} 0,$$

et hoc loco est $A = 1$, $B = 0$, $C = -q$, $B^2 - 4AC = 4q$, sequitur, ut sit locus inventus Ellipsis aut Parabola aut Hyperbola, prout sit $q \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$. A quantitate q eodem modo pendet genus sectionis conicae datae, quamobrem locus inventus ejusdem est generis ac sectio conica data.

Posita $q = -1$, curva data abit in circulum, cujus radius est $= p$. Tum initium coordinatarum in puncto extremo cujusvis diametri sumere licet et convenientissimum videtur y-axem parallelum diametro per punctum datum transeunti ducere. Ita fit $\alpha = p$ et aequatio (5) hanc sibi induit formam:

$$(\eta - \tfrac{1}{2}\beta)^2 + (\xi - p)^2 = \tfrac{1}{4}\beta^2,$$

quae est aequatio circuli, cujus centrum in diametro circuli dati proxime citato jacet cujusque peripheria per punctum datum et centrum circuli dati transit. Si punctum datum extra circulum datum jacet, circulus datus ab invento bifariam secatur. Rectis

---

*) Posito $\eta = 0$, invenitur

$$\xi_1 = \alpha, \quad \xi_{11} = -\frac{p}{q},$$

unde liquet, locum quaesitum ab axi abscissarum in duobus punctis secari, si q non est $= 0$, alias non nisi in uno, scilicet eo, ubi perpendicularis a puncto dato ducta axem abscissarum secat. Si q non est $= 0$, curva habet centrum, per quod hoc casu locus quaesitus transit.

a puncto dato ad haec puncta intersectionis ductis, ambae tangentes, quae a puncto dato duci possunt, inveniuntur, id quod usu quoque venit, si circuli quotcunque dato concentrici scribuntur*). Quod theorema, quamquam in libris, quibus uti mihi licet, invenire non potui, notum arbitror. At vero quum hoc theorema ex problemate tractato facile eruatur, probabile videtur, eandem proprietatem cunctis sectionibus conicis esse communem, quod hoc modo facillime demonstratur. Aequatione (1) differentiata invenimus

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p+qx}{y},$$

quamobrem aequatio tangentis, per punctum datum transeuntis, est

$$y-\beta=\frac{p+qx}{y}(x-\alpha),$$

ubi x, y sunt coordinatae puncti contactus, quae ex hac et prima aequatione determinari possunt quaeque pro ξ, η in (5) substitutae huic satisfacere debent. Quod tamen facere opus non est, quia aequatio (6) concinnata quintam reddit, si x, y pro ξ, η substituuntur. Itaque si punctum datum extra curvam (1) situm est, haec curva in duobus punctis secatur a curva (5), in quibus curva (1) a rectis per punctum datum ductis tangitur, id quod usu quoque venit, si sectiones conicae quotcunque datae similes atque concentricae scribuntur. Rectae quoque per punctum datum ductae et has sectiones secantes a curva (5) in duas partes aequales dividuntur.

II.

Centro intra angulum datum sito et axi transverso dato, invenire sectionem conicam, quae crura anguli contingat.

Hoc problema in Comment. Acad. Petropol. Tom. IV. pag. 46 olim solutum est a Jac. Hermanno, qui l. cit. elegantem constructionem dedit, sed de Ellipsi tantum locutus est. De problemate suo Hermannus dicit, id in libris novem Philippi de la Hire, qui problemata de sectionibus conicis tractant, non inesse neque solutionem ejus insigni illi geometrae occurrisse. Interventu Varignonii ad eximium geometram nescio quem missum est, qui solutionem ope calculi analytici statim nactus in aequationem biquadraticam incidisse dicitur, quae Hermanno judice, simplicissima solutio sit, quae hac ratione sperari possit. Quia hoc judicium verissimum mihi visum est, aliam solutionem invenire conatus sum, iisdem fere atque Hermanni nixam principiis, quae tamen uno quasi ictu problema generalius solvat. Hanc solutionem suppeditat theorema cognitum: „circulus, cujus radius aequalis est semiaxi transverso sectionis conicae, e centro ejus descriptus tangentes ejus in genere in duobus punctis secat et foci jacent in

---

*) extra quos tamen punctum datum jacet.

rectis, quae per haec puncta ad tangentes ducuntur perpendiculares."

Sit jam Tab. X. Fig. 7. BED angulus datus, O centrum et mn semiaxis datus. Circulus e O descriptus, cujus radius est $=mn$, crura anguli in A, B, C, D secat. Rectis ad crura anguli perpendicularibus per haec puncta ductis, puncta f, f', F, F' habebimus, e quibus haec sunt foci Hyperbolae, illa foci Ellipsis. Quia jam situs axis transversi et magnitudo excentricitatis innotuit, constructio sine ulla difficultate fieri potest.

Facillimo usque negotio valorem excentricitatis reperire licet. Posito enim $mn=a$, et $OE=k$, quum O originem coordinatarum orthogonalium et OE axem abscissarum facimus, habemus aequationem circuli $ABDC$

$$x^2+y^2=a^2,$$

et aequationem rectae per E ductae et OE sub angulo ω secantis

$$y=(x-k)\,\mathrm{tg}\,\omega.$$

Si haec recta circulum secat, coordinatae punctorum intersectionis sunt

$$x=k\,\mathrm{Sin}^2\omega \pm \mathrm{Cos}\,\omega\sqrt{a^2-k^2\,\mathrm{Sin}^2\omega},$$

$$y=-k\,\mathrm{Sin}\,\omega\,\mathrm{Cos}\,\omega \pm \mathrm{Sin}\,\omega\sqrt{a^2-k^2\,\mathrm{Sin}^2\omega}.$$

Ponendo $BEO=\alpha$, $DEO=\beta$ et faciendo prius $\omega=180^0-\alpha$, deinde $\omega=\beta$, et brevitatis caussa

$$\sqrt{a^2-k^2\,\mathrm{Sin}^2\alpha}=\varrho_\alpha, \qquad \sqrt{a^2-k^2\,\mathrm{Sin}^2\beta}=\varrho_\beta,$$

habemus coordinatas punctorum

$$A\ldots\{x=k\,\mathrm{Sin}^2\alpha+\varrho_\alpha\mathrm{Cos}\,\alpha, \quad y=k\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha-\varrho_\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha;$$

$$B\ldots\{x=k\,\mathrm{Sin}^2\alpha-\varrho_\alpha\mathrm{Cos}\,\alpha, \quad y=k\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\varrho_\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha;$$

$$C\ldots\{x=k\,\mathrm{Sin}^2\beta+\varrho_\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta, \quad y=-k\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta+\varrho_\beta\,\mathrm{Sin}\,\beta;$$

$$D\ldots\{x=k\,\mathrm{Sin}^2\beta-\varrho_\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta, \quad y=-k\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta-\varrho_\beta\,\mathrm{Sin}\,\beta.$$

Facillime jam reperiuntur coordinatae punctorum

$$f\ldots\begin{cases}x_1=\dfrac{\varrho_\alpha\mathrm{Sin}\,\beta+\varrho_\beta\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)}\\[2ex] y_1=-\dfrac{\varrho_\alpha\mathrm{Cos}\,\beta-\varrho_\beta\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)}\end{cases}, \quad f'\ldots\begin{cases}x_2=-x_1;\\ y_2=-y_1;\end{cases}$$

$$F \dots \begin{cases} x_3 = \dfrac{\varrho_\alpha \operatorname{Sin}\beta - \varrho_\beta \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)} \\ y_3 = -\dfrac{\varrho_\alpha \operatorname{Cos}\beta + \varrho_\beta \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)} \end{cases}, \quad F' \dots \begin{cases} x_4 = -x_3; \\ y_4 = -y_3. \end{cases}$$

Excentricitas Ellipsis jam est

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \sqrt{\varrho_\alpha^2 + \varrho_\beta^2 - 2\varrho_\alpha\varrho_\beta \operatorname{Cos}(\alpha+\beta)},$$

et excentricitas Hyperbolae

$$= \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} =$$
$$= \sqrt{\varrho_\alpha^2 + \varrho_\beta^2 + 2\varrho_\alpha\varrho_\beta \operatorname{Cos}(\alpha+\beta)}.$$

Si angulus $\alpha+\beta$ est obtusus, hic valor est excentricitatis Ellipsis, ille excentricitatis Hyperbolae. Itaque ponere licet excentricitatem

$$= \sqrt{\varrho_\alpha^2 + \varrho_\beta^2 \mp 2\varrho_\alpha\varrho_\beta \operatorname{Cos}(\alpha+\beta)},$$

ubi signum superius valet pro Ellipsi et inferius pro Hyperbola, si est $\alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$, inferius contra pro Ellipsi, superius pro Hyperbola, si est $\alpha+\beta > \frac{\pi}{2}$.

III.

Rectangulo dato Rhombum datae magnitudinis ($=A$) inscribere.

Posito (Tab. X. Fig. 8.) latere Rhombi $\alpha\delta = x$, $\wedge A\alpha\delta = \varphi$, $\wedge \alpha\delta\gamma = \psi$, $AB = a$, $BC = b$, habebimus aequationes:

$$A = x^2 \operatorname{Sin}\psi,$$
$$a = x\{\operatorname{Cos}(\psi-\varphi) + \operatorname{Cos}\varphi\},$$
$$b = x\{\operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Sin}(\psi-\varphi)\}.$$

Ex formulis notissimis sequitur, ut aequationes posteriores in has transeant:

$$a = 2x \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi \operatorname{Cos}(\varphi - \tfrac{1}{2}\psi),$$
$$b = 2x \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\psi \operatorname{Cos}(\varphi - \tfrac{1}{2}\psi);$$

quarum divisione eruitur

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi=\frac{b}{a},$$

vel angulum ψ esse constantem, quippe qui a magnitudine Rhombi non pendeat. Jam obtinemus

$$\operatorname{Sin}\frac{1}{2}\psi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\psi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

ideoque

$$x=\sqrt{\frac{A(a^2+b^2)}{2ab}},\ \operatorname{Cos}(\varphi-\frac{1}{2}\psi)=\sqrt{\frac{ab}{2A}}.$$

Quia unitas est maximus valor, quem Cosinus habere potest, necesse est, sit minimum ipsius $A=\frac{1}{2}ab$, cui valori respondet $\varphi=\frac{1}{2}\psi$.

IV.

Invenire locum geometricum punctorum, in quibus se mutuo secant rectae, quae per extrema rectae datae puncta ducuntur et ejusmodi angulos cum data faciunt, ut Tangens unius sit aequalis Cotangenti aut Sinui alterius.

Ponamus rectam datam $=2a$ eamque axem coordinatarum orthogonalium sumamus. Initio abscissarum in medio ejus collocato positisque $=\varphi$, $\psi\,(\varphi>\psi)$ angulis, quos rectae per puncta extrema transeuntes faciunt, habebimus aequationes rectarum

$$y=(x-a)\operatorname{tg}\varphi,\quad y=(x+a)\operatorname{tg}\psi.$$

Si prius $\operatorname{tg}\psi=\operatorname{Cot}\varphi$ posuerimus, inveniemus

$$y^2-x^2=-a^2,$$

quae est aequatio Hyperbolae aequilaterae. Facile patet, hoc esse non nisi casum specialem theorematis de angulis chordarum supplementarium.

Posito jam $\operatorname{tg}\psi=\operatorname{Sin}\varphi$, habebimus

$$y^2=4ax$$

vel Parabolam, quae per originem transit et parametrum $=4a$ habet. Puncta extrema datae rectae sunt focus et id punctum, ubi directrix axem secat.

XXXIV.

Uebungs-Aufgaben.

Zwei Aufgaben von Herrn Dr. Wilh. Schell, Privatdocenten an der Universität zu Marburg.

1. Es seien drei feste Punkte A, B, C gegeben, ein vierter Punkt M soll sich so im Raume bewegen, dass die körperliche Ecke M der vierseitigen Pyramide $ABCM$ eine constante Grösse bleibt. Welches ist der Ort der Spitze M?

2. Es sei eine Fläche zweiter Ordnung bezogen auf das System der Hauptaxen und x, y, z die Coordinaten eines Punktes M derselben. Ferner seien A, B, C irgend drei feste Punkte im Raume; man zieht von diesen nach einem vierten Punkte M' die drei Strecken λ, μ, ν. Auf welcher Fläche liegt M', wenn $\lambda = x$, $\mu = y$, $\nu = z$ sein soll?

Lehrsatz zu beweisen.

(Aus den Nouvelles Annales de Mathématiques, Journal etc. rédigé par Terquem et Gerono. Septembre. 1852. p. 324.).

Si l'équation du troisième degré a une racine de la forme $a+\sqrt{b}$, a et b étant des nombres commensurables, les quantités contenues sous le radical dans les formules ordinaires deviennent des cubes parfaits.

Lehrsatz zu beweisen.

Tout nombre entier qui n'est pas compris dans la formule

$$4mn-m-n$$

est nécessairement compris dans la formule

$$x^2+y^2+y.$$

XXXV.

Miscellen.

Ein Billardproblem.

Von Herrn Dr. August Wiegand, Oberlehrer an der Realschule in Halle.

Ein Spieler, welcher an der kurzen Bande *AB* (Taf. IX. Fig. 9.) eines Billards steht, will einen vor dem rechten Eckloche *B* stehenden Ball durch seinen à main befindlichen Ball quadrupliren; wo hat er seinen Ball hinzusetzen, und in welcher Richtung muss er stossen?

Bezeichnet die gebrochene Linie *EFGHB* die Bahn des Balles, so handelt es sich offenbar nur um die Bestimmung der Punkte *E* und *F*. Zu dem Ende setzen wir $EB=w$, $BF=x$, $CG=y$, $DH=z$, so ist, wie sich leicht ergiebt, wenn wir $AB=a$ und $BC=2a$ setzen,

$$\frac{w}{x}=\frac{y}{2a-x}=\frac{a-y}{z}=\frac{a}{2a-z}.$$

Da wir vier unbekannte Grössen, aber nur drei Gleichungen haben, so ist die Aufgabe unbestimmt. Eliminiren wir aus den vorigen Gleichungen y und z, so bleibt die Gleichung

$$x=\frac{4aw}{2a+w},$$

oder wenn wir die lange Bande mit A bezeichnen,

$$x=\frac{2Aw}{A+w} \ldots\ldots (\alpha).$$

Es geht hieraus hervor, dass sich der Spieler entweder den Aussatzpunkt wählen kann und den Anschlagepunkt F zu suchen hat, oder aber dass er den Anschlagepunkt wählen kann und den Aussatzpunkt suchen muss. Stellte er z. B. den Spielball an das Loch A, so wäre

$$w=a=\frac{1}{2}A,$$

und also

$$x=\frac{4}{3}a=\frac{2}{3}A.$$

Aus der Gleichung (α) ersieht man ferner, dass x das harmonische Mittel zwischen A und w ist; man wird deshalb, wenn der Punkt F gewählt ist, zu den drei Punkten B, F und C den dem Punkte C zugehörigen vierten harmonischen Punkt K zu suchen und $BE=BK$ abzutragen haben, um den Aussatzpunkt des Spielballs für den gewählten Anschlagepunkt F zu finden. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass der Spielball nicht gerade nach E, sondern nur nach einem beliebigen Punkte der Linie EF gesetzt werden muss.

Errata in Tomo XVII.

Pag. 455	lin. 6 ab imo	pro $\mathrm{Sin}^n x$	legas	$\mathrm{Sin}\, nx$.
„ 455	„ 5	„	„ $\frac{n_{n-1}}{n}$	„	$\frac{n_{n-1}}{2}$.
„ 456	„ 8 a sum.	„ $(m-4)^{r-1}$	legas	$(n-4)^{r-1}$.
„ 458	„ 6 ab imo	„ $(n-2_p)^{m-1}$	„	$(n-2p)^{m-1}$.
„ 459	„ 2 a sum.	„ x_m-1	legas	x^{m-1}.
„ 460	„ 5	„	„ $\int_0^x \frac{\mathrm{Cos}\, bx}{x} dx$	legas	$\int_0^x \frac{\mathrm{Cos}\, bx}{x} dx = x$.
„ 460	„ 9	„	„ unaequaeque	„	unaquaeque.
„ 461	„ 3 ab imo	„ habet	legas	habeat.

Druckfehler.

Thl. XIX. Z. 12. Statt

$$\frac{\partial r}{\partial i} = \frac{Q\frac{\partial P}{\partial i} - \frac{\partial Q}{\partial i}}{Q^2} \quad \text{setze man} \quad \frac{\partial r}{\partial i} = \frac{Q\frac{\partial P}{\partial i} - P\frac{\partial Q}{\partial i}}{Q^2}.$$

LXXIII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Wir machen die Leser des Archivs auf eine am 27. März 1852 zur Vorfeier des dreiundneunzigsten Stiftungstages der Königl. Baierischen Akademie der Wissenschaften von Herrn Geheimrath Friedrich Thiersch gehaltene

Rede über die wissenschaftliche Seite rein praktischer Thätigkeit

aufmerksam, welche in den Gelehrten Anzeigen, herausgegeben von Mitgliedern der Königl. Baierischen Akademie. 1852. Nr. 64. ff. abgedruckt ist.

Diese schon an sich durch ihren Gegenstand höchst interessante und lehrreiche Rede enthält die Lebensbeschreibungen zweier Männer, in denen tiefe wissenschaftliche Bildung und grosses praktisches Talent in einem so vorzüglichen Grade, wie man dies selten antrifft, vereinigt war, nämlich Georg von Reichenbachs (geboren am 24. August 1772 zu Durlach, gestorben den 21. Juni 1826) und Joseph von Fraunhofer's (geboren den 6. Mai 1787 zu Straubing, gestorben am 7. Juni 1824.). Ausserdem enthält diese Rede eine Menge für jeden Mathematiker höchst interessanter Notizen über die berühmten mechanischen und optischen Institute zu München, und biographische Mittheilungen über die berühmten Mechaniker und Optiker: v. Utzschneider, Liebherr, Traugott Lebrecht Ertel, dessen Söhne Georg und Gustav Ertel, Georg Merz und dessen Söhne Ludwig

und Sigmund Merz, Mahler und Andere. Auch zeichnet Herr Thiersch in sehr interessanter Weise den zwar nicht durch Schriften, aber durch andere, namentlich geodätische Arbeiten als trefflichen Mathematiker bekannten Benediktiner Ulrich Schiegg, geboren am 3. Mai 1752 zu Gosbach an der Filz bei Wiesensteig, gestorben am 4. Mai 1810, der mehreren der oben genannten Männer, namentlich Reichenbach, stets mit seinem wissenschaftlichen Rathe beistand, und fast täglich in Reichenbachs mechanischem Institute gegenwärtig war. Wir wüssten keine Schrift, in welcher man auf verhältnissmässig kleinem Raume so viele interessante und lehrreiche Mittheilungen über die berühmten mechanischen und optischen Institute zu München beisammen fände, als obige Rede, für welche daher alle Mathematiker mit uns sich Herrn Thiersch zu um so grösserem Danke verpflichtet fühlen werden, da das wissenschaftliche Fach, in welchem derselbe sich vorzugsweise berühmt gemacht hat, bekanntlich nicht die Mathematik ist. Kein Mathematiker wird diese Rede ohne lebhaftes Interesse lesen und ohne grosse Belehrung aus der Hand legen. Dieselbe liefert jedenfalls einen sehr guten Beitrag zur Geschichte der Mathematik.

Von des Königs von Baiern Majestät ist bei der Königl. Baierischen Akademie der Wissenschaften eine besondere naturwissenschaftlich-technische Commission eingesetzt worden, bestehend aus den Herren v. Fuchs, Lamont, v. Hermann, v. Kobell, Schafhäutl, Ohm, Buchner jun., Pettenkofer und Seidel, welche sich vorzüglich naturwissenschaftlich-technischen Arbeiten zu widmen haben wird, eine Einrichtung, die gewiss allgemeine Nachahmung verdient. Zur Ausführung ihrer Arbeiten und Versuche ist dieser Commission jährlich die ansehnliche Summe von 5000 Gulden aus der Allerhöchsten Kabinetskasse zugewiesen worden.

Arithmetik.

Das Neueste und Interessanteste aus der Logarithmotechnik und der Anwendung der Logarithmen auf das Leben. Nach den englischen und französischen Schriften von Byrne und Koralek übertragen von A. Lorey, Director der Secundar- und ersten Bürgerschule zu Eisenach. Weimar. Voigt. 1852. 8. 20 Sgr.

Diese Schrift ist der Beachtung aller derer, welche sich für die numerische Berechnung der Logarithmen interessiren, da sie nicht wenige neue Rechnungsvortheile enthält, zu empfehlen, und der

Herr Uebersetzer hat sich durch deren Uebertragung auf deutschen Boden ein Verdienst erworben. Auch manche historische Bemerkungen und einige Tafeln enthält dieselbe.

Physik.

Die Elemente der Physik von C. Cabart, Repetent an der polytechnischen Schule in Paris. Deutsch bearbeitet zum Gebrauche bei Vorlesungen an Universitäten, polytechnischen und Gewerbeschulen, Real- und Militairschulen, so wie zum Selbstunterrichte, als Vorbereitung fürs Examen für angehende Mediciner u. s. w. Mit über 200 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig. A. Abel. 1852. 8. 1 Thlr. 10 Sgr.

Eine Vorrede giebt uns über Zweck und Veranlassung dieser Uebersetzung eines französischen Elementarlehrbuchs der Physik keine Auskunft, auch hat der Uebersetzer sich nicht genannt. Das Buch enthält nur die Elemente der älteren Physik in einer einfachen und leicht verständlichen Sprache, durch gute Holzschnitte erläutert, wobei wir aber den Leser bitten, das vorher gesperrt gedruckte Wort „älteren“ wohl zu beachten. Denn in etwas auffallender Weise enthält das Buch über die neueren Fortschritte der Physik gar nichts, giebt nicht einmal eine Notiz von denselben bloss dem Namen nach. Es enthält daher (etwa mit Ausnahme von §. 338.) nichts über Elektromagnetismus, elektrische Telegraphie, nichts über Polarisation, Interferenz, Beugung, doppelte Strahlenbrechung, u. s. w., woraus unsere Leser schon sehen werden, in wie fern das Buch zu dem auf dem Titel angegebenen vielfachen Gebrauche geeignet ist oder nicht. Wer aber bloss die Lehren der älteren Physik in kurzer Zeit übersichtlich kennen lernen will, mag immerhin in dem Buche seine Rechnung finden, namentlich dann, wenn er an die mathematische Begründung, die in demselben ziemlich schwach ist, keine besonderen Ansprüche macht. Freilich aber haben wir dergleichen Bücher in Deutschland, und zwar manche sehr gute, schon genug, und das vorliegende Werk wäre daher nach unserer Ueberzeugung besser unübersetzt geblieben, wenn auch die Uebersetzung nicht gerade Schaden bringen wird. Wozu soll aber Deutschland so sehr mit Uebersetzungen überschwemmt werden! Allerdings scheinen manche frühere Uebersetzer in ihrem Uebersetzungseifer in neuerer Zeit etwas nachgelassen und sich mehr aufs Recensiren verlegt zu haben; indess muss es nach vorliegender und anderen Proben doch wohl immer noch Leute genug geben, die bei dem Uebersetzen mathematischer und physikalischer Schriften des Auslandes das Geschäft jener Herren mit Vortheil glauben fortsetzen zu können.

Die elektrischen Telegraphen. Gemeinfassliche Erläuterung über die Principien und Apparate der neueren Telegraphie. Mit 21 Abbildungen in Holzschnitt. Stuttgart. Kneller. 1852. 8. 6 Sgr.

Eine zwar kleine, aber, wie es scheint, recht instructive, ganz populär gehaltene, und daher für jeden Laien verständliche Schrift, der wir möglichste Verbreitung wünschen, weil allgemeine Begriffe über ihren so höchst wichtigen Gegenstand jeder Gebildete sich gewiss gern aneignen wird. Dieselbe ist übrigens ein besonderer Abdruck eines Aufsatzes in der in demselben Verlage erscheinenden: **Neuen illustrirten Zeitung.**

Astronomie.

Mittlere Oerter von 12000 Fixsternen, für den Anfang von 1836, abgeleitet aus den Beobachtungen auf der Hamburger Sternwarte von Carl Rümker. Vierte Abtheilung. Zweite Hälfte, die 22ste und 23ste Stunde enthaltend. Hamburg. Perthes, Besser und Mauke. 1852. 4.

Mit dieser Abtheilung ist dieser vortreffliche Sterncatalog, die mühsame Arbeit vieler Jahre, dessen vorhergehende Abtheilungen im Literarischen Berichte angezeigt worden sind, so viel wir wissen, vollendet, wozu wir dem verehrten Herrn Verfasser und der Wissenschaft von Herzen Glück wünschen. Möge derselbe recht vielfach gebraucht werden und zu recht vielen neuen Untersuchungen Gelegenheit geben.

Nautik.

Leitfaden zum Studium der Marine-Artillerie. Nach den besten Quellen bearbeitet von F. Hausknecht, Marine-Artillerie-Hauptmann (zu Triest). Mit 5 Kupfertafeln. Wien. Gerold. 1852. 8. 3 Thlr. 24 Sgr.

Dieses Buch ist für das kaiserlich österreichische Marine-Kadetten-Kollegium bestimmt, um als Basis des Unterrichts in der Marine-Artillerie dienen zu können. Es enthält deshalb natürlich alles dahin einschlagende Technische in der nöthigen Vollständigkeit, was aber nicht in den Kreis dieser literarischen Berichte gehört, wenn wir auch nicht unbemerkt lassen wollen, dass wir manche allgemeiner interessante Abschnitte mit Vergnügen gelesen haben, und durch die Einfachheit und Deutlichkeit der Darstel-

lung sehr befriedigt worden sind. Erwähnung mussten wir aber dieses gewiss in mehreren Beziehungen verdienstlichen Buchs deshalb thun, weil sich im dritten Abschnitte desselben (S. 185. — S. 279.) eine recht gute elementar-mathematische Behandlung der Ballistik, überall mit gebührender Rücksicht auf das Praktische, findet, die auch Mathematiker mit Interesse lesen werden. Der dritte Abschnitt ist überschrieben: „Vom Schiessen und Werfen“ und enthält nach einer Einleitung über die betreffenden allgemeinen Begriffe fünf Kapitel, nämlich: *I. Kapitel.* Von der Bewegung der Körper im luftleeren Raume. *II. Kapitel.* Bewegung der Körper im widerstehenden Mittel. *III. Kapitel.* Von den Elevationen und Seitenrichtungen der Geschütze, welche die Abmessungen der Rapperte und Stückpforten erlauben. *IV. Kapitel.* Berechnung der Schusstafeln. *V. Kapitel.* Von den Raketen.

Mathematisch-astronomische Section bei der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Gotha vom 18ten bis 24sten September 1851.

Bei der im vorigen Jahre in Gotha stattgefundenen Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte hatte sich eine besondere mathematisch-astronomische Section gebildet, welche ziemlich zahlreich vertreten war. Deshalb ersuchte ich Herrn Professor Bretschneider in Gotha, der den Vorsitz bei dieser Section geführt hatte, mir gefälligst einen Bericht über die Verhandlungen derselben zur Einrückung in den literarischen Bericht des Archivs zu übersenden, welcher Bitte Herr Professor Bretschneider auch bereitwilligst in sehr dankenswerther Weise entsprochen hat. Indem ich nun diesen Bericht des Herrn Professor Bretschneider den Lesern des Archivs mitzutheilen mir erlaube, knüpfe ich daran zugleich den Wunsch, dass auch bei der in diesem Jahre in Wiesbaden stattfindenden Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte sich die deutschen Mathematiker wieder möglichst zahlreich betheiligen möchten, was für viele leichter ausführbar sein wird, als für den an die äusserste Gränze des deutschen Vaterlandes verschlagenen, und mit sehr verschiedenartigen Amts- und anderen Geschäften gerade jetzt sehr überladenen Herausgeber des Archivs. Sollte aber dessen Wunsch, dass sich bei der diesjährigen Versammlung wieder eine besondere Section für Mathematik und Astronomie bilden möchte, wirklich in Erfüllung gehen, so wird derselbe sehr erfreuet werden, wenn ihm von dem dereinstigen Vorsitzenden dieser Section, auch ohne besondere Aufforderung von seiner Seite, ein Bericht über die stattgehabten Verhandlungen, etwa in derselben Weise, wie der folgende Bericht des Herrn Professor Bretschneider, eingesandt wird, der dann gewiss sogleich in dem Archiv abgedruckt werden wird.

Es folgt nun der Bericht des Herrn Professor Bretschneider über die Verhandlungen der mathematisch-astronomischen

Section der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Gotha im Jahre 1851.

Grunert.

Die im vorigen Jahre vom 18ten bis 24sten September in Gotha abgehaltene Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte war von Mathematikern so zahlreich besucht, dass der noch nicht häufig vorgekommene Fall eintrat, dass eine besondere mathematisch-astronomische Sektion gebildet werden konnte, welche in der That vier Sitzungen hielt. Da über die Verhandlungen der Versammlung und der von ihr gebildeten einzelnen Sektionen zur Zeit noch nichts öffentlich bekannt worden ist, so wird es den Lesern des Archivs wohl nicht uninteressant sein, hier wenigstens über die Vorträge der astronomisch mathematischen Sektion eine kurze Notiz zu erhalten.

Als Theilnehmer an den Versammlungen der gedachten Sektion hatten sich eingezeichnet:

1) Professor C. A. Bretschneider aus Gotha,
2) Hofrath P. A. Hansen, Direktor der Sternwarte in Seeberg,
3) Professor Stieffel aus Carlsruhe,
4) Professor Riecke aus Hohenheim,
5) Dr. J. G. H. Swellengrebel aus Utrecht,
6) Professor G. J. Ohm aus München,
7) O. Sittig, Privatgelehrter aus Gotha,
8) Professor Dr. Unger aus Erfurt,
9) Professor Dr. Schlömilch aus Dresden,
10) Dr. Drechsler aus Dresden,
11) Professor Dr. Kern aus Coburg,
12) C. A. Scheibner, Bankbuchhalter aus Gotha,
13) Lieutenant Dr. v. Bruchhausen aus Münster,
14) Privatdocent Dr. Schaeffer aus Jena,
15) Pfarrer Fleischhauer aus Warza bei Gotha,
16) Dr. Scheibner aus Gotha,
17) F. G. E. Gressler aus Langensalza,
18) Direktor Dr. Eberhard aus Coburg,
19) Professor Dr. Stegmann aus Marburg.

Nachdem die Mitglieder sich als Sektionsversammlung constituirt und den Professor Bretschneider zum Vorsitzenden.

den Dr. Scheibner zum Schriftführer erwält hatten, wurden die Verhandlungen durch einen Vortrag des Lieut. von Bruchhausen über speculative Physik eröffnet. Der Redner suchte auf philosophischem Wege eine Ableitung der in der Natur wirkenden Kräfte aus mechanischen Principien zu geben und deutete dabei an, dass die Mathematik die Beweise für die ausgesprochenen Behauptungen oder Resultate in der Art zu übernehmen habe, dass die mechanischen Gleichungen, wo sie unbestimmter oder diophantischer Natur seien, durch Einführung der Lebenskräfte vervollständigt werden müssten. Da der Vortrag nichts war als ein Conglomerat abstruser Philosopheme und gänzlich vager Behauptungen, die aller und jeder strengeren Begründung entbehrten, so begnügte sich die Versammlung ihn eben anzuhören und lehnte jede Discussion desselben ab. Es folgte hierauf Professor Schlömilch mit einem Vortrage über die Methode der unbestimmten Coefficienten, in welchem die bekannten Mängel derselben nochmals hervorgehoben und nach Lagrange und Cauchy eine strengere Begründung der Reihenentwickelung mit Hülfe der Betrachtung des Restes des Taylor'schen und Maclaurin'schen Theorems gegeben wurden. In Folge dieses Vortrages entspann sich eine Debatte über die pädagogischen Rücksichten, die man bei Behandlung der Lehre von den Reihen zu nehmen habe und vereinigten sich die Stimmen sämmtlicher anwesenden Schulmänner dahin, dass es endlich wohl an der Zeit sei, in dem mathematischen Unterrichte auf Gymnasien anstatt der weitläufigen und höchst zeitraubenden Reihenentwickelungen der sogenannten Analysis endlicher Grössen die Elemente der Differenzialrechnung einzuführen, da man mit geringem Aufwande von Kraft und Zeit bis zum Taylor'schen Theorem gelangen könne und somit dem Schüler einen weit tieferen und klareren Einblick in die Analysis verschaffe, als dies auf dem bisher betretenen Wege möglich sei.

Der folgende Vortrag des Professors Ohm betraf eine Interferenzerscheinung bei schief geschnittenen Platten, die bisher noch nicht scheint beobachtet worden zu sein. Der Vortrag ward durch Anstellung des bezüglichen Experimentes erläutert und dabei nachgewiesen, dass die elliptischen Figuren, welche bei einer bestimmten Stellung der Krystalle erscheinen, durch die Theorie genügend erklärt werden.

Nachdem ferner Dr. Drechsler der Versammlung eine Anzahl Exemplare seiner „Scholien zu Christoph Rudolphs Coss" überreicht und dabei auf die Wichtigkeit des historischen Studiums der Mathematik hingewiesen hatte, hielt Dr. Stieffel einen Vortrag über „Witterungscharakteristik", der im Grunde sich mit der Darlegung der Principien beschäftigte, nach denen der Redner seine Witterungsprophezeiungen zu geben pflegt. So bereitwillig man auch das ungemeine Geschick anerkennen musste, mit welchem der Sprecher das ungeheure Material funfzigjähriger umfangreicher meteorologischer Beobachtungen auf kleinem Raume übersichtlich hatte zusammenzudrängen verstanden, so war doch nicht zu verkennen, dass wissenschaftliche Resultate aus diesem reichen Schatze zur Zeit nicht gezogen worden waren, und dass

dem Wetterprophezeien reiner Empirismus zu Grunde liegt, der schliesslich das bekannte „post hoc erga propter hoc“ zum Ausgangspunkte nimmt.

An dies schloss sich Professor Riecke mit einem Vortrag an „über die Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes aus der Aberration der Fixsterne“, dessen wesentlicher Inhalt inzwischen im ersten Hefte des 18ten Bandes gegenwärtigen Archivs öffentlich bekannt worden ist, und in der Versammlung selbst eine kurze Discussion zwischen dem Redner und dem Direktor Hansen veranlasste, wobei letzterer besonders auf den Einfluss aufmerksam machte, den die Stellung der Erde in ihrer Bahn auf den vom Lichte zu durchlaufenden Raum ausüben könne.

Direktor Hansen begann hierauf einen ausführlichen Vortrag über das Planimeter, ein von Wetli in Zürich erfundenes, vom Redner mit wesentlichen Verbesserungen versehenes Instrument, welches den Flächenraum beliebig begrenzter ebener Figuren durch eine einfache Manipulation und ohne alle Rechnung zu finden erlaubt. Nach einer Erwähnung der frühern Versuche, das zu Grunde liegende Princip zur Construktion von Mess- oder Rechnungsapparaten anzuwenden, wurde die Beschreibung des Instrumentes in seinen einzelnen Theilen gegeben und der Gebrauch desselben durch die wirkliche Ausführung einiger Messungen erläutert. Die ungemeine Einfachheit der Manipulation, verbunden mit der grossen Schärfe des Resultates, die durch Wiederholung der Operation noch bedeutend erhöht werden kann, erwarben dem Planimeter die vollste Anerkennung von Seiten der Versammlung, und in der That dürfte sich zur Bestimmung geographischer Flächeninhalte, so wie angenäherter Werthe schwieriger Integrale kaum irgend ein einfacheres und expediteres Mittel wünschen lassen.

Unmittelbar an Vorstehendes schloss sich ein zweiter Vortrag Hansen's „über eine eigenthümliche Entwickelung des Hauptgliedes der Störungsfunktion.“ Dasselbe enthält bekanntlich den inversen Werth der Entfernung des störenden und des gestörten Planeten. Diese Entfernung kann als die dritte Seite eines Dreiecks angesehen werden, dessen andere zwei Seiten die Radiivektores beider Planeten bilden. Nennt man die dritte Seite eines Dreiecks D, dessen beide andere Seiten 1 und a den Winkel p einschliessen, so giebt die Entwickelung des inversen Werthes von D nach den Potenzen von a den Ausdruck

$$\frac{1}{D}=[1-2a\cos p+a^2]^{-\frac{1}{2}}=1+U_1a+U_2a^2+\ldots.+U_na^n+\ldots..,$$

wo U_n eine ganze rationale Funktion des $n$ten Grades von $\cos p$ ist. Das Eigenthümliche der Entwickelung besteht nun darin: für U_n Ausdrücke anzugeben, in denen Winkelfunktionen erscheinen,

die sich auf die Vielfachen der Argumente der Breite, nicht aber auf die Vielfachen des Neigungswinkels der Bahnen beziehen.*)

---

*) Die Theorie der Störungen verlangt eine Zerlegung von $\cos p$, nach welcher dieser Winkel durch die Argumente der Breite beider Planeten und der gegenseitigen Neigung ihrer Bahnen ausgedrückt wird. Nennt man jene Argumente u, u', diese Neigung i, so steht p im sphärischen Dreiecke dem Winkel i gegenüber. Es ist demnach der Ausdruck

$$\cos p = \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos i$$

in den Werth von U_n einzuführen und es haben Laplace, Legendre, Jacobi, Hansen bewiesen, dass wenn man U_n nach den Cosinus der Vielfachen der Neigung entwickelt, und

$$\cos u = x, \quad \cos u' = y$$

setzt, ein Ausdruck von der Form

$$U_n = U_n{}^u U_n{}^{u'} + 2\alpha_1 \frac{\partial U_n{}^u}{\partial x} \cdot \frac{\partial U_n{}^{u'}}{\partial y} \cos i + 2\alpha_2 \frac{\partial^2 U_n{}^u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U_n{}^{u'}}{\partial y^2} \cos 2i + \ldots$$

$$\ldots + 2\alpha_m \frac{\partial^m U_n{}^u}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^m U_n{}^{u'}}{\partial y^m} \cos mi + \ldots\ldots + 2\alpha_n \frac{\partial^n U_n{}^u}{\partial x^n} \frac{\partial^n U_n{}^{u'}}{\partial y^n} \cos ni$$

erhalten wird. Hier bezeichnen $U_n{}^u$ und $U_n{}^{u'}$ dieselben Funktionen von resp. u und u', welche U_n von p ist in der Reihe, die oben für $\frac{1}{D}$ hingeschrieben worden ist. Für die Coefficienten α ist der allgemeine Ausdruck:

$$\alpha_m = \frac{\sin^m u \,.\, \sin^m u'}{(u-m+1)(u-m+2)\ldots(u+m)}.$$

Dieselben enthalten also Potenzen der Sinus der Argumente der Breite. In dieser Form nun ist die Entwickelung für die Theorie der Gestalt der Himmelskörper brauchbar, aber nicht für die Theorie der Störungen. In letzterer wird gerade umgekehrt die Entwickelung nach den Sinus und Cosinus der Argumente der Breite, so wie nach den Potenzen der Neigung erfordert.

Bezeichnet

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r_1{}^2 - 2rr' \cos p}$$

die Entfernung zweier Planeten, deren Radii vektores r und r' sind, so folgt durch Einführung von u, u' und i:

$$\Delta^2 = r^2 + r_1{}^2 - 2rr' \left[\cos^2 \tfrac{1}{2} i \cos(u-u') + \sin^2 \tfrac{1}{2} i \cos(u+u')\right].$$

Es sei nun

Professor **Stegmann** sprach hierauf über die von **Foucault** in Paris gemachte Entdeckung, dass die Schwingungsebene eines Pendels vermöge der Rotation der Erde sich in der Richtung von

---

$$r' > r, \quad \frac{r}{r'}\cos^2\tfrac{1}{2}i = \alpha, \quad \frac{r}{r'}\sin^2\tfrac{1}{2}i = \beta, \quad \text{also } \alpha + \beta = \frac{r}{r'};$$

so ist:

$$\left(\frac{\Delta}{r'}\right)^2 = 1 - 2\alpha\cos(u-u') - 2\beta\cos(u+u') + (\alpha+\beta)^2.$$

Wenn man hier α oder β verschwinden lässt, so ist die ursprünglich für D^2 angenommene Form erreicht. Die Entwickelung einer Potenz dieses Ausdruckes hängt von zwei Winkeln u und u' und zwei Parametern α und β ab. Entwickeln wir nach den Potenzen von α und β, so bekommen wir die Entwickelung nach den Potenzen des Verhältnisses der Radiivektoren, wenn wir alle Glieder zusammenfassen, in denen die Exponenten von α und β dieselben Summen haben. Die Einführung imaginärer Exponentialfunktionen erleichtert das Geschäft wesentlich, und zwar erhält man für

$$x = e^{(u-u')\sqrt{-1}} \quad \text{und} \quad y = e^{(u+u')\sqrt{-1}}$$

den Werth:

$$\left(\frac{\Delta}{r'}\right)^2 = (1-\alpha x+\beta y)\left(1-\frac{\alpha}{x}-\frac{\beta}{y}\right) - \alpha\beta\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2.$$

Man wird auf diese Form geführt, wenn man die Entfernung Δ als die zweier Punkte mit den Coordinaten $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ betrachtet. Nennt man XYZ die Differenzen der gleichnamigen Coordinaten, so erhält man eine Zerlegung in drei Quadrate

$$\Delta^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left(\frac{\Delta}{r'}\right)^2 = \left(\frac{X}{r'}+\frac{Y}{r'}\sqrt{-1}\right)\left(\frac{X}{r'}-\frac{Y}{r'}\sqrt{-1}\right) + \frac{ZZ}{r'r'}.$$

Setzt man der Kürze halber

$$\frac{X}{r'}+\frac{Y}{r'}\sqrt{-1} = F = 1-\alpha x-\beta y$$

und

$$\frac{X}{r'}-\frac{Y}{r'}\sqrt{-1} = F' = 1-\frac{\alpha}{x}-\frac{\beta}{y},$$

West nach Ost dreht und dass diese Drehung dem Sinus der geographischen Breite proportional ist. Er gab einen auf einfache Sätze der analytischen Geometrie gegründeten Beweis dieser Erscheinung, und als in Folge der über diesen Gegenstand entstehenden Discussion Direktor Hansen der Verschiedenheit in der Geschwindigkeit erwähnte, mit welcher das Pendel aus der anfänglichen Schwingungsebene entweicht, so wies der Redner nach, dass auch dieser Umstand aus der von ihm gegebenen mathematischen Darstellung mit Nothwendigkeit folge.

Professor Unger sprach über das Wesen der von Ampère gegebenen Methode, die Gleichungen vierten Grades allgemein aufzulösen und wies nach, dass dieselbe eigentlich nichts weiter

---

wo sich F und F' nur durch das Vorzeichen des imaginären Theils unterscheiden, so ist

$$\frac{r'}{\Delta}=\left[FF'-\alpha\beta\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Potenzen des ersten Gliedes FF', die bei der weiteren Entwickelung vorkommen, lassen sich leicht nach den Potenzen von α und β entwickeln, und zwar enthält dann bei jedem einzelnen in $\alpha^{\varkappa}\beta^{\lambda}$ multiplicirten Gliede der Coefficient lauter Potenzen von x und y, deren Exponenten resp. zwischen $\pm\varkappa$ und zwischen $\pm\lambda$ liegen und in Abstufungen von zwei Einheiten fortschreiten. Diese Theilglieder verbinden sich, wie man leicht sieht, so, dass das Imaginäre fortfällt und reelle Cosinus von der Form

$$\cos[\varkappa(u'-u)+\lambda(u'+u)]$$

erscheinen. Das Hinzukommen des nächsten Gliedes, welches

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$$

enthält, complicirt die Rechnung. Dieselbe vereinfacht sich indess im Endresultat dadurch, dass man auf zwei hypergeometrische Reihen im Produkt [die Gaussischen Funktionen $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$] kommt, deren viertes Element $=1$ ist, die sich also summiren lassen. So ergeben sich schliesslich einfache Werthe der Coefficienten.

Bei der vom Redner gegebenen Entwickelung von

$$\frac{r'}{\Delta}=\sum_{\varkappa,\lambda}^{0}\sum^{\infty}[\varkappa,\lambda]\alpha^{\varkappa}\beta^{\lambda}$$

wurde der Ausdruck der Coefficienten $[\varkappa,\lambda]$ selbst gegeben und dabei bemerkt, dass man bei der Endform, die selbst als Doppelsumme erscheint, zwischen geraden und ungeraden Indicibus zu unterscheiden habe.

sei als die Zerfällung der vorgelegten Gleichung in ein Produkt zweier trinomischer Faktoren zweiten Grades, eine Auflösungsmethode, die schon früher von Euler vorgetragen, zuerst aber von Descartes gegeben worden sei.

Den Beschluss machte eine Mittheilung des Direktor Hansen über eine bisher noch nicht bekannte Ableitung der Gauss'ischen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie durch Anwendung der Ausdrücke, welche den Sinus und Cosinus eines Bogens durch Exponentialgrössen mit imaginären Exponenten darstellen.

Bretschneider.

Bitte des Herausgebers.

Es sind schon einige Mal Necrologe verstorbener Mathematiker in dem Archive mitgetheilt worden, die dem Herausgeber entweder freiwillig zugesandt worden waren, oder die er sich von ihm befreundeten Gelehrten, von denen er voraussetzen konnte, dass sie zu dem Verstorbenen in näherem Verhältniss standen, besonders erbeten hatte. Um aber dergleichen Aufforderungen und Bitten, die für den Herausgeber zuweilen mit Schwierigkeiten verbunden waren, für die Folge überhoben zu sein, wenn dieselben auch nicht gerade ganz eingestellt und von dem Herausgeber ganz unterlassen werden sollen, erlaubt sich derselbe jetzt an alle diejenigen, welche verstorbenen Mathematikern und Physikern näher befreundet waren, im Allgemeinen die ergebenste Bitte zu richten, ihm Necrologe ihrer verstorbenen Freunde gefälligst mitzutheilen, und verspricht, dieselben immer gern in den literarischen Berichten des Archivs abdrucken lassen zu wollen. Selbst auch dann, wenn der Verstorbene nicht gerade als Schriftsteller bekannt, aber als Lehrer ausgezeichnet war, oder sonst merkwürdige Schicksale erlebte, auf den nähern Kreis, in dem er lebte, besonders wohlthätig in irgend einer Weise einwirkte, werden dergleichen Necrologe ihren Zweck nicht verfehlen und in mehr als einer Beziehung für die Leser des Archivs von Interesse sein. Der Herausgeber bittet also nochmals um Einsendung solcher Necrologe oder dieselben einigermassen vertretender Notizen verschiedenen Inhalts.

LXXIV.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik.

In dem Journal des Savants. Mars. 1852. p. 134. findet man den ersten Theil einer von Biot verfassten sehr interessanten Anzeige des folgenden für die Geschichte der Mathematik wichtigen Werkes:

Correspondance of Sir Jsaac Newton and Professor Cotes etc. Correspondance du chevalier Jsaac Newton et du professeur Cotes, avec des lettres de plusieurs autres personnages eminents; le tout imprimé pour la première fois, d'après les originaux conservés dans la bibliothèque du collége de la Trinité à Cambridge. Plus un appendice, contenant d'autres lettres et divers écrits de Newton, accompagné de notes qui présentent le tableau de sa vie scientifique et un grand nombres de details biographiques. Publié par J. Eddleston, M. A., fellow du collége de la Trinité, avec les fonds libéralement accordés par l'administration du méme collége. 1 volume in 8⁰ de 316 pages, orné d'un beau portrait de Newton. Cambridge. 1850.

Dies ist nämlich die französische Uebersetzung des Titels, die ich für jetzt nur mittheilen kann. G.

Geometrie.

Theodosii Tripolitae Sphaericorum libros tres Ernestus Nizze recognovit, latine redditos emendavit, commentariis instruxit, appendicibus et indice auxit. Cum quattuor tabulis lap. incisis. Berolini 1852. (Georg Reimer.). 8.

Die Sphaerica des Theodosius von Tripolis sind jedenfalls eines der schönsten Ueberbleibsel des griechischen Alter-

thums, und ihr Studium ist für einen Jeden, wer sich für die synthetische Geometrie interessirt, ein sehr geeignetes Hülfsmittel zur Uebung in der feineren Geometrie überhaupt. Wir haben uns daher über die vorliegende neue Ausgabe dieses griechischen Geometers sehr gefreuet, und der schon durch andere ähnliche Arbeiten, insbesondere durch seine Uebersetzung der Schriften des Archimedes (Stralsund. 1824. 4.), verdiente Herr Herausgeber hat sich durch diese Arbeit ein neues Verdienst um das Studium der Geometrie in der strengen Weise der griechischen Mathematiker erworben. Wie schon der Titel besagt, erhalten die Leser hier den griechischen Text, eine lateinische Uebersetzung, einen Commentar, und einen Appendix, welcher die Ueberschrift führt: Appendix, Additamenta complectens tum Arabis integra, tum recentiorum selecta. Ausserdem ist ein Index verborum beigegeben, welcher die in dem Werke vorkommenden griechischen Ausdrücke mit ihren Bedeutungen in lateinischer Sprache enthält, und die Lectüre des Werks in der Ursprache jedenfalls sehr zu erleichtern geeignet ist. Die folgenden Ausgaben sind von dem Herrn Herausgeber benutzt worden: Ed. princ. Jo. Penae. Parisiis. 1558. 4. — Edit. Josephi Huntii. Oxon. 1707. 8. — Sphaericae doctrinae propositiones gr. et lat. nunc primum editae per Cunr. Dasypodium. Argentorati. 1572. 8. — Theodosii de sphaericis libri tres, a Jo. Voegelino restituti etc. Viennae. 1529. 4. — Theodos. lat. p. F. Maurolycum. Messenae. 1558. F. — Wie von dem geehrten Herrn Herausgeber uns brieflich mitgetheilt worden ist, so finden sich in der Beilage eines Schulprogramms von Bruchsal vom Jahre 1847, verfasst von A. Nokk, ausser den bekannten literarischen Nachweisungen, einige Vorschläge zu Texteänderungen, die von ihm dem grösseren Theile nach schon angewendet worden sind, ohne diese Schrift zu kennen, welche auch ausserdem noch empfehlenswerthe Vorschläge zu Texteänderungen enthalten soll. Wir wünschen recht sehr, dass diese neue Ausgabe einer der besten aus dem griechischen Alterthume uns übrig gebliebenen geometrischen Schriften die verdiente Beachtung finden möge. Eine deutsche Uebersetzung des Theodosius hat der Herr Vf. schon früher geliefert.

Astronomie.

Wunder des Himmels oder gemeinfassliche Darstellung des Weltsystems. Von J. J. v. Littrow. Vierte Auflage. Nach dem neuesten Zustande der Wissenschaft bearbeitet von Carl v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Erste und zweite Lieferung. Stuttgart. Hoffmann. Das ganze aus sechs Lieferungen bestehende Werk kostet 2½ Thlr.

Der Werth dieses jetzt in einer vierten Auflage erscheinenden Werks ist allgemein anerkannt, und wie gross die Verbreitung ist, welche dasselbe mit Recht gefunden hat, beweisen seine wiederholten Auflagen genugsam. In der That hat dieses Werk einen sehr grossen Werth, und wir besitzen in unserer Literatur kein anderes Werk, aus welchem jeder Gebildete sich eine so

vollständige Kenntniss der gesammten Astronomie, so weit dies mit nur ganz elementaren mathematischen Kenntnissen, die sich fast bloss auf die bekanntesten Sätze der Elementar-Geometrie und die einfachsten trigonometrischen Begriffe, die übrigens in dem Werke selbst auch grösstentheils erläutert werden, erstrecken, möglich ist, verschaffen könnte, wie aus diesem Werke. Dabei liefert aber dasselbe keineswegs eine blosse Topographie des Himmels, wie so viele andere Werke dieser Art, sondern die Kenntniss, welche aus diesem Werke geschöpft wird, darf wirklich, in dem Maasse, wie die vorausgesetzten mathematischen Kenntnisse gestatten, mit allem Rechte als eine wissenschaftliche bezeichnet werden; der Leser wird durch dasselbe auch in die wichtigsten astronomischen Beobachtungsmethoden, mit Rücksicht auf die dazu erforderlichen Instrumente, eingeführt, und dadurch in den Stand gesetzt, von dem Wege, auf welchem der Astronom zu seinen Resultaten gelangt, sich ein höchst anschauliches Bild zu entwerfen. Wir verweisen in dieser Beziehung z. B. auf das dritte Kapitel über die jährliche Bewegung der Sonne, wo, nach Erläuterung der Einrichtung und des Gebrauchs des Quadranten zum Höhenmessen, die Bestimmung der Polhöhe des Beobachtungsorts durch Beobachtungen, der Declination der Gestirne, der Schiefe der Ekliptik, der Nachtgleichepunkte, überhaupt die Bestimmung der ganzen Lage der Ekliptik gegen den Aequator in so vollständiger und so ungemein deutlicher Weise gelehrt, dann ferner auch die Abnahme der Schiefe der Ekliptik mit den nöthigen historischen Beziehungen besprochen wird, dass über alle diese Punkte dem Leser nichts zu wünschen übrig bleiben kann. In gleich ausgezeichneter Weise sind aber alle übrigen Partieen des Werks bearbeitet, und, so wie für jeden Gebildeten, halten wir dasselbe daher selbst auch für Lehrer der Mathematik und Physik an höheren Unterrichtsanstalten, die öfters der Astronomie ein ins Einzelne gehendes streng mathematisches Studium zu widmen nicht haben Zeit gewinnen können, gegenwärtig für eins der geeignetsten Werke, mit dessen Hülfe dieselben die erwähnte Lücke in ihrem Wissen wenigstens in so weit vollständig ausfüllen können, als es der Zweck des Unterrichts in der Astronomie und mathematischen Geographie an diesen Unterrichtsanstalten erfordert.

Nachdem wir so über den Charakter des Werkes im Allgemeinen berichtet haben, müssen wir noch einige Worte über die Verdienste sagen, welche sich der jetzige Herausgeber des Werks, der verdiente Sohn des leider zu früh verstorbenen J. J. v. Littrow, um die vorliegende vierte Ausgabe erworben hat. Diese Verdienste bestehen hauptsächlich und zunächst darin, dass alle neuen Entdeckungen, mit denen seit dem Erscheinen der früheren Ausgaben die Astronomie in materieller Rücksicht bereichert worden ist, nachgetragen und die numerischen Angaben, in denen das Werk gleichfalls grosse Vollständigkeit darbietet, nach neueren Bestimmungen vielfach berichtigt und ergänzt worden sind. Jedoch ist dies keineswegs das einzige Verdienst, welches Herr Carl v. Littrow sich um die neue Ausgabe erworben hat. Vielmehr haben neuere Beobachtungsmethoden, neue Beweise für die Richtigkeit der Erklärungen verschiedener Erscheinungen überall, wo es erforderlich war, gehörige Berücksichtigung gefunden. Um

dies darzuthun, können wir die Leser auf kein besseres Beispiel hinweisen, als auf die in §. 36. S. 55. bis S. 61. gegebene höchst anschauliche Darstellung der neueren Foucault'schen Pendelversuche zum Beweise der Axendrehung der Erde, zugleich mit Erläuterung der Art und Weise, wie diese Versuche am besten anzustellen sind. Jeder Leser wird sich durch die Darstellung dieser Versuche gewiss sehr angezogen und befriedigt fühlen. Dieses Beispiel soll nur dazu dienen, die Leser darauf aufmerksam zu machen, dass in dieser neuen Ausgabe alles Neue, was seit den früheren Ausgaben in der Wissenschaft sich geltend gemacht hat, sorgfältigst berücksichtigt worden ist.

Möge das Werk auch in seiner neuen Gestalt zur immer weiteren Verbreitung einer gründlichen Kenntniss der herrlichen Wissenschaft, welcher es gewidmet ist, beitragen! Dem Erscheinen der folgenden Lieferungen sehen wir mit Verlangen entgegen, und werden dieselben sogleich, wenn sie in unsere Hände gelangt sind, in diesem Literarischen Berichte anzeigen.

Annalen der k. k. Sternwarte zu Wien. Nach dem Befehl Seiner k. k. apostolischen Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl v. Littrow, Director der Sternwarte u. s. w. Dritter Folge Zweiter Band. Wien. Gedruckt bei Sommer. 1852. 8.

Wir freuen uns sehr, schon jetzt den für Astronomie sich interessirenden Lesern des Archivs das Erscheinen dieses zweiten Bandes der dritten Folge der Annalen der k. k. Sternwarte zu Wien anzeigen zu können, weil wir auf das Erscheinen dieses Bandes schon im Liter. Ber. Nr. LXXII. S. 921. aufmerksam machten. Dieser Band enthält nämlich die Fortsetzung des aus Argelander's Zonenbeobachtungen abgeleiteten Sterncatalogs, über dessen Entstehung, Zweck und grosse Verdienstlichkeit wir schon a. a. O. berichtet haben, weshalb wir uns hier damit begnügen dürfen, den Lesern des Archivs dieses schöne Unternehmen von Neuem zu empfehlen.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. LXXII. S. 921.).

Jahrgang 1852. VIII. Band. 1. Heft. S. 52. Haidinger: Note über die Richtungen der Schwingungen des Lichtäthers in geradlinig polarisirtem Lichte. — S. 82. Kunzek: Bericht über Stellwag's Abhandlung: „Die doppelte Brechung und davon abhängige Polarisation des Lichtes im menschlichen Auge." — S. 91. Doppler: Weitere Mittheilungen, meine Theorie des farbigen Lichtes der Doppelsterne betreffend. — S. 97.

Haidinger: Ueber den Zusammenhang der Körperfarben, oder des farbig durchgelassenen, und der Oberflächenfarben, oder des farbig zurückgeworfenen Lichtes gewisser Körper. — S. 134. **Petzval**: Ueber ein allgemeines Princip der Undulationslehre: Gesetz der Erhaltung der Schwingungsdauer.

Jahrgang 1852. VIII. Band. 2 Heft. S. 165. **Pohl**: Nachtrag zur thermo-aräometrischen Bierprobe. — S. 170. **Steinheil**: Rectification des Gehaltmessers der optischen Bierprobe. — S. 176. **Doppler**: Ein weiterer Beitrag zur Bestimmung der magnetischen Declination, aus einer der absichtlich angestellten Beobachtungen vorausgegangenen Zeitperiode. — S. 241. **Schrötter**: Bemerkungen zu Jacquelain's Aequivalentenbestimmung des Phosphors. — Vorläufige Mittheilungen über das Phosphoroxyd. — S. 246. **Haidinger**: Farbenringe durch Anhauchen auf frischen Theilungsflächen des Glimmers. — S. 275. **Pohl und Schabus**: Tafeln zur Reduction der in Millimetern abgelesenen Barometerstände auf die Normaltemperatur von 0° Celsius. — Diese, Beobachtern des Barometers, welche die, viele Zeit raubenden Reductionen der abgelesenen Barometerstände möglichst abkürzen wollen, nebst ihrer lehrreichen Einleitung, sehr zu empfehlenden Reductionstafeln sind auch in einem besonderen Abdrucke erschienen und zu haben.

Jahrgang 1852. VIII. Band. 3 Heft. S. 331. **Pohl u. Schabus**: Tafeln zur Vergleichung und Reduction der in verschiedenen Längenmaassen abgelesenen Barometerstände. (Auch diese Tafeln sind in besonderen Abdrücken zu haben.). — S. 413. **Kreil**: Ueber den Einfluss des Mondes auf die horizontale Componente der magnetischen Erdkraft. — S. 417. **Schaub**: Beobachtungen des Encke'schen Cometen an der intermistischen Sternwarte in Triest. — S. 422. **Spitzer**: Note über Gleichungen. — S. 442. **A. v. Ettingshausen**: Bericht über zwei Abhandlungen **Theod. Schönemann's**: 1. Ueber die Beziehungen, welche zwischen den Wurzeln irreducibler Gleichungen Statt finden, insbesondere wenn der Grad derselben eine Primzahl ist. 2. Von der Empfindlichkeit der Brückenwagen und der einfachen und zusammengesetzten Hebel-Ketten-Systeme. S. 445. **Pohl**: Beobachtungen während der Sonnenfinsterniss am 28. Juli 1851. — S. 457. **Doppler**: Ein Beitrag zur genaueren Ermittelung des Reibungs-Coefficienten zwischen Eisen und Erde unter verschiedenen Umständen.

Besonders abgedruckt ist auch erschienen:

Karl Fritsch: Kalender der Flora des Horizontes von Prag. Entworfen nach zehnjährigen Vegetations-Beobachtungen.

Necrolog.

Leopold Carl Schulz von Strasznitzki.

Meine ursprünglich an Herrn Director von **Littrow** in **Wien** gerichtete Bitte, mir einen Necrolog des leider zu frühe den Wis-

senschaften entrissenen trefflichen Schulz von Strasznitzki, dem auch das Archiv einige Beiträge verdankt, zu verschaffen, hat, wahrscheinlich auf Herrn von Littrow's Veranlassung, Herr Simon Spitzer in Wien zu erfüllen die Güte gehabt, und den eingesandten Necrolog, den ich nachstehend mittheile, mit den folgenden Zeilen begleitet:

„Ich erfuhr, dass Sie den Wunsch hatten, eine Biographie von dem leider so früh verewigten Professor Schulz von Strassnitzki zu haben. Ich, sein ehemaliger Assistent, war in der Lage, mir eine zu verschaffen, von seinen Söhnen, und bin so frei, dieselbe zu beliebiger Benutzung zu übersenden. Freilich enthält dieselbe wenig von seinem Wirken als Mensch, und als solcher stand er wohl am höchsten, vielleicht unvergleichbar, da. Sein edles Streben war nur befriedigt, wenn er Unglücklichen geholfen, wenn er Arme unterstützt, wnnn er Gebeugte aufgerichtet hatte. Er war der Freund und Wohlthäter seiner zahlreichen Schüler, die armen hatten an ihm einen sorgenden liebevollen Vater. Wenn anch mit der Zeit sein Wirken als Lehrer vergessen werden würde (er war in Wien als ausgezeichneter Pädagog hochverehrt), sein Handeln als Mensch wird denen, die ihn kannten, unvergesslich bleiben.

Wien, am 15. September 1852.

Simon Spitzer,
Supplent der Elementar- und höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Leopold Carl Schulz von Strasznitzki wurde am 31. März 1803 zu Krakau geboren, brachte seine erste Jugendzeit in Galizien, theils in Zloczow, theils in Stry zu, kam in einem Alter von 9 Jahren nach Wien, trat ins Gymnasium. Bereits in der letzten Gymnasial-Classe sprach er dem Professor, der seine Schüler um die Wahl ihres künftigen Berufes befragte, entschieden den Entschluss aus, er wolle sich zu nichts anderem, als zum mathematischen Lehramte wenden. Seine philosophischen Studien absolvirte er mit Auszeichnung, besuchte vorzüglich die Vorlesungen der Herren Professoren v. Littrow, v. Baumgartner, v. Ettingshausen und Rembow. In derselben Zeit liess er sich auch in die Collegien über praktische Geometrie und Baukunst am polytechnischen Institute, dann über Vernunftrecht und Statistik an der juridischen Facultät einschreiben. Als 21jähriger Jüngling ward er zum Adjuncten für die Lehrgegenstände der Mathematik und Physik bei den Herren Professoren v. Baumgartner (jetzigem österreichischen Finanz- und Handelsminister) und Jenko bestellt, und trug in den zweiten Abtheilungen diese Wissenschaften selbst vor. Nach mehreren Concurs-Prüfungen, die immer zur vollen Zufriedenheit der Studien-Hof-Commission ausfielen, gelang es ihm endlich im Jahre 1827 zum Professor der Mathematik am k. k. Lyceum in Laibach ernannt zu werden. Hier gab er nebstdem ausserordentliche Vorlesungen über höhere Mathematik und populäre Astronomie, welche letzteren besonders vielen Anklang

fanden. Die Landwirthschaftsgesellschaft für das Herzogth. Krain erwählte ihn zu ihrem Mitgliede, und später zu ihrem Secretair. Im Jahre 1832 reiste er zur Versammlung der Naturforscher und Aerzte nach Wien. Zwei Jahre später ward er zum Professor der Elementar-Mathematik und praktischen Geometrie an die Franzens-Universität zu Lemberg befördert, allwo er das philosophische Doctorat ablegte, und das Jahr darauf das philosophische Decanat versah. Seine dortige Wirksamkeit dauerte nur 4 Jahre, im Jahre 1838 ward er als Professor der Elementar-Mathematik an das polytechnische Institut nach Wien versetzt. Im Schuljahre $18^{42}/_{43}$ trug er zum ersten Male höhere Mathematik an dieser Lehranstalt vor, und dann abwechselnd ein Jahr Elementar-, das andere Jahr höhere Mathematik. Nebstdem gab er an Sonn- und Feiertagen Vorlesungen über Arithmetik und Algebra für Schullehrer und Handwerker, dann auch über den Gebrauch des englischen Rechenschiebers, musste dieselben jedoch seiner fortwährenden Kränklichkeit wegen in den letzten Jahren aussetzen. Längere Zeit war er Mitglied des österreich. Gewerbvereins. Im April 1848 ward er von Seiten des polytechnischen Instituts zum Vorparlamente nach Frankfurt a. M. gesendet, besuchte dann in Heidelberg den von ihm hochverehrten Geheimrath Professor Schlosser, und machte seine Rückreise in Gesellschaft mehrerer anderer Wiener Abgeordneten über Cöln, Hannover und Berlin. Im Mai 1848 wählten ihn seine Wiener Mitbürger (von der Vorstadt Wieden) in den neu geschaffenen Gemeindeausschuss, in welchem er vorzüglich zur Verbesserung der Lage der Classenlehrer (sogenannten Schulgehülfen) beitrug. Im Studienjahre $18^{49}/_{50}$ begann er Vorlesungen über populäre Astronomie, sah sich aber bald seiner Gesundheit wegen genöthigt, die zwei wöchentlichen Stunden auf Eine zu reduciren, und endlich diese Vorträge ganz aufzugeben. Die auffallende Abnahme seiner Körperkräfte wurde von den Aerzten nur als Folge seiner übergrossen Anstrengung dargestellt, und ihm der Curort Gastein angerathen. Das dortige Bad wirkte für einige Zeit günstig auf seine Gesundheit, nach einigen Monaten stellte sich jedoch seine frühere Schwäche wieder ein. Zur neuen Organisirung der Gymnasien und Realschulen ward er vom hohen Ministerium für Cultus und Unterricht vielfach zu Rathe gezogen, und im Februar 1851 zum Commissär für Mathematik bei den Gymnasial-Lehramts-Prüfungen ernannt, welches Amt er bis wenige Monate vor seinem Tode versah. Im Frühling 1851 besserte sich sein Gesundheitszustand allmälig, so dass er sich stark genug fühlte, der Sendung des Unterrichts-Ministeriums zur Welt-Industrie-Ausstellung nach London nachzukommen. Er machte sich dort noch ausserdem mit der Einrichtung der verschiedenen Lehr- und Bildungsanstalten bekannt, vor allem interessirten ihn die Adult-Schools (Schulen für Erwachsene, die bereits in einer praktischen Thätigkeit stehend, das, was ihnen an Theorie abgeht, auf diese Weise nachzuholen streben). Beinahe alle diese Anstalten werden in England durch Private (Gesellschaften) unterhalten; es lag daher auch in seiner Absicht, unsere Bürgerschaft und vorzüglich die Wiens durch eine Broschüre darauf aufmerksam zu machen, und einen ähnlichen Geist in ihnen zu erwecken. Auf der Rückreise hielt er sich einige Tage in Paris auf,

berührte einzelne deutsche Städte, und war in Gotha wieder bei der Versammlung der Naturforscher zugegen. Im September 1851 gelangte er nach Wien zurück. Im März d. J. wurde er von einem ausgezeichneten Wiener Arzte von der dasigen Hochschule aufs Genaueste untersucht, und dieser sprach schon damals die Hoffnungslosigkeit seines Zustandes aus. Durch eine zweckmässige Diät und vollkommene Schonung blieb er so viel als möglich von Leiden verschont, so dass er selbst noch fortwährend hoffte, und sich Alles von der Wirkung des Vöslauer Bades versprach. Doch nach 11 Tagen, die er dort zubrachte, war er eine Leiche. Seine Krankheit bestand in einer Entartung der Nieren, die in ihren abnormen Functionen den Harn fortwährend mit Eiweiss schwängerten, allen Organen ihre Kraft benahmen, und zuletzt ein Lungen-Oedem herbeiführten. Er starb am 9. Juni 1852 an einem Mittwoch in Vöslau, um die sechste Stunde des Nachmittags. Seine letzten Worte, beiläufig um 11 Uhr V.-M. waren, zuerst leise, dann aber auf Befragung vernehmlich, mit Anstrengung, jedoch mit Bedeutenheit gesprochen: „Alle guten Geister loben Gott den Herrn." — Am darauf folgenden Freitage war das Leichenbegängniss, zu dem ungeachtet der grossen Entfernung von 4 Meilen, der Director und alle Professoren des polytechnischen Institutes, dann eine sehr zahlreiche Anzahl von Studirenden hinauskamen, welche letzteren den Sarg trugen und ihn ins Grab hinabsenkten. Die Theilnahme war gross und allgemein für den edlen Dahingeschiedenen.

Seine Werke in chronologischer Ordnung waren folgende:

1) Das geradlinige Dreieck und die dreiseitige Pyramide, Wien, Heubner 1827.
2) Elemente der reinen Mathematik für den akademischen Gebrauch 1. Thl. Algebra, Wien, Heubner 1831.
3) Elemente der reinen Mathematik für den akademischen Gebrauch 2. Thl. Geometrie, Wien, Heubner 1835.
4) Neue Methode zur Auffindung reeller Wurzeln höherer numerischer Gleichungen, Wien, Heubner 1842.
5) Anleitung zum Gebrauche des englischen Rechenschiebers, Wien, Lohrmann 1843.
6) Handbuch der besondern und allgemeinen Arithmetik für Praktiker, Wien, Gerold 1844. 2. Aufl. 1848.
7) Handbuch der Geometrie für Praktiker, Wien, Gerold 1850.
8) Der mathematisch-astronomische Theil zu Galetti's Weltkunde (10. Aufl.), Pesth bei Hartleben, auch besonders abgedruckt (Pesth 1847.).
9) Grundlehren der Analysis, verfasst zu Laibach im Jahre 1829, lithographirt 1843, in Druck gelegt 1850 bei Gerold.
10) Anfangsgründe der Geometrie aus der Anschauung begriffsmässig abgeleitet, im Auftrage des Unterrichtsministeriums für die 1. Grammaticalclasse ausgearbeitet, Wien, Gerold 1851.

LXXV.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Die Fortsetzung des interessanten Referats von Biot über den wichtigen Briefwechsel zwischen Newton und Cotes (m. s. Literar. Ber. Nro. LXXIV. S. 937.) findet man im Journal des Savants. Avril. 1852. p. 217.

Lebenslinien zur Geschichte der exacten Wissenschaften seit Wiederherstellung derselben von J. C. Poggendorff, Mitglied der Academie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin 1853. 4. 1 Thlr. 10 Sgr.

Diese Lebenslinien zur Geschichte der exacten Wissenschaften sind bestimmt, die chronologischen Data ihres biographischen Theils zu sammeln, und sind der Vorläufer eines grösseren biographischen Werkes, durch welches später eine fühlbare Lücke in unserer Literatur ausgefüllt werden soll. Den Inhalt dieser Schrift bilden zunächst drei Tafeln: die eine für das sechszehnte und siebzehnte, die andere für das achtzehnte, die dritte für das neunzehnte Jahrhundert, in denen in einer graphischen Darstellung die hauptsächlichsten Lebensdata von 150 Personen, die sich um die Cultur der exacten Wissenschaften verdient gemacht haben, angegeben sind. Die Namen sind alphabetisch geordnet, auf der rechten Seite der gezogenen horizontalen Linien stehen die Namen der Betreffenden, links die Geburtsorte, die Endpunkte dieser Horizontalen geben in Bezug auf den oben und unten befindlichen Jahreszeiger oder Jahresmaasstab Geburts- und Sterbejahr an. Der Grundgedanke dieser biographischen Tafeln ist von Priestley's Chart of Biography entnommen,

die vor etwa einem Jahrhundert erschienen ist. Den Tafeln vorangeschickte Erläuterungen enthalten die Namen wieder in alphabetischer Ordnung, und kurz die hauptsächlichsten Leistungen der in den Tafeln aufgenommenen Personen.

Weil mich die Schrift interessirte, ging ich mit ihr in meine Bibliothek, um mich einigermassen von ihrer Vollständigkeit zu überzeugen. Da fand ich aber freilich sehr grosse Lücken, und Männer wie folgende dürften doch in einer solchen Schrift, die manche andere viel weniger verdiente Namen aufgenommen hat, wohl schwerlich fehlen. Ich führe die Namen ohne alle bestimmte Ordnung an, wie sie mir gerade aus meinen Büchern entgegentreten.

Hindenburg, Georg Simon Klügel, Lacroix, Montmort, Friedrich Theodor Schubert, Schooten, Gregorius a St. Vincentio, Montucla, Soldner, Littrow, Gardiner (sehr berühmte Logarithmentafeln, in der Mathematik berühmter als die des aufgenommenen Vega), Sherwin eben so, Schumacher, Le Seur und Jacquier, Don George Juan (berühmtester mathematischer Schriftsteller über Schiffsbau und Schiffsmanoeuvre), Horrebow, Belidor, ja sogar Christian Freiherr von Wolff fehlt, und dieser war, wenn er auch nicht gerade Entdeckungen gemacht hat, doch wohl eine wirkliche Lebenslinie für das Studium der exacten Wissenschaften, wenigstens in Deutschland; deshalb vertrieben ihn ja auch die Theologen aus Halle und erst der alte Fritz rief ihn zurück, Tausende von Studenten und Bürgern holten ihn ein (der Herr Vf. hätte sollen Gottsched's Lobschrift auf Wolff nachsehen), Pasquich, Petrus Ramus, Joh. Keill, Pitiscus, Regiomontan, Adrianus Romanus, Joh. Faulhaber, Daniel Schwenter, Bugge, Jac. Craig, Steph. de Angelis, Hugh Hamilton, Moritz v. Prasse, Mollweide, Töpfer (Combinatorische Analysis), Tetens (eben so), Reyneau, Lorgna, Landen, Conte di Fagnano, de Bougainville (Calcul intégral), Paoli, Buzengeiger, Walmesley, Manfredi, de Buquoy, Langsdorf, Nic. Fuss, Lexell, Weingärtner (Comb. Anal.), J. v. Pacassi, Cousin, Späth, Svanberg, Prosperin, Melanderhielm, Hennert, Lulof, Mallet, Ideler, Lowitz, Tacquet, Dechales, Joh. Caramuel, Doppelmayer, Zahn (Oculus artificialis), Johann de Sacrobosco, Ougtred, Adrian Metius, Duvillard, Robertson, Franchini, Girard, Ch. Kirch (Berliner Astronom), Silberschlag (Berliner, um Mathematik und Naturwissenschaft verdienter Geistlicher), Lord Brounker (Kettenbrüche), de Gua, Bragelogne, Cramer, Braikenridge, Christoph Rudolph aus Jauer (berühmter Cossist), Paul Halken (eben so), Joh. Scheybl, de Beaune, Johann Hudde, de Slüse, Thomas Baker, Campbell, Lagny, Foncenex, Guisnée, Bachet (berühmter Herausgeber des Diophant). Von der berühmten Familie der Bernoulli's giebt der Herr Vf. nur drei an; es giebt deren aber, ausser dem Stammvater aller, noch zehn, deren sehr vollständige, von Herrn Professor Bernoulli in Basel mitgetheilte Genealogie der Herr Vf. im Archiv Thl. VIII. Literar. Ber. Nro. XXXII. S. 484. hätte finden können.

Solche Namen, die alle in den „Lebenslinien" fehlen, und theilweise weit berühmter sind als die sich dort findenden,

liessen sich noch in grosser Menge aufführen, denn die Geschichte der exacten Wissenschaften, namentlich der Mathematik, ist ungemein reich an berühmten Namen, eben weil diese Wissenschaften nur sehr langsam, aber in stetigem sicheren Fortschreiten zu der Höhe gelangt sind, auf der sie sich jetzt befinden, und weil oft durch eine einzige, an sich sehr einfach scheinende Idee, die in der Geschichte nothwendig den Namen ihres Erfinders tragen muss, grosse Fortschritte der Wissenschaft herbeigeführt worden sind.

Bedauern müssen wir auch, dass der Herr Vf. seine „Lebenslinien" nicht noch etwas weiter rückwärts verlängert hat, bis er zu den Arabern gelangt wäre, die jedenfalls Vieles für die Zeit, auf welche sich die Lebenslinien nur erstrecken, vorbereitet haben. Und was für Schätze namentlich jetzt in der arabischen Literatur aufgefunden worden sind, ist z. B. aus dem Literarischen Berichte Nro. LXVII. S. 861 des Archivs zu ersehen.

In den Erläuterungen sind uns manche Ungenauigkeiten aufgestossen. Der berühmte Verfasser der Mondtafeln heisst nicht „Burg" sondern „Bürg". — „Cavalieri" ist jedenfalls falsch; es muss heissen „Cavaleri" oder auch vielleicht „Cavalleri", worüber wir eine bestimmte Entscheidung in diesem Augenblicke nicht geben können, aber „Cavalieri" ist unter jeder Bedingung falsch. Bei Fermat ist als Hauptverdienst die „Zahlenrechnung" angeführt; dies muss „Zahlenlehre" oder „Theorie der Zahlen" heissen; denn „Zahlenrechnung" giebt einen ganz falschen Begriff. — „Demoivre" ist eine ganz falsche Schreibart; auf keinem seiner Werke schreibt sich dieser berühmte englische Mathematiker (nach Geburt übrigens Franzose) so, sondern immer „De Moivre", und er heisst in der Mathematik auch allgemein kurz „Moivre". — Eben so ist „L'Huillier" in doppelter Weise ganz falsch; es muss „Lhuilier" heissen. Auch hätte bei diesem trefflichen Mathematiker nicht seine „Exposition élémentaire des calculs supérieurs", sondern das neue und grössere lateinische Hauptwerk: „Expositio elementaris Principiorum calculi differentialis et integralis etc." angeführt werden sollen. — „Mercator" ist als Erfinder der „Karten mit wachsender Projection" angeführt, was geradezu einen Nonsens enthält. Diese vorzüglich in der Schifffahrt bei der sogenannten runden Schifffahrt gebräuchlichen Karten heissen „Karten mit wachsenden Breiten" oder „Reducirte Karten". — Pingré's Cométographie ist nicht 1784, sondern der erste Theil schon 1783 erschienen. — Bei dem Astronomen „Wendelin" hätte erwähnt werden müssen, dass er zuerst nach Aristarchs Methode die Entfernung der Sonne von der Erde durch Beobachtungen bestimmt habe; dabei kommt freilich auch eine Mondbeobachtung vor, aber der Zweck ist dabei gar nicht der Mond, sondern recht eigentlich die Sonne. — Hinter „Stevinus" schreibt der Herr Vf. „Stevens?" Wir antworten kurz: „Stevin" (m. s. das treffliche „Mémoire sur la vie et les travaux de Simon Stevin. Par Steichen. Bruxelles. 1846. 242 Seiten; auch eine kürzere sehr

schöne Schrift von Quetelet über diesen berühmten niederländischen Mathematiker, der als Ingenieur im Dienste des Prinzen Moritz von Nassau stand).

Schon das Vorhergehende, was sich leicht noch vermehren liesse, wird hinreichend sein, namentlich jungen Mathematikern, die, weil sie sich oft wegen einer zweckmässigen Anleitung zur Geschichte ihrer Wissenschaft in Verlegenheit befinden, vielleicht am Ersten nach diesen Lebenslinien greifen dürften, in jeder Beziehung sehr grosse Vorsicht bei dem Gebrauche derselben anzuempfehlen. G.

In den „Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern. No. 245 — No. 247. S. 184.“ hat Herr R. Wolf ein Bruchstück aus einer von Lhuilier in Genf gehaltenen akademischen Rede mitgetheilt, welches in mehreren Beziehungen für die Geschichte der Mathematik interessant ist. Dasselbe enthält eigentlich die Geschichte des mathematischen Lehrstuhls zu Genf während nahe einem Jahrhundert, und dabei sehr interessante Notizen über vier verdiente Genfer Mathematiker: G. Cramer, J. L. Calandrini, G. Necker de Germagny und vorzüglich C. L. Bertrand. Der erstere dieser vier Männer, Euler's Zeitgenosse, ist wohl durch seine ausgezeichnete „Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques. Génève. 1750. 4.“ jedem Mathematiker bekannt; dass die beiden folgenden es weniger sind, darf nicht befremden, da sie, bei aller Trefflichkeit ihrer Kenntnisse, wenig geschrieben haben; dass aber auch der letzte, nämlich Bertrand, im Allgemeinen nicht sehr bekannt ist, ist sehr befremdend und im höchsten Grade zu bedauern, da das von demselben herausgegebene grosse Werk: „Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques prise dans toute son étendue. T. I. et II. Génève. 1778. 4.“ einen ungemeinen Reichthum an neuen Ideen und Sätzen enthält, und daher von jüngern Mathematikern, die namentlich in der Geometrie leider nur zu oft bloss nach dem Neuesten greifen, was in der genannten Wissenschaft, wo gerade die älteren Werke viele Goldkörner enthalten, besonders zu bedauern ist, nicht so unbeachtet gelassen werden sollte, wie dies jetzt der Fall zu sein scheint. Da die von Herrn Wolf gemachte Mittheilung sehr geeignet ist, das Andenken an die genannten trefflichen Mathematiker zu erneuern, und zugleich überhaupt einen interessanten Beitrag zur Literaturgeschichte eines kleinen Freistaats liefert, der von jeher durch die den Wissenschaften gebrachten Opfer sich in rühmlichster Weise hervorgethan hat, so glaube ich, dass es den Lesern des Archivs angenehm sein wird, wenn ich dieses Bruchstück aus Lhuilier's akademischer Rede hier folgen lasse:

„Avant que les sciences philosophiques eussent acquis l'étendue et le degré de perfection auxquelles elles ont été portées

dans ce siècle, on pouvait peut-être sans danger confier aux mêmes instituteurs le développement de deux sciences, qui, liées par un grand nombre de points de contact, se prètent si souvent un secours mutuel. Aussi cette réunion a-t-elle eu lieu dans notre patrie jusqu'à l'année 24 de ce siècle. A cette époque une heureuse circonstance fit sentir au gouvernement l'importance qu'il y aurait à détacher l'une de l'autre ces deux sciences de l'enseignement public, et à ne pas mettre des entraves aux progrès de l'une et de l'autre en chargeant les mêmes professeurs de leurs développement. G. Cramer *) et J. L. Calandrini **), deux amis, rivaux par leur talents, par l'étendue de leurs connaissances pas proportionnées à leur jeunesse, et par leur habilité à les communiquer, avaient soutenu avec un égal succès les épreuves pour obtenir la chaire de philosophie. Les électeurs, en conférant cette vocation à A. De la Rive †), regretèrent de n'avoir pas à donner autant de suffrages qu'il y avait de candidats. Des magistrats éclairés, convaincus que la culture des sciences doit être une des sources de la gloire la plus solide à laquelle notre petitesse nous permette d'aspirer, et une des bases de notre prospérité publique, sentirent l'importance d'attacher à notre Académie deux jeunes savants qui venaient de donner les preuves les plus brillantes de leur capacité. L'enseignement des mathématiques fut dès lors séparé de celui des autres branches de la philosophie, et les deux nouveaux professeurs remplirent conjointement les fonctions de la nouvelle chaire jusqu'à l'époque où la promotion de Calandrini à la chaire de philosophie laissa Cramer seul en possession de l'enseignement des mathématiques.

„Calandrini n'est pas seulement connu de ses compatriotes auxquels il a rendu les services les plus distingués, d'abord dans ses fonctions académiques et en suite dans les premières places de la magistrature. Malgré l'extrême modestie, qui lui faisait fuir la réputation extérieure à laquelle ses talents lui permettaient d'aspirer, — il est cependant connu par quelques productions qui prouvent l'étendue et la profondeur de ses connaissances; le commentaire sur les principes de Newton qui a paru sous le nom des Pères Le Seur et Jacquier, contient des développements sur les matières les plus difficiles qui sont de la main de notre compatriote ††), et il a le premier montré l'insuffisance des calculs du mathématicien anglais, relatifs à un des points fondamentaux de la théorie de la lune.

---

*) 1704 — 1752. Siehe Senebier, histoire littéraire de Genève III., 104, und Mittheilungen 1846, pag. 23.

**) 1703 — 1758. Siehe Senebier, III, 112, und Mittheilungen 1846, pag. 219.

†) 1698 — 1760. Siehe Sennebier III, 103.

††) Alle mit einem Astérique bezeichneten Noten dieser schönen Ausgabe der Principien sind von Calandrini.

„Cramer, profitant du loisir que lui donnait l'alternative de ses fonctions académiques, parcourut les principales contrées de l'Europe, et prolongea son séjour dans les villes qui lui offraient le plus de relations littéraires. Il contracta des liaisons intimes avec les Bernoulli à Bâle, et ne dédaigna pas de devenir leur disciple; à Londres et à Paris, il se lia avec les hommes de lettres et les mathématiciens les plus profonds que ces villes réunissaient en grand nombre. Il devint membre des sociétés savants les plus distinguées et obtint un grand nombre des titres de noblesse littéraires d'autant plus précieux à l'homme-de-titres qui en est revêtu, que le hazard de la naissance, et le mérite trop rarement héréditaire des ancêtres, n'en affaiblissent point le droit de propriété. Parmi les nombreux ouvrages de Cramer, qu'il me suffise de citer son Introduction à l'analyse des lignes courbes, qui publiée en même temps que l'Introduction à l'analyse de l'infini d'Euler, rivalise avec la partie de ce dernier ouvrage qui est relative au même objet.

„Après un intervalle que je dois passer sous silence, la chaire des mathématiques fut occupée pendant un temps trop court par le G. Necker de Germagny*) digne élève et ami d'Alembert, et qui a donné dans des mémoires profonds des preuves de l'étendue de ses connaissances. Mais ceux de ses concitoyens qui ont le bonheur d'entretenir avec lui des relations qui les mettent en état d'aprécier ses qualités sociales, qui connaissent le vif intérêt qu'il prend au bonheur de notre patrie, et l'empressement avec lequel il dirige ses facultés et ses lumières vers tout ce qui a rapport au bien public, oublie ses titres littéraires pour ne s'occuper que des droits qu'il a comme citoyen à leur estime, à leur attachement et à leur reconnaissance.

„Le C. L. Bertrand **), élève d'Euler et digne des leçons de ce grand homme, membre de l'académie des sciences et belles-lettres de Prusse, cultiva de bonne heure les sciences exactes. Après avoir rempli pendant prés de trente-cinq années la chaire des mathématiques, avec un zèle couronné par le succès avec lequel il a formé de nombreux élèves, il a désiré jouir du repos que la durée de sa vocation lui avait mérité. Ceux de nos compatriotes qui ont eu comme moi le bonheur de profiter de ses instructions l'accompagnent de leur regrets et de leur reconnaissance; je ne crains pas de me tromper en les jugeant d'après mon propre cœur. L'originalité de sa méthode qui décèle le génie, l'exactitude et la vigueur de ses procédés, la multitude de

---

*) Louis Necker wurde 1730 geboren, 1757 Professor der Mathematik. Siehe Senebier III, 145.

**) Louis Bertrand wurde am 3. October 1731 zu Genf geboren, versah von 1761—1795 die Professur der Mathematik in Genf und starb daselbst am 15. Mai 1812. Siehe über ihn Senebier III, 145, und namentlich Bibliothèque britannique. Tom. 50. Sciences et arts. Pag. 173—181.

matières intéressantes qu'il a traitées, rendent son grand ouvrage quoique sous un titre élémentaire, précieux même à ceux qui ont déjà fait de progrès dans la science *). Les applications qui y sont contenus sont propres à piquer la curiosité par leur importance et par la manière dont elles y sont présentées. Il contient les germes nombreux de nouvelles recherches, et depuis sa publication le C. Bertrand a poursuivi avec succès ses profondes méditations sur quelques-uns des chefs qui y son traités. Nous attendons avec une juste impatience ses travaux sur la solution générale des équations. Lors même qu'il ne parviendrait pas à surmonter complètement des difficultés qui jusqu'à présent ont arrété tous les mathématiciens, l'ardeur infatigable avec laquelle il a poursuivi ses calculs ne doit nous laisser aucun doute qu'ils ne présentent des découvertes importantes**).

„Le succés qu'on obtient dans la culture d'une science est un lien qui y attache fortement, et il n'est reservé qu'à un petit nombre de génies privilégiés d'étendre et de varier leur occupation sur un grand nombre d'objets. Le C. Bertrand jouit de cette heureuse disposition. Il n'est étranger à aucune des branches des sciences philosophiques. Les discours qu'il a prononcés dans cette cérémonie littéraire et patriotique, décèlent le philosophe profond et ingénieux. Il se plait à remonter aux causes des grands phénomènes de la nature et de ceux surtout qui concernent plus particulièrement le globe que nous habitons. Il a traité de l'électricité comme cause de la foudre, avant que les principes de Franklin et le succès avec lequel il a désarmé les cieux fussent connus et admis aussi universellement qu'ils méritent de l'être, — et ensuite de deux fléaux destructeurs de notre globe, la grêle et les tremblemens de terre. Avant l'expédition de Cook dans la mer du Sud, il développa les raisons qui le portaient à croire que cet intrépide navigateur ne trouverait point de terres australes. Il a exposé avec la profondeur et la précision qui lui sont propres la nature des différens fluides élastiques, dont la découverte

---

*) Développement nouveau de la partie élémentaire des mathémaques prise dans toute son étendue: par Louis Bertrand. Genève 1778. 2 vol. in 4.

**) Da die Bibliothèque britannique nicht immer bei Handen ist, so mag ihre Notiz über Bertrand's Bemühungen um die allgemeine Lösung der Gleichungen hier beigefügt werden: „On sait que jusqu'à présent les solutions générales des équations s'arrêtent au quatrième degré, et que les pouvoirs de l'analyse y ont trouvé leurs limites, même dans main des plus grand mathématiciens. M. Bertrand avait eu le courage d'entrer dans la route qui pouvait conduire à cette conquête, par la solution d'un problême qui offrait quatre-vingt-dix-huit équations: il travailla sans interruption, pendant sept ou huit années, à l'élimitation des inconnues de ces équations, avec une sagacité, une constance et un ordre qu'on ne peut assez admirer. Il avait l'espoir d'arriver au terme où il verrait si le problême était déterminé, lorsque les troubles de sa patrie l'arrachèrent à ces occupations tranquilles, et l'engagèrent à en faire un généreux sacrifice, pour se dévouer au bien public."

a changé la face d'une science, qui entre les mains des chimistes modernes devient aussi lumineuse qu'elle a été envelopée de ténèbres. L'activité de son genie, ne lui permettant pas une retraite oisive, il s'y occupe du développement de ses vues géologiques, qui ont fait le sujet de son dernier discours, et il nous tarde de voir paraître le fruit de ses recherches et de ses méditations *).

„Je n'entreprendrai pas de dépeindre comme littérateur le Mathématicien philosophe dont nous regrettons la retraite. C'est dans la lecture des poètes les plus célèbres de l'antiquité, qu'il cherche le délassement à ses travaux les plus pénibles. Les ouvrages qu'il a composés sur l'instruction publique sont entre les mains de tous nos concitoyens; conduit par le patriotisme, appuyé sur une heureuse expérience, il y plaide avec chaleur et avec une connaissance approfondie la cause dont il est le digne avocat.

„Ce n'est pas seulement aux mathématiciens, aux philosophes, aux littérateurs, que la retraite du C. Bertrand est sensible; elle doit être une cause de deuil pour tous nos concitoyens. Dans les dangers imminens de notre patrie, il lui fit le plus grand des sacrifices auxquels puisse se resoudre un homme de lettres, qui a cultivé avec succès des sciences amies de la paix et de la tranquillité. Abandonnant ses études favorites, il sortit de la retraite de son cabinet pour se plonger dans le tourbillon des affaires publiques: dans le plus fort de l'orage il mit la main au gouvernail, et n'épargna ni soins ni travaux pour sauver notre frêle nacelle."

*) Bertrand legte seine geologischen Ansichten, in deren Bearbeitung er die durch die Revolution in seinem Vaterlande hervorgerufenen Wirren zu vergessen suchte, in dem Werke: „Renouvellemens périodiques des continens terrestres. Paris, an VIII. 8." nieder.

LXXVI.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Für Gymnasien und Gewerbschulen bearbeitet von Friedrich Hofmann, Prof. der Mathem. am k. Gymnasium zu Bayreuth. In drei Theilen. Erster Theil. Arithmetische Aufgaben. Bayreuth. Grau. 1852. 8. 15 Sgr.

Den Lehrern der Mathematik wird hier eine neue Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra geboten, welche aus drei Theilen bestehen soll. Der erste, die arithmetischen Aufgaben, d. h. der die Aufgaben aus der gewöhnlichen Rechenkunst enthaltende Theil, liegt uns vor, und wir müssen gestehen, dass uns lange keine derartige Sammlung vorgekommen ist, welche uns so angesprochen hätte, wie diese. Man sieht es derselben auf den ersten Blick an, dass sie von einem wirklichen Mathematiker angelegt worden ist, und nicht, wie dergleichen Sammlungen grösstentheils, von einem gewöhnlichen pädagogischen Rechenkünstler, der bei aller seiner eingebildeten mathematischen Weisheit doch meistens nicht zu beurtheilen versteht, was dem künftigen eigentlichen mathematischen Unterrichte, wenn derselbe namentlich auch für das Leben wahre Frucht tragen soll, nützet und frommet. Vor allen Dingen müssen wir die mathematische Klarheit und Bestimmtheit, freilich aber auch meistens grosse Kürze, hervorheben, womit alle diese Aufgaben gefasst sind, in welcher Beziehung die vorliegende Sammlung arithmetischer Aufgaben uns lebhaft an den rücksichtlich dieser mathematischen

Klarheit und Bestimmtheit, — Durchsichtigkeit für den Schüler, möchten wir sagen, — nach unserer Ansicht noch unübertroffenen algebraischen Meier Hirsch erinnert hat. Ferner ist hervorzuheben der unausgesetzte, überall völlig richtige Gebrauch der mathematischen Zeichen, wodurch die Schüler frühzeitig an denselben gewöhnt werden, indem sich aber der Herr Vf. nirgends Willkührlichkeiten im Gebrauch dieser Zeichen gestattet, wie zu grossem Schaden für den künftigen eigentlichen mathematischen Unterricht leider häufig in Rechenbüchern geschieht.

Endlich halten wir es für sehr zweckmässig und für einen glücklichen Gedanken, dass der Herr Vf. in den Wortausdrücken der einzelnen Aufgaben sich überall der Buchstaben als allgemeiner Symbole bedient hat, was wieder dazu dient, die Schüler schon früh an den Gebrauch dieser Symbole zu gewöhnen, was für den späteren mathematischen Unterricht so ungemein wichtig ist. Als ein Beispiel geben wir aus den Aufgaben über Multiplication und Division benannter Zahlen die folgende Aufgabe, wie sie uns gerade in die Augen fällt:

„Wie gross ist der Umfang einer Welle, wenn sich ein Faden, dessen Länge *a* Fuss, *b* Zoll, *c* Linien ist, *n* mal um dieselbe winden lässt?

$a =$	257	250	210	232
$b =$	10	11	11	2
$c =$	1	7	3	—
$n =$	107	71	81	56“

Dass hierdurch zugleich eine sehr grosse Reichhaltigkeit an Aufgaben erzielt werden konnte und worden ist, versteht sich von selbst. Bei den Geldrechnungen hat sich der Herr Vf. ganz recht hauptsächlich und gleichmässig der Rechnung mit Gulden und Kreuzern und mit Thalern und Silbergroschen bedient. Auf Physik und Chemie ist vielfach Rücksicht genommen, und sowohl dieses wissenschaftliche als auch das kaufmännische Bedürfniss scheint durch die angehängten Tafeln hinreichend befriedigt zu sein. Resultate sind den Aufgaben nicht beigefügt. Wenn wir dies auch im Ganzen billigen, so müssen wir aber doch dringend wünschen, dass der Herr Vf. die Resultate so bald als irgend möglich, in einem besonderen Hefte herausgebe, was wir für den Gebrauch des Lehrers, und auch für den fleissigen Schüler, der privatim von diesen Aufgaben zu seiner Uebung Anwendung machen will, unerlässlich halten. Wir haben bei diesem Elementarbuche uns etwas länger als gewöhnlich verweilt, weil wir uns für verpflichtet hielten, die Lehrer, welche in dem Rechenunterrichte hauptsächlich eine Vorbereitung für den künftigen strengen mathematischen Unterricht erblicken, im Interesse dieses Unterrichts au dasselbe aufmerksam zu machen. Die folgenden Theile werden wir sogleich nach ihrem Erscheinen anzeigen.

Essai sur la Metaphysique du calcul intégral. Par C. A. Agardh, Evêque de Carlstad etc. Etudes de loisir. Stockholm. 1849. 8.

Apperçu de la méthode des séries pour résoudre les équations numériques. Par C. A. Agardh, Evêque de Carlstad etc. Stockholm. 1849. 8.

Höchst erfreulich ist es zu sehen, wie der auf anderen wissenschaftlichen Gebieten hochberühmte Verfasser der beiden obigen Schriften im höheren Alter seine Musse mathematischen Studien widmet. Sind diese beiden Schriften auch in einem älteren mathematischen Geiste verfasst, so enthalten sie doch manche feine Bemerkungen, wie von einem in vielen Beziehungen so ausgezeichneten Gelehrten sich nicht anders erwarten lässt, weshalb wir dieselben den Lesern des Archivs recht sehr zur Beachtung empfehlen. Wer wie der geehrte Verfasser auf den Titel einer Schrift **sur la Métaphysique du calcul intégral** aus Ueberzeugung das Motto setzen kann:

> „Haec studia senectutem oblectant, adversis rebus perfugium ac solatium praebent. (Cicero pro Archia.)"

kann wahrlich diesen Studien, wie es bei anderen wissenschaftlichen Beschäftigungen nur zu oft geschieht, nie fremd geworden sein, und verdient deshalb, bei so eminenten anderen wissenschaftlichen Verdiensten, unsere höchste Bewunderung und Verehrung.

Die folgenden auf der Universität Lund in Schweden neuerlich erschienenen analytischen Dissertationen empfehlen wir der Beachtung unserer Leser:

De aequatione quinti gradus quousque licet reducenda. Dissertatio, quam venia ampliss. Facult. Philos. p. p. Mag. Jacobus Nicolaus Granlund et Emil Ödmansson. Lundae. 1852. 4.

Elementära Reglor för Rotutdragning. Akademisk Afhandling, hvilken under Praesidium af C. J. Ds. Hill, Math. Prof. för Filosofiska Doktorsgraden utgifves af Nils Theodor Sylvan. Lund. 1852. 4. I. (II. Fortsetzung Theodor C. H. Wenster. Lund. 1852. 4. unter demselben Präses.)

De magnis Logarithmi integralis valoribus apte computandis. Dissertatio quam publico examini subjicit Fredr. Theod. Blomstrand, Respondente Arv. Car. Nerman. Lundae. 1852. 4.

Sur les conditions de l'intégrabilité de l'équation différentielle du second ordre

$$\varphi_3(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\varphi_2(x)\frac{\partial y}{\partial x}+\varphi_1(x)y=0,$$

$\varphi_n(x)$ désignant une fonction entière de x du dégré n.

Par A. F. Svanberg. (Extrait des mémoires de la Soc. des Sciences à Upsal.) A Upsal. 1851. 4.

Den besonderen Fall dieser Differentialgleichung, wenn

$$\varphi'''_3(x) = \varphi''_2(x) = \varphi'_1(x) = 0,$$

ist, also $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ respective ganze rationale algebraische Funktionen des 0ten, 1sten, 2ten Grades sind, hat Liouville im Journal de l'école polytechnique, Tome XIII. behandelt. Der Herr Verfasser lehrt aber in der vorliegenden Abhandlung die obige Differentialgleichung zu integriren, wenn $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ ganze rationale algebraische Funktionen respective vom 1sten, 2ten 3ten Grade sind, so dass also die von Liouville betrachtete Gleichung unter der von dem Herrn Verfasser behandelten als ein besonderer Fall enthalten ist. Wir halten daher diese Abhandlung für einen sehr guten Beitrag zur Integralrechnung, und empfehlen sie der Aufmerksamkeit unserer Leser recht sehr.

Verhandeling over de Methode der kleinste Quadraten. Eerste Afdeling. Tweede Gedeelte. Door G. J. Verdam, Hoogleeraar aan de Universiteet tee Leiden. Groningen. 1852. 4.

Den ersten Theil der ersten Abtheilung dieses grossen und ausgezeichneten Werkes über die Methode der kleinsten Quadrate haben wir mit gebührendem Lobe im Literar. Ber. Nr. LXIX. S. 884. angezeigt, und freuen uns sehr, dass die Fortsetzung so bald gefolgt ist, mit deren Inhaltsanzeige wir uns im Nachstehenden begnügen müssen:

Zevende Hoofdstuk. Over de toepassing des hoofdregels van de methode der kleinste quadraten, indien aan de waarnemingen, met welker uitkomsten de lineaire vergelijkingen der feilen zijn opgemaakt, of wel, indien aan die uitkomsten een *zelfde* graad van naauwkeurigheid niet kan toegekend worden. Verklaring der begrippen van maat van juistheid en van gewigt. Bepaalde aanwijzing van het gebruik, bij de berekening der waarshijnlijke getalwaarde van een enkel element, enz. — Achtste Hoofdstuk. Over het bepalen der grootte van fouten of feilen, — inzonderheid van de zoogenaamde middelbare en waarschijnlijke fouten of feilen, — betrekking hebbende tot de uitkomsten van waarneming, en tot die van berekening der getalwaarde van een enkel element. Formulen of regels, voor het berekenen der getalwaarden van de grootte en der grenzen van grootte dier feilen. Voorbeelden, opmerkingen, enz. — Negende Hoofdstuk. Over het berekenen der grootte van feilen, maten van juistheid, enz., der waarschijnlijke getalwaarden van functiën, welker elementen onderling oraſhandelijk zijn, doch, zoowel als hunne feilen enz., in waarshijnlijke grootte bepaald of gegeven. Voorbeelden, enz. — Tiende Hoofdstuk. Over het berekenen der grootte van middelbare en waarschijnlijke fouten in uitkomsten van waarnemingen, en inzonderheid over het berekenen van de grootte der gewigten en der waarshijn-

lijke fouten, welke betrekking hebben of behooren tot de berekende waarschijnlijke waarden der onbekende elementen eener lineaire functie. Regels; Voorbeelden tot opheldering en toepassing; bijzondere opmerkingen, enz. — Elfde Hoofdstuk. Over andere rekenwijzen, zoo van Hansen als van Gauss, volgens welke, of alleenlijk de getalwaarden der gewigten, aan berekende waarden van elementen toe te kennen, worden verkregen, of de geligk zoowel de waarden dezer elementen, onafhankelijk van elkander, als de grootte de waarschijnlijke fouten, enz. Ander allgemeen bewijs van de waarheid der formule, ter berekening van de grootte der middelbare fout, betrekking hebbende tot de uitkomsten van waarnemingen, door welke de waarschijnlijke waarden van de onderscheidene elementen eener lineaire functie zijn bepaald geworden. — Twaalfde Hoofdstuk. Over het bepalen der waarschijnlijke getalwaarden van grootheden of van elementen eener functie, die niet onderling onafhankelijk zijn, bijaldien de noodige uitkomsten van waarnemingen, of die van berekening, een onderscheiden gewigt hebben. Over de grootte de middelbare fout, in dezelfde onderstellingen toe de kennen aan eene, waargenomene uitkomst, welke de eenheid tot gewigt heeft. Beschouwing en oplossing van het voorsted der bepaling von de meest naauwkeurige waarden van functiën, alsmede van de middelbare of waarschijnlijke fouten in deze waarden, indien de elementen geene onderling onafhankelijke grootheden zijn. Voorbeelden, enz.

Niemand wird dieses grosse und ausgezeichnete Werk beim ausführlichen Studium der Methode der kleinsten Quadrate entbehren können.

Mechanik.

Conséquences nécessaires de l'équation de la continuité des fluides. Exposé par Er. Edlund. (Extrait des Mémoires de la Société Royale des Sciences d'Upsal.) A Upsal. 1846. 4.

Wenn auch diese Abhandlung schon vor einigen Jahren erschienen ist, so halten wir ihren Inhalt doch für so interessant, dass wir ihr hier nachträglich noch einige Worte widmen zu müssen glauben, indem wir Zweck und Inhalt derselben in der Kürze nicht besser als mit den folgenden eigenen Worten des Herrn Verfassers glauben angeben zu können:

„L'intégrale des équations différentielles, desquelles dépend le mouvement des fluides, contient, comme on sait, des fonctions arbitraires, qui devront être déterminées par les conditions du mouvement spécial, qu'on considère. Lagrange a, le premier, cherché à les déterminer à l'aide des équations qui expriment que les par-

ticules, situées au commencement du mouvement à la surface du vase ou à la surface libre, se meuvent constamment durant le mouvement suivant ces surfaces. Cette hypothèse, bien qu'elle contribue à la détermination de ces fonctions arbitraires et, d'ailleurs, indique une propriété importante des fluides, n'était pas, à ce que nous savons, démontrée jusqu'à ce que M. A. F. Svanberg, dans une dissertation, insérée aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm pour l'année 1839, l'avait déduite comme une consequence nécessaire de la continuité, dans le cas d'une masse fluide incompressible, la surface du vase étant engendrée par la révolution d'une courbe quelconque. Dans une dissertation précédente nous avons démontré, par la méthode de M. Svanberg, cette propriété pour les fluides incompressibles, quelle que soit la forme du vase. Ici, en généralisant cette démonstration, nous ferons voir, que la propriété en question a lieu même pour les fluides compressibles, en supposant toutefois que l'équation de la continuité subsiste toujours.

Physik.

Mémoire sur la Température de la terre a différentes profondeurs, a Upsal. Par A. J. Ångström, Membre de l'Acad. des Sciences à Stockholm et de la Soc. des Sciences a Upsal. Extrait des Acta Reg. Soc. Upsal. A Upsal. 1851. 4.

Die wichtigsten Fragen, welche geothermometrische Versuche zu beantworten versuchen müssen, sind: 1. Welches ist, unter verschiedenen Breiten, die den verschiedenen Schichten des Erdbodens eigenthümliche Temperatur bis zu der Gränze, bis zu welcher sich die Wirkung der Sonne erstreckt. 2. Welches ist die Wärmequantität, welche die Sonne im Laufe eines Jahrs zur Erde sendet, und auf welche Weise vertheilt sich dieselbe auf die verschiedenen Jahreszeiten. 3. Nach welchen Gesetzen verbreitet sich die uns von der Sonne gesendete Wärme in den unteren Schichten der Erdrinde bis zu der Gränze, bis zu welcher sich die jährlichen Veränderungen erstrecken.

Diese schon früher von Quetelet in Brüssel, Forbes in Edinburg, Caldecott in Trevandrum discutirten Fragen einer neuen gründlichen Beantwortung zu unterwerfen, ergriff die Königliche Societät der Wissenschaften zu Upsala, welche von jeher sich mit dem grössten Eifer der Förderung der Wissenschaften widmet, mit Freude den Vorschlag ihres verewigten Mitgliedes, des trefflichen Rudberg, neue geothermometrische Beobachtungen zu Upsala anzustellen, und stellte demselben zu diesem Zwecke 9 Geothermometer von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 und 15

Schwedischen Fussen Länge zur Verfügung. Die im December 1837 begonnenen Beobachtungen endigten am Anfange des Jahrs 1846, und wurden im Garten des chemischen Laboratoriums, welcher an der Gränze des südlichen Gebiets der Stadt Upsala liegt, in einer Höhe von 50 Fuss über dem Meere angestellt. Der im Jahre 1839 erfolgte Tod Rudberg's brachte zwar keine wesentliche Störung in die Beobachtungen selbst, war aber die Ursache, dass dieselben einer sorgfältigen Redaction und Discussion bisher nicht unterworfen wurden. Diesem in vielen Beziehungen schwierigen Geschäft hat sich nun der geehrte Herr Verfasser der vorliegenden Abhandlung mit der grössten Umsicht und Sachkenntniss, ganz im neuesten Geiste der Wissenschaft, unterzogen, und dadurch eine Arbeit geliefert, welche wir für den fraglichen Gegenstand jedenfalls höchst wichtig halten. Leider müssen wir uns hier begnügen, im Folgenden nur den Hauptinhalt dieser ausgezeichneten Abhandlung anzugeben:

Première Partie. Résumé des observations. 1. Construction des thermomètres. 2. Correction des thermomètres. 3, Variations annuelles de la température de la terre. 4. Températures moyennes annuelles — variations séculaires. 5. Comparaison des résultats précédents avec des observations anciennes. 6. Variations diurnes.

Seconde Partie. Comparaison des résultats précédents avec la théorie. 1. Propagation de la chaleur dans la terre. 2. Température de la surface terrestre.

Wir wünschen sehr, dass diese mit derselben Gründlichkeit und demselben Scharfsinne, welche alle Arbeiten des verewigten Rudberg bekanntlich so sehr auszeichneten, ausgeführte Untersuchung bei allen Mathematikern und Physikern die Aufmerksamkeit finden möge, welche dieselbe so sehr verdient, und sagen unsern Dank der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Upsala, dass sie durch ihre kräftige Unterstützung die Möglichkeit dieser Beobachtungen herbeiführte, und dem Herrn Vf., dass er sich deren so höchst sorgfältigen Discussion unterzog.

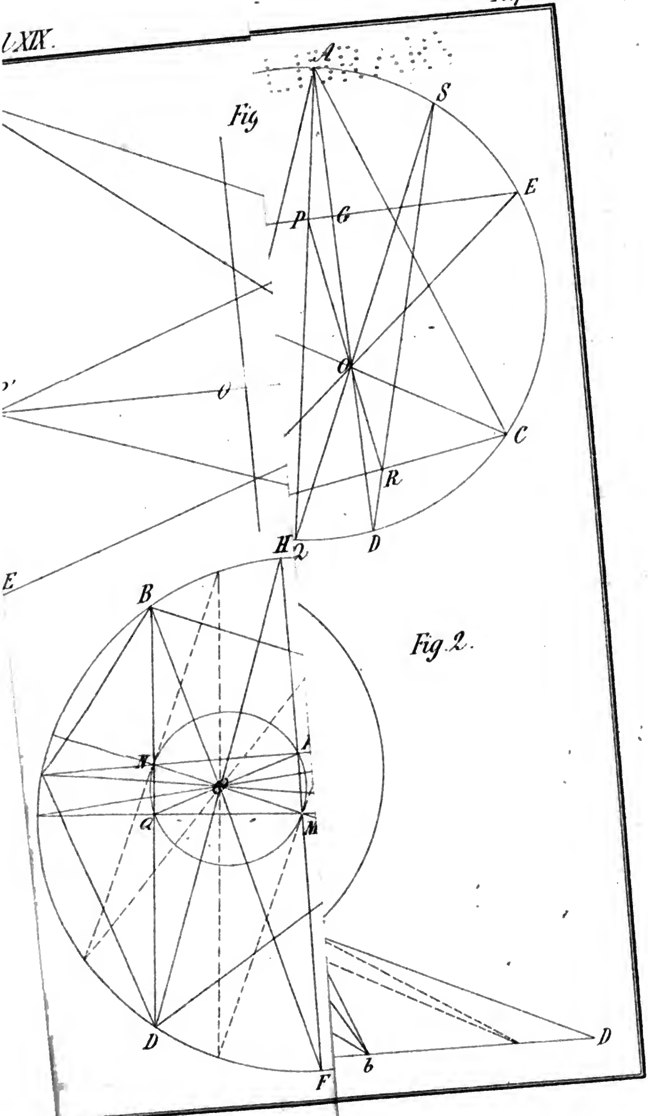
Försök att förklara orsaken till den dynamiska thermo-electriciteten. Inbjudningsskrift af Promotor Adolf Ferd. Svanberg. Upsala. 1851. 4.

Mit dieser Schrift hat der Professor der Physik an der Universität zu Upsala, Herr Adolf Ferdinand Svanberg, zu der feierlichen Magister-Promotion am 15. Juni 1851 eingeladen. Diese Abhandlung ist sowohl wegen ihres wissenschaftlichen, als auch wegen ihres sonstigen amtlichen Inhalts interessant. Der wissenschaftliche Theil ist zwar nur kurz, beschäftigt sich aber in scharfsinniger Weise mit der mathematischen Theorie der Thermo-Electricität, und muss der Beachtung der Mathematiker und Physiker empfohlen werden. Im rein amtlichen Theile finden wir aus den 13 schwedischen Nationen gerade 100 Promovirte, voran 5 Jubel-

magister, der eine, Johann Pontén, Smolandus, ein würdiger schwedischer Geistlicher, noch von der Universität Greifswald im Jahre 1800 promovirt, und als Philosophiae Doctor et artium liberalium Magister Honorarius den berühmten Christopher Hansteen in Christiania. Dass auf den schwedischen Universitäten solche amtliche Schriften in der Landessprache erscheinen, ist gewiss eine sehr schöne Sitte, da im Gegentheil der deutsche Professor sich fast immer noch schämen muss, wenn er bei solchen Gelegenheiten nicht mit römischer Zunge auftritt.

Am 5. Juni 1849 wurde in Dorpat eins der grössten und schönsten Hofphänomene, welche überhaupt vorkommen können, beobachtet. Dieses merkwürdige Phänomen hat der Herr Director Mädler in Dorpat in einer besonderen Abhandlung beschrieben, und Herr Observator Clausen die Theorie dazu geliefert, auf welche wir die Leser des Archivs aufmerksam machen, da dieselbe als ein Muster für die Theorie der Höfe überhaupt betrachtet werden kann, um so mehr, da sie möglichst elementar gehalten worden ist. Der Abhandlung sind auch drei recht schöne Figurentafeln beigegeben worden, welche sehr zur Verdeutlichung der Sache beizutragen geeignet sind.

LXIX. Taf. I.



Fig

Fig. 2.

Digitized by Google

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

510.5
a 673
v.19

STORAGE AREA